

第一章集合

一、集合

{	有限集	{	空集
		{	含有有限个元素的集合
{	无限集	{	可数集 (如: 自然数集、整数集、有理数集……)
		{	不可数集 (如: $(a,b), [a,b], (a,b), (a,b), (a,\infty), [a,\infty), (-\infty,b], (-\infty,b), \mathbf{R}, \mathbf{R}^n$ 等)

二、集合的运算

1、集族的运算: $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha} = \{x : \exists \alpha \in \Lambda, \text{使 } x \in A_{\alpha}\}, \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha} = \{x : \forall \alpha \in \Lambda, \text{有 } x \in A_{\alpha}\}$

2、运算性质

$$(2) A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad (\text{结合律})$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

$$(3) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad (\text{分配律})$$

$$A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_{\alpha} \right) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (A \cap B_{\alpha});$$

$$(4) A \cup A = A, A \cap A = A.$$

$$(5) A - B = A \cap B^c;$$

$$(6) (A - B) \cup B = A \cup B, \text{ 若 } B \subset A, \text{ 则 } (A - B) \cup B = A;$$

$$(7) A \cup A^c = S, A \cap A^c = \emptyset, (A^c)^c = A, S^c = \emptyset, \emptyset^c = S;$$

(8) 德摩根 (De Morgan) 公式

若 $\{A_{\alpha} : \alpha \in \Lambda\}$ 是一族集合, 则

$$(1) \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha} \right)^c = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}^c;$$

$$(2) \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha} \right)^c = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}^c.$$

6、重要的对等关系:

(1) $[a, b] \sim [0, 1]$, $(a, b) \sim (0, 1)$ $\left(\text{可作一一映射 } f(x) = \frac{x-a}{b-a} \right)$

(2) $(0, 1) \sim (-\infty, \infty)$ $\left(\text{可作一一映射 } f(x) = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) \right)$

(3) $(0, 1) \sim [0, 1]$ (由于 $(0, 1) \subset [0, 1] \subset (-1, 2)$, 且 $(0, 1) \sim (-1, 2)$, 由伯恩斯坦定理的特例可知 $(0, 1) \sim [0, 1]$)

(4) $(0, 1) \sim (0, 1]$, $(0, 1) \sim [0, 1)$ (证明方法与 (3) 中类似)

(5) $(0, 1) \sim (-\infty, a)$, $(0, 1) \sim (-\infty, a]$, $(0, 1) \sim (b, \infty)$, $(0, 1) \sim [b, \infty)$ (证明方法与 (3) 中类似)

从而: $(a, b) \sim [a, b] \sim [a, b) \sim (a, b] \sim (a, \infty) \sim [a, \infty) \sim (-\infty, b] \sim (-\infty, b) \sim (-\infty, \infty)$

五、可数集

1、可数集的定义: 与自然数集 $\mathbf{N}$ 对等的集合称为可数集或可列集, 其基数记为 $\aleph_0$

2、任何无限集合均含有可数子集 (可数集是所有无限集中具有最小基数的集合)

3、无限集必与它的一个真子集对等.

4、(1)集合A为有限集的充要条件是A不与其真子集对等; (2)集合A为无限集的充要条件是A与其某真子集对等.

5、有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可数集.

6、可数集的性质 (并运算)

(1)有限集与可数集的并仍为可数集; (2)有限个可数集的并仍为可数集; (3)可数个可数集的并仍为可数集.

7、可数集的性质 (直积)

(1)有限个可数集的直积是可数集.

六、不可数集

1、不可数集的定义：不是可数集合的无限集合称为不可数集. 如区间 $(0,1)$ ，全体实数所成集合 $\mathbf{R}$ ，

2、连续基数集及其性质

1. 称全体实数所成集合 $\mathbf{R}$ 的基数为连续基数，记为 $\overline{\mathbf{R}}=c$ 或 $\overline{\mathbf{R}}=\aleph$.

$\overline{\mathbf{N}} < \overline{\mathbf{R}}$, 即 $\aleph_0 < \aleph$.

2. 任意区间 $(a,b), [a,b], [a,b), (a,b], (a,\infty), [a,\infty), (-\infty,b], (-\infty,b)$ 都具有连续基数 c .

3. 连续基数集的（有限个，可数个）并仍为连续基数集.

4. 有限个、可数个连续基数集的直积仍为连续基数集. （如： $\mathbf{R}^n$ 、 $\mathbf{R}^\infty$ 的基数均为 c ）

3、无最大基数定理

设 M 是一个非空集合，则 M 与其幂集不对等 $\left(\overline{2^M} > \overline{M}\right)$.

注：1. 有基数大于 c 的集合; 2. 没有最大的基数.

例2 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在点集 E 上的函数列, 则

$$\{x: \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0\} = \bigcap_{\epsilon \in \mathbf{R}^+} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{x: |f_n(x)| < \epsilon\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \left\{x: |f_n(x)| < \frac{1}{k}\right\}.$$

$$\{x: \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq 0 \text{ 或不存在}\} = \bigcup_{\epsilon \in \mathbf{R}^+} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \{x: |f_n(x)| \geq \epsilon\}$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \left\{x: |f_n(x)| \geq \frac{1}{k}\right\}$$

3. 设 $\{A_n\}$ 是一列集合, 作 $B_1 = A_1, B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right), n = 2, 3, \dots$, 证明 $\{B_n\}$

是一列互不相交的集合, 而且 $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n B_i, n = 1, 2, \dots$.

