

我们先回忆利普希茨条件的定义：
若存在常数 $L > 0$ ，使得对区域内任意两点 (x, y_1) 和 (x, y_2) ，都有
 $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$
则称 $f(x, y)$ 对 y 满足利普希茨条件。

15

对于 $f(x, y) = |y|$ ，我们可以分情况讨论：

- 当 y_1, y_2 同号或其中一个为0时， $||y_1| - |y_2|| = |y_1 - y_2|$ ，此时取 $L = 1$ 即可满足条件；
- 当 y_1, y_2 异号时， $||y_1| - |y_2|| = |y_1 + y_2| \leq |y_1| + |y_2| = |y_1 - y_2|$ （因为 $y_1 = -|y_1|, y_2 = |y_2|$ ，所以 $y_1 - y_2 = -(|y_1| + |y_2|)$ ，绝对值相等）。

因此，对任意 y_1, y_2 ，都有 $||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|$ ，即 $f(x, y) = |y|$ 对 y 满足利普希茨条件，对应选项 B。

最终答案: B

15. 函数 $f(x, y) = |y|$ 对 y 利普希茨条件 $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = ||y_1| - |y_2|| \leq 1 \cdot |y_1 - y_2|$

- A. 不满足 ✓ B. 满足 C. 除 $x = 0$ 以外的点满足 D. 仅在 $x = 0$ 点满足 L=1 ✓

16. 求初值问题 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x^2 - y^2 \\ y(-1) = 0 \end{cases}$ $R: |x+1| \leq 1, |y| \leq 1$ 的解的存在区间，并求第二次近似解，给出在解的存在区间的误差估计

1. 解的存在区间

方程是 $\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2$ ，初值 $y(-1) = 0$ ，区域 $R: |x+1| \leq 1, |y| \leq 1$ 。

- 先确定 $f(x, y) = x^2 - y^2$ 在 R 上的最大值：
 $x \in [-2, 0], y \in [-1, 1]$ ，所以 $|f(x, y)| \leq \max(x^2) + \max(y^2) = 4 + 1 = 5$ ，即 $M = 5$ 。

- 区域 R 的宽度: $a = 1, b = 1$ 。

- 取 $h = \min(a, \frac{b}{M}) = \min(1, \frac{1}{5}) = \frac{1}{5}$

因此，解的存在区间是：

$$x \in [-1 - h, -1 + h] = \left[-1 - \frac{1}{5}, -1 + \frac{1}{5}\right] = \left[-\frac{6}{5}, -\frac{4}{5}\right]$$

2. 第二次近似解

用皮卡迭代法：

- 零次近似: $\varphi_0(x) = 0 = y_0$

- 一次近似:

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{-1}^x f(t, \varphi_0(t)) dt = 0 + \int_{-1}^x t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^x = \frac{x^3 + 1}{3}$$

- 二次近似:

$$\varphi_2(x) = 0 + \int_{-1}^x \left[t^2 - \left(\frac{t^3 + 1}{3} \right)^2 \right] dt$$

展开计算：

$$\begin{aligned} \left(\frac{t^3 + 1}{3} \right)^2 &= \frac{t^6 + 2t^3 + 1}{9} \\ \varphi_2(x) &= \int_{-1}^x \left(t^2 - \frac{t^6 + 2t^3 + 1}{9} \right) dt = \int_{-1}^x \left(\frac{9t^2 - t^6 - 2t^3 - 1}{9} \right) dt \\ &= \frac{1}{9} \left[3t^3 - \frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{2} - t \right]_{-1}^x \end{aligned}$$

代入上下限：

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{9} \left[\left(3x^3 - \frac{x^7}{7} - \frac{x^4}{2} - x \right) - \left(-3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{2} + 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{9} \left(3x^3 - \frac{x^7}{7} - \frac{x^4}{2} - x + \frac{27}{14} \right) \end{aligned}$$

区域 R ：
 $|x - x_0| \leq a$
 $|y - y_0| \leq b$

$$y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt$$

定义3. 给定 积分方程 $y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y) dt$ 。

构造函数序列 $\{y_n(x)\}$ ： $y_0(x) = y_0, y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt$ 。
($n = 0, 1, 2, \dots$)

则称 $y_n(x)$ 为上面积分方程的 第 n 次近似解。

定理5. (误差估计) 设 $y(x)$ 为积分方程

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y) dt$$

的 真实解， $y_n(x)$ 为其 第 n 次近似解，则

$$|y_n(x) - y(x)| \leq \frac{M \cdot L^n}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

其中， $M = \max_{(x,y) \in R} |f(x, y)|$ ， L 为 Lipschitz 常数， $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ 。

3. 误差估计

皮卡迭代的误差公式：

$$|\varphi_2(x) - \varphi(x)| \leq \frac{ML^2}{(2+1)!} h^{2+1}$$

其中 L 是 $f_y = -2y$ 在 R 上的利普希茨常数， $|f_y| \leq 2$ ，即 $L = 2$ 。

代入 $M = 5, L = 2, h = \frac{1}{5}$ ：

$$|\varphi_2(x) - \varphi(x)| \leq \frac{5 \times 2^2}{6} \times \left(\frac{1}{5} \right)^3 = \frac{20}{6} \times \frac{1}{125} = \frac{2}{75}$$

最终答案：

- 解的存在区间: $\left[-\frac{6}{5}, -\frac{4}{5}\right]$

- 第二次近似解: $\varphi_2(x) = \frac{1}{9} \left(3x^3 - \frac{x^7}{7} - \frac{x^4}{2} - x + \frac{27}{14} \right)$

- 误差估计: $\leq \frac{2}{75}$

