

一、判断题

1. 任意多个开集的交集仍是开集. ()
2. 若 $f(x)$ 是定义在 E 上的函数, 则 $\{x \in E: f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in E: f(x) > \frac{1}{n}\right\}$. ()
3. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调增函数, 则 $f(x)$ 的不连续点最多只有可数多个. ()
4. 若 E 是开集, 则 E^c 是闭集; 若 E 是闭集, 则 E^c 是开集. ()
5. 可列个零测集的并集不一定是零测集. ()
6. 设 $\{E_n\}$ 是一列可测集, 且 $E_n \subset E_{n+1}, n=1, 2, \dots$, 则 $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n)$. ()
7. 设 $mE < \infty, \{f_n(x)\}$ 是 E 上一列 a. e. 收敛于一个 a. e. 有限的函数 $f(x)$ 的可测函数列, 则对任意 $\delta > 0$, 存在可测子集 $E_\delta \subset E$, 使 $\{f_n(x)\}$ 在 E_δ 上一致收敛于 $f(x)$, 且 $m(E \setminus E_\delta) < \delta$. ()
8. 定义在可测集上的连续函数不一定是可测函数. ()
9. $\frac{\cos x}{x}$ 是 $[1, +\infty)$ 上的勒贝格可积函数. ()
10. 设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的绝对连续函数, 则 $\int_{[a, b]} f'(x) dx = f(b) - f(a)$. ()

二、问答题

11. (i) 设 $\{A_n\}$ 是集合列, 分别写出 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n, \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ 的定义.
(ii) 设 $A_{2n-1} = \left(0, \frac{1}{n}\right), A_{2n} = (0, n), n=1, 2, \dots$, 求出集列 $\{A_n\}$ 的上限集和下限集.
12. 设 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中任一点集, 分别写出 E 的外测度和测度的定义.
13. 设 $E \subset \mathbf{R}^n$ 为可测集, $f(x)$ 是定义在 E 上的实函数. 写出 $f(x)$ 是 E 上的可测函数的定义, 以及 $f(x)$ 在 E 上可测的充要条件.
14. 设 $E \subset \mathbf{R}^n$ 为可测集, $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数, 写出 $f(x)$ 在 E 上的勒贝格积分的定义, 并叙述关于积分序列极限的 Fatou 引理.

三、分析证明题

15. 设 $\{E_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的可测集列, 若 $mE_n = 1 (n=1, 2, \dots)$, 证明: $m(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = 1$.
16. 设在可测集 E 上, $f_n(x) \Rightarrow f(x), g_n(x) \Rightarrow g(x)$.
证明: 在 E 上, $f_n(x) + g_n(x) \Rightarrow f(x) + g(x)$.

17. 若 $\{f_n(x)\}$ 为 $[a,b]$ 上有界变差函数列, 对任意 $x \in [a,b], \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, 且对任意 $n = 1, 2, \dots, \overset{b}{\underset{a}{V}}(f_n) \leq M < \infty$. 求证: $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

四、计算题

18. 设 $E = [0,1] \cap Q$, 求在 $\mathbb{R}$ 内的 $E', E^\circ, \overline{E}$.

19. 设 $f(x)$ 是 $[1,5]$ 上的可积函数, 若 $f_n(x) = \frac{f(x)}{(x^2 + 4x + 1)^n}$, 试求: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[1,5]} f_n(x) dx$.

五、证明题

20. 设 $\{f_n(x)\}$ 为 E 上可积函数列, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ a.e. 于 E , 且 $\int_E |f_n(x)| dx \leq K, K$ 为常数. 证明: $f(x)$ 在 E 上勒贝格可积.

21. 设 $f(x)$ 在 E 上勒贝格可积. 证明: $|f(x)|$ 也在 E 上勒贝格可积, 且 $\left| \int_E f(x) dx \right| \leq \int_E |f(x)| dx$.