

## 第四章 可测函数

一、各种函数的定义

- 有界函数
- 有限函数
- $a.e.$ 有限的函数
- (广义)实值函数
- 可测函数(5个等价的判定条件)
- (可测)简单函数

### 二、可测函数的相关性质

- 1、可测集上的常值函数是可测函数.
- 2、零测集上的任何函数都是可测函数.
- 3、可测集上的连续函数是可测函数.
- 4、设 $f(x)$ 是 $E$ 上的可测函数, 则 $E[f = a]$ 是可测集, 无论 $a$ 是有限实数或 $\pm\infty$ .
- 5、设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 $E$ 上的可测函数, 则 $E[f > g]$ 与 $E[f \leq g]$ 都是可测集.
- 6、设 $f(x)$ 是 $E$ 上的可测函数,  $E_1$ 是 $E$ 的可测子集, 则 $f(x)$ 限制在 $E_1$ 上是可测函数.

7、设 $f(x)$ 是 $E_i (i=1,2,\dots)$ 上的可测函数,  $f(x)$ 是 $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 上的可测函数.

8、设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 $E$ 上的可测函数, 则下列函数都是 $E$ 上的可测函数:

$$|f(x)|, \frac{1}{f(x)}, f(x)+g(x), f(x)g(x)$$

9、可测函数序列的上(下)确界、上(下)极限仍然是可测函数.

10、可测函数的简单函数逼近定理(可测函数与简单函数的关系).

### 三、可测函数的构造(即可测函数与连续函数的关系)

1、可测集上的连续函数是可测函数.

2、**鲁津定理**: 可测集上a.e.有限的可测函数是“基本上”连续的函数.

3、**鲁津定理的逆定理**: 可测集上“基本上”连续的函数是可测函数.

### 四、可测函数序列的各种收敛性及其关系

$$1、\text{各种收敛性的定义} \left\{ \begin{array}{ll} (1)\text{点点收敛} & \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in E \\ (2)\text{a.e.收敛} & f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{a.e.于} E \\ (3)\text{一致收敛} & \\ (4)\text{"基本上"一致收敛} & \\ (5)\text{依测度收敛} & f_n(x) \Rightarrow f(x) \text{于} E \end{array} \right.$$

设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ 是定义在点集 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上的实值函数.

(1)(点点收敛)若对任意 $x \in E$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 在 $E$ 上点点收敛于 $f(x)$ , 记作 $f_n \rightarrow f(x)$ 于 $E$ ;

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon x} > 0, \forall n \geq N_{\varepsilon x}, \text{有 } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(2)(一致收敛)若对任意 $\varepsilon > 0$ , 存在 $N \in \mathbf{N}$ , 当 $n > N$ 时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad x \in E,$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 在 $E$ 上一致收敛于 $f(x)$ .

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon} > 0, \forall n \geq N_{\varepsilon}, \forall x \in E, \text{有 } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(3)(几乎处处收敛) 若存在 $E$ 中的点集 $Z$ , 有 $mZ = 0$ 及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in E - Z,$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 在 $E$ 上几乎处处 (a.e.) 收敛于 $f(x)$ , 并记为

