

第三章 测度论

一、外测度、测度

1、外测度的定义 设 $E \subset \mathbf{R}^n$. 对每一列覆盖 E 的开区间 $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \supset E$, 作出它的体积总和 $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$. 所有这一切的 μ 组成一个下方有界的数集, 它的下确界称为 E 的勒贝格外测度, 或者外测度, 记为 m^*E , 即

1. 外测度性质

$$\sum_{I_i} |I_i|$$

- (1) $m^*E \geq 0, m^*\emptyset = 0$;
- (2) 若 $A \subset B$, 则 $m^*A \leq m^*B$;
- (3) 任意 $A_i \subset \mathbf{R}^n, i = 1, 2, \dots$,

$$m^*\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*A_i.$$

2、可测集、测度的定义

设 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的点集, 如果对任一点集 T 都有

$$m^*T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c),$$

则称 E 是 L 可测的. 这时 E 的 L 外测度 m^*E 即称为 E 的 L 测度, 记为 mE .
 L 可测集全体记为 $\mathcal{M}$.

二、关于测度、可测集的一些结论

1、 $\emptyset$ 是可测集，且 $m\emptyset = 0$

2、设 $E \subset \mathbf{R}^n$ ，若 $m^*E = 0$ ，则 E 是可测集，且 $mE = 0$.

3、集合 S 可测 $\Leftrightarrow \forall T \subset \mathbf{R}^n$, $m^*T = m^*(T \cap S) + m^*(T \cap S^c)$ 卡氏条件

$\Leftrightarrow S^c$ 可测.

$\Leftrightarrow \forall A \subset S, B \subset S^c, m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$.

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, 存在开集 G 和闭集 F ，使得 $F \subset S \subset G$ ，且 $m^*(G-F) < \varepsilon$.

4、 S_1, S_2 都是可测集 $\Rightarrow S_1 \cup S_2, S_1 \cap S_2, S_1 - S_2$ 都是可测集.

$S_1, S_2, \dots, S_n$ 都是可测集 $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^n S_i, \bigcap_{i=1}^n S_i$ 都是可测集.

$S_1, S_2, \dots, S_n$ 是互不相交的可测集 $\Rightarrow m\left(\bigcup_{i=1}^n S_i\right) = \sum_{i=1}^n mS_i$.

$S_1, S_2, \dots$ 是一列可测集 $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i, \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i$ 都是可测集.

$S_1, S_2, \dots$ 是一列互不相交的可测集 $\Rightarrow m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} mS_i$.

若 $S_1, S_2, \dots$ 是一列递增的可测集 $\Rightarrow m\left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} mS_n$.

$S_1, S_2, \dots$ 是一列递减的可测集，且 $mS_1 < \infty \Rightarrow m\left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\right) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} mS_n$.

三、可测集类

1、零测度集 (1) 凡外测度为零之集皆可测,称为零测度集.

(2) 零测度集之任何子集仍为零测度集.

(3) 有限个或可数个零测度集之和集仍为零测度集.

2、区间 区间 I (不论开、闭或半开半闭区间) 都是可测集合, 且 $mI = |I|$.

3、开集、闭集都是可测集.

4、博雷尔集都是可测集. 由 $\mathbf{R}^n$ 中所有开集生成的 σ 代数记为 $\mathcal{B}$, 并称 $\mathcal{B}$ 中的集合为博雷尔(Borel)集.

5、 G_δ 型集及 F_σ 型集都是博雷尔集.

设集合 G 可表示为一列开集 $\{G_i\}$ 之交集: $G = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$, 则称 G 为 G_δ 型集.

设集合 F 可表示为一列闭集 $\{F_i\}$ 之并集: $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, 则称 F 为 F_σ 型集.

6、设 E 是任一可测集, 则一定存在 G_δ 型集 G , 使 $G \supset E$, 且 $m(G-E)=0$.

设 E 是任一可测集, 则一定存在 F_σ 型集 F , 使 $F \subset E$, 且 $m(E-F)=0$.

7、若 E 是一可测集, 则 (1) $mE = \inf\{mG : G \text{ 是开集}, E \subset G\}$ (外正规性);

(2) $mE = \sup\{mK : K \text{ 是紧集}, K \subset E\}$ (内正规性).

一、主要概念

1. 开区间的体积

开区间 $I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n) \subset \mathbf{R}^n$ 的体积是

$$|I| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

2. 外测度

对任意 $E \subset \mathbf{R}^n$,

$$m^*E = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, I_i \text{ 是开区间}, i = 1, 2, \cdots \right\}.$$

3. 可测集

若 $E \subset \mathbf{R}^n$, 满足条件: 对任意 $T \subset \mathbf{R}^n$,

$$m^*T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c),$$

则称 E 是可测集.

4. $\mathbf{R}^n$ 上的 σ 代数

设 Ω 是由 $\mathbf{R}^n$ 的一些子集类组成的集合, Ω 称为 $\mathbf{R}^n$ 上的一个 σ 代数, 如果 Ω 满足条件:

- (1) $\emptyset \in \Omega$;
- (2) 若 $E \in \Omega$, 则 $E^c \in \Omega$;
- (3) 若 $E_n \in \Omega, n = 1, 2, \dots$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Omega$.

5. $\mathbf{R}^n$ 的一个子集族 Σ 产生的 σ 代数

包含 Σ 的最小的 σ 代数 $\sigma(\Sigma)$, 称为 Σ 产生的 σ 代数.

注 2 $\sigma(\Sigma) = \bigcap \{ \Omega : \Omega \text{ 是 } \sigma \text{ 代数且 } \Sigma \subset \Omega \}$.

6. 博雷尔代数

由 $\mathbf{R}^n$ 中全体开集组成的子集类生成的 σ 代数记为 $\mathcal{B}$, 称为博雷尔代数.

7. 测度

定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的 σ 代数 Ω 上的函数 μ 被称为测度, 如果 μ 满足条件:

- (1) 对每个 $E \in \Omega, \mu(E) \geq 0$, 且 $\mu(\emptyset) = 0$;
- (2) 若 $E_n \in \Omega, n = 1, 2, \dots$, 且对任意 $n \neq m, E_n \cap E_m = \emptyset$, 有 $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

8. 测度空间

$(\mathbf{R}^n, \Omega, \mu)$ 称为测度空间, 其中 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个 σ 代数, μ 是 Ω 上的测度.