一、证明 $\{B_n\}$ 是互不相交的集合列

要证对任意 $k < m$, 有 $B_k \cap B_m = \emptyset$ 。

• 当 $k = 1$ 时, $B_1 = A_1, B_m = A_m \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} A_i$ ($m \geq 2$)。

显然 $B_m \subseteq A_m$ 且 $B_m \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right) = \emptyset$, 而 $A_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{m-1} A_i$, 故 $B_1 \cap B_m = \emptyset$ 。

• 当 $2 \leq k < m$ 时, $B_k = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i, B_m = A_m \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} A_i$ 。

因为 $k < m$, 所以 $A_k \subseteq \bigcup_{i=1}^{m-1} A_i$, 因此 $B_m \cap A_k = \emptyset$, 进而 $B_m \cap B_k = \emptyset$ 。

综上, 对任意 $k \neq m$, $B_k \cap B_m = \emptyset$, 即 $\{B_n\}$ 是一列互不相交的集合。✔

二、证明 $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n B_i$ (对任意 $n \in \mathbb{N}^*$)

显然, 对任意 $i, B_i \subset A_i$, 因此, $\bigcup_{i=1}^n B_i \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$ 。

设 $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$, 令 $i_0 = \min\{i : x \in A_i\}$. 则

$$x \in A_{i_0} \setminus \bigcup_{i=1}^{i_0-1} A_i = B_{i_0} \subset \bigcup_{i=1}^n B_i.$$

所以, $\bigcup_{i=1}^n A_i \subset \bigcup_{i=1}^n B_i$ 。

进而有, $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n B_i$ 。

8. 设 $\{A_\varepsilon : \varepsilon \in \mathbf{R}^+\}$ 是集合族.

(1) 若对任意 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, $A_{\varepsilon_2} \subset A_{\varepsilon_1}$, 证明: $\bigcup_{\varepsilon \in \mathbf{R}^+} A_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$;

(2) 若对任意 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, $A_{\varepsilon_1} \subset A_{\varepsilon_2}$, 证明: $\bigcap_{\varepsilon \in \mathbf{R}^+} A_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$.

证明 (1) 显然 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n} \subset \bigcup_{\varepsilon \in \mathbf{R}^+} A_\varepsilon$. 又对任意 $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$, 存在 n , 使得 $1/n < \varepsilon$, 因

此 $A_\varepsilon \subset A_{1/n} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$. 由 ε 的任意性, $\bigcup_{\varepsilon \in \mathbf{R}^+} A_\varepsilon \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$.

(2) 类似可按(1) 证明的方法证明. 另外, 也可用德摩根公式证明如下: 由对任意 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, $A_{\varepsilon_1} \subset A_{\varepsilon_2}$, 可得到 $A_{\varepsilon_2}^c \subset A_{\varepsilon_1}^c$. 因此由(1)的证明得到 $\bigcup_{\varepsilon \in \mathbf{R}^+} A_\varepsilon^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}^c$. 再用

15. 证明: 所有系数为有理数的多项式组成一可数集.

证明

设 $\mathbb{Q}[x]$ 为所有有理系数多项式的集合。对任意非负整数 n , 记 $\mathbb{Q}_n[x]$ 为次数不超过 n 的有理系数多项式集合 (含零多项式), 则 $\mathbb{Q}[x] = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{Q}_n[x]$ 。

对固定的 n , $\mathbb{Q}_n[x]$ 中任一多项式 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ($a_i \in \mathbb{Q}$) 与 $(n+1)$ 元有理数组 $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ 一一对应。已知有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可数集, 其有限次笛卡尔积 $\mathbb{Q}^{n+1}$ 仍为可数集, 故 $\mathbb{Q}_n[x]$ 是可数集。

由于 $\mathbb{Q}[x]$ 是可数个可数集 $\{\mathbb{Q}_n[x]\}_{n=0}^{\infty}$ 的并集, 根据“可数个可数集的并集仍为可数集”的定理, 可得 $\mathbb{Q}[x]$ 是可数集。

第一章习题17.

证明: 增函数的不连续点最多只有可数多个.

证明 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上增函数. 记不连续点集为 E . 由数学分析知识可知:

(1) 对任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(x)$ 在 x 处的左、右极限 $f(x+0), f(x-0)$ 都存在.

(2) $x \in E$ 的充要条件是 $f(x-0) < f(x+0)$.

(3) 若 $x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$, 则

$$f(x_1-0) < f(x_1+0) \leq f(x_2-0) < f(x_2+0).$$

因此, $(f(x_1-0), f(x_1+0)) \cap (f(x_2-0), f(x_2+0)) = \emptyset$, 且

$$E \sim \{(f(x-0), f(x+0)) : x \in E\}.$$

由教材第一章 §4 例 1, 互不相交的开区间组成的集合, 至多是可数集, 从而 E 是至多可数集. □