$$f_n(x) \rightarrow f(x), \quad a.e. \quad x \in E.$$

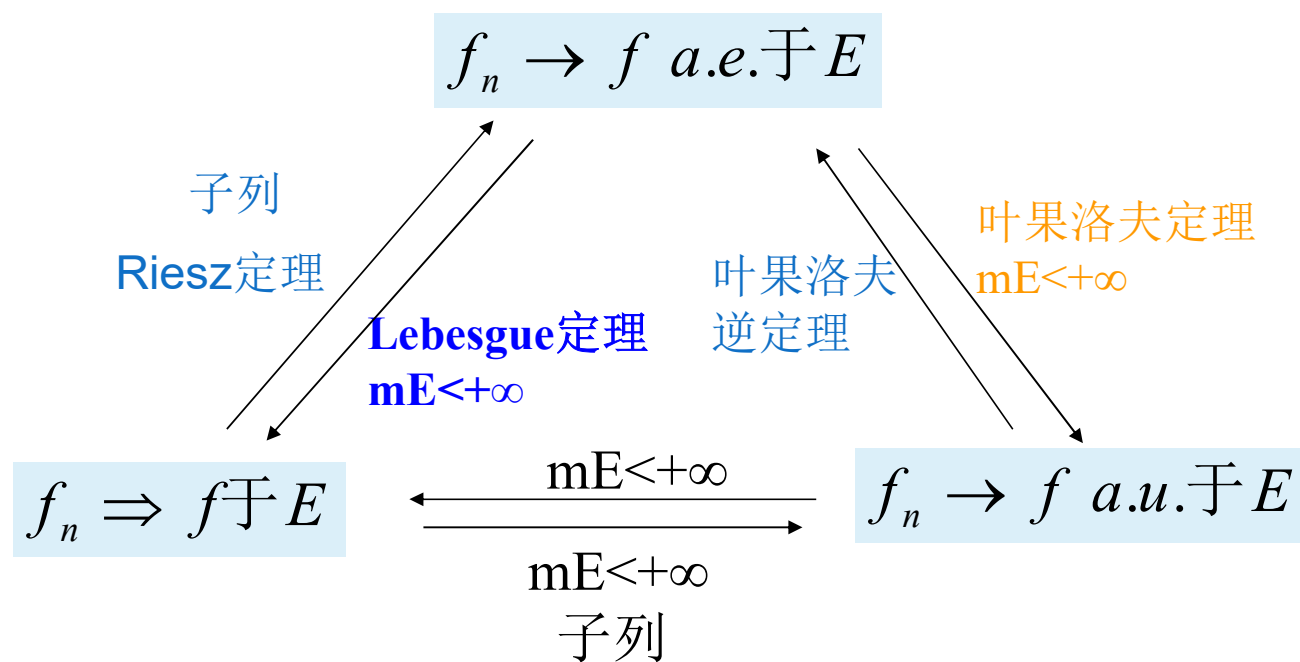
(4) 若对任意 $\sigma > 0$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} mE[|f_n - f| \geq \sigma] = 0$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$ , 记为 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ 于 $E$ .

$\varepsilon$ - $N$ 语言:  $\forall \sigma > 0$  及  $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\sigma, \varepsilon)$ , 使当  $n \geq N(\sigma, \varepsilon)$  时, 有  $mE[|f_n - f| \geq \sigma] < \varepsilon$ .

## 2、各种收敛性之间的关系



在  $mE < \infty$  条件下, 依测度收敛弱于 a. e. 收敛.

## 五、依测度收敛的可测函数序列具有以下性质

1、极限的唯一性.  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ ,  $f_n(x) \Rightarrow g(x)$ , 则  $f(x) = g(x)$ , a.e. 于  $E$ .

2、四则运算法则 (第四章习题 13)

设  $mE < \infty$ , a. e. 有限的可测函数列  $f_n(x)$  和  $g_n(x) (n=1, 2, \dots)$  分别依测度收敛于  $f(x)$  和  $g(x)$ , 证明:

$$(1) f_n(x)g_n(x) \Rightarrow f(x)g(x);$$

$$(2) f_n(x) + g_n(x) \Rightarrow f(x) + g(x);$$

$$(3) \min\{f_n(x), g_n(x)\} \Rightarrow \min\{f(x), g(x)\};$$

$$\max\{f_n(x), g_n(x)\} \Rightarrow \max\{f(x), g(x)\}.$$

## 六、复合函数的可测性 (第四章习题 6)

设  $f(x)$  是  $R$  上的连续函数,  $g(x)$  是  $E \subset R^n$  上的可测函数, 则  $f \circ g(x) = f(g(x))$  在  $E$  上可测.