

一、判断题 填“√”或“×”

1. 可数个闭集的并是闭集. ()
2. 对等的集合是相等的. ()
3. 开集、闭集都是可测集. ()
4. 可列个零测集的并不一定是零测集. ()
5. 零测集上的实函数是可测函数. ()
6. 设 $mE < \infty$, 且 $f_n \rightarrow f, a.e.$, 则 f_n 依测度收敛于 f . ()
7. 可测集上的连续函数不一定可测. ()
8. 设 $f(x)$ 为可测集 E 上的非负可测函数, 则 $f(x) \in L(E)$. ()
9. 定义在有界闭区间上的有界变差函数是几乎处处可微的. ()
10. 设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的绝对连续函数, 则 $\int_{[a, b]} f'(x) dm = f(b) - f(a)$. ()

11. (i) 设 E 为有界集, 分别写出 E 的外测度、内测度和测度的定义.
(ii) 设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是集合列, 分别写出 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ 的定义.

12. 写出可测集 E 上简单函数 $f(x)$ 的定义, 并证明 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.
13. 写出有界可测集 E 上可测函数 $f(x)$ 的 Lebesgue 积分的定义. 叙述关于积分序列极限的 Levi 定理.
14. 试找出 $[0,1]$ 与 $(0,1)$ 之间的一种一一对应, 并写出其解析式.

15. 设 E 是 $[0,1]$ 中的无理数集, 则 E 是可测集, 且 $mE=1$.

16. 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数列, 证明:

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x) dm.$$

17. 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数, 证明: $f(x)$ 可积的充要条件是 $|f(x)|$ 可积.

四、计算题

18. 设 $f(x)$ 是 $[3,5]$ 上的可积函数, 令 $f_n(x) = \frac{f(x)}{(x^2 + 5x + 1)^n}$, 试求: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[3,5]} f_n(x) dm$.

19. 设 $\alpha > 0$, 求 $\int_{(0,1)} x^{-\alpha} dm$.

五、证明题

20. 设在可测集 E 上, $f_n \xrightarrow{m} f$, $g_n \xrightarrow{m} g$, 证明: $3f_n + 2g_n \xrightarrow{m} 3f + 2g$.

21. 证明: 在 $[a,b]$ 上定义的绝对连续函数 $f(x)$ 是有界变差的.