

安徽大学 2024—2025 学年第 1 学期

《常微分方程》考试试卷（A 卷）

（闭卷 满分 100 分 时间 120 分钟）

院/系_____ 年级_____ 专业_____ 姓名_____ 学号_____ 考场登记表序号_____

题 号	一	二	三	四	总分
得 分					

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

得分	
----	--

1. 下列微分方程是线性的是()

- A. $y'' + xy' + y = x^2$ B. $y' = x^2 + y^2$ C. $y'' - xy^2 = f(x)$ D. $y'' - y' = y^3$

2. 方程 $(e^x + 3y^2)dx + 2xydy = 0$ 的积分因子是()

- A. $\mu(x) = \frac{1}{x}$, B. $\mu(x) = x^2$, C. $\mu(y) = \frac{1}{y}$, D. $\mu(x) = y^2$

3. 若 $\Phi(t)$ 为线性方程组 $\frac{dY}{dx} = A(x)Y, Y \in \mathbb{R}^n$ 的基解矩阵, C 是 n 阶非奇异常数矩阵, 下列仍是基解矩阵的是()

- A. $C\Phi(t)$ B. $\Phi(t) + C$ C. $\Phi(t)C$ D. 以上都不对

4. 设 $x_1(t), x_2(t)$ 是方程 $\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f(t)$ 的两个解, 则下述仍是原方程的解的是()

- A. $x_1(t) - x_2(t)$ B. $\frac{1}{2}x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t)$ C. $x_1(t) + x_2(t)$ D. 以上都不对

5. 方程 $y'' + 3y' + 2y = x^2 e^{-2x}$ 特解的形式为()

- A. $y = ax^2 e^{-2x}$ B. $y = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$
 C. $y = x(ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ D. $y = x^2(ax^2 + bx + c)e^{-2x}$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

得分	
----	--

1. 方程 $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ 定义在矩形区域 $R: -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2$ 上则经过点 $(0,0)$ 的解的存在区间是 _____.
2. n 阶线性齐次方程的一组解 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 能成为其基本解组的充分必要条件是 _____.
3. 一阶方程初值问题的 n 次近似解 $\varphi_n(x)$ 与真正解 $\varphi(x)$ 在 $|x - x_0| \leq h$ 上的误差为 $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq$ _____.
4. 设函数 $x(t)$ 的拉普拉斯变换是 $x(s)$, 则 $x'(t)$ 的拉普拉斯变换是 _____.
5. 若 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 是 n 阶线性齐次方程的基本解组, 则它们 _____ 公共零点. (填有或者没有)

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

得分	
----	--

1. 求方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{2x - 2y - 3}$ 的解.

2. 求方程 $y'^3 - x^3(1 - y') = 0$ 的解.

3. 求方程 $x'' + x' - 2x = 8\sin 2t$ 的解.

4. 求方程 $x''' - x = e^t$ 的解.

5. 求方程 $x'' + \frac{2}{1-x}(x')^2 = 0$ 的解.

6. 求方程组 $x' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x$ 的一个基解矩阵.

四、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

得分	
----	--

1. 设函数 $f(x, y)$ 于 (x_0, y_0) 的领域内是 y 的不增函数，试证方程 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 满足条件 $y(x_0) = y_0$ 的解于 $x \geq x_0$ 一侧最多只有一个.

2. 假设 A 是 n 阶方阵，证明：对任意常数 c_1, c_2 都有 $\exp(c_1 A + c_2 A) = \exp c_1 A \cdot \exp c_2 A$.