

安徽大学 20 24 —20 25 学年第 2 学期

《实变函数》期末考试试题 B 卷参考答案及评分标准

一、 判断题（每小题 1 分，共 10 分）

1. $\checkmark$ 2. $\checkmark$ 3. $\times$ 4. $\times$ 5. $\times$ 6. $\checkmark$ 7. $\times$ 8. $\checkmark$ 9. $\times$ 10. $\checkmark$

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

11. C 12. C 13. B 14. A 15. D

二、 简答题（每小题 5 分，共 25 分）

16. 简述“开集”和“闭集”的定义（用内点、聚点描述）.

答：若集合 E 的每一个点都是 E 的内点，则称 E 为开集.

若集合 E 的每一个聚点都属于 E ，则称 E 为闭集. (5 分)

17. 设 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中任一点集，分别写出 E 的外测度和测度的定义.

答：集合 E 的外测度定义为

$$m^*E = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, I_i \text{ 是开区间}, i=1,2,\dots \right\}.$$

对于可测集 E ，其测度定义为 $mE = m^*E$ (5 分)

18. 设 E 是 $[0,1]$ 中的不可测集，函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \in E, \\ -x, & x \in [0,1] \setminus E. \end{cases}$ 试分析函数 $f(x)$ 与 $|f(x)|$ 在 $[0,1]$ 上的可测性.

答：若 $0 \in E$ ，则 $\{x \in [0,1] : f(x) \geq 0\} = E$ 是不可测集；若 $0 \notin E$ ，则 $\{x \in [0,1] : f(x) > 0\} = E$ 是不可测集，因此 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的不可测函数. 因为 $|f(x)| = x$ ，是 $[0,1]$ 上的连续函数，所以 $|f(x)|$ 是 $[0,1]$ 上的可测函数. (5 分)

19. 叙述关于积分序列极限的 Levi 定理.

答：设 $E \subset \mathbf{R}^n$ 为可测集， $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数列，对任意 $x \in E$ ， $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ ， $n=1,2,\dots$. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ ，则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx. \quad \dots (5 \text{ 分})$$

20. 简述 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的绝对连续函数的定义.

答: 设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的有限函数, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对于 $[a, b]$ 中互不相交的任意有限个开区间 $(a_i, b_i): i = 1, 2, \dots, n$, 只要 $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$, 就有 $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$, 则称 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的绝对连续函数. (5 分)

四、计算题 (每小题 5 分, 共 15 分)

21. 设 $\{E_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的可测集列, $mE_n = 1$ ($n = 1, 2, \dots$), 求 $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)$ 的值.

解: 对任意 n , $m([0, 1] \setminus E_n) = m([0, 1]) - m(E_n) = 0$, 因此

$$m([0, 1] \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} ([0, 1] \setminus E_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m([0, 1] \setminus E_n) = 0.$$

从而 $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m([0, 1]) - m([0, 1] \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = 1 - 0 = 1$ (5 分)

22. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^2(nx) dx$.

解: 令 $f_n(x) = \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^2(nx)$, 则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 进而在 $[0, 1]$ 上同时黎曼可积和勒贝格可积, 且积分值相等, 即

$$\int_0^1 \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^2(nx) dx = \int_{[0,1]} \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^2(nx) dx.$$

因为对任意 $x \in (0, 1]$,

$$|f_n(x)| = \left| \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^2(nx) \right| \leq \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{2nx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

令

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x \in (0, 1]; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

则 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上勒贝格可积, 且对任意 n , 都有 $|f_n(x)| \leq g(x), x \in [0, 1]$. 由勒贝格控制收敛定理得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^2(nx) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_n(x) dx = \int_{[0,1]} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_{[0,1]} 0 dx = 0. \dots\dots (5 \text{ 分})$$

23. 求积分 $\int_{[0,\infty)} f(x) dx$, 其中 $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \in [0,100) \setminus \mathbf{Q}, \\ 2, & \text{若 } x \in [100,200) \setminus \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

解: 令 $E_1 = [0,100) \setminus \mathbf{Q}$, $E_2 = [100,200) \setminus \mathbf{Q}$, $E_3 = [0,\infty) - E_1 \cup E_2$, 则集合 E_1, E_2, E_3 是可测集, 所以函数 $f(x)$ 是 $[0,\infty)$ 上的简单函数. 由简单函数积分的定义可得

$$\int_{[0,\infty)} f(x) dx = 1 \times mE_1 + 2 \times mE_2 + 0 \times mE_3 = 100 + 2 \times 100 = 200 \quad \dots\dots (5 \text{ 分})$$

五、证明题 (每小题 8 分, 共 40 分)

24. 证明: 集合 E 是闭集的充要条件是 $\bar{E} = E$.

证明: 必要性. 若 E 是闭集, 则 $E' \subset E$, 从而 $\bar{E} = E \cup E' \subset E$. 又恒有 $E \subset \bar{E}$, 因此 $\bar{E} = E$.

充分性. 若 $\bar{E} = E$, 则 $E' \subset \bar{E} = E$, 即 E 是闭集. \dots\dots (8 \text{ 分})

25. 设 E 是 $[0,1]$ 中的可测集, $mE = 1$. 证明: 对任意可测集 $A \subset [0,1]$, 都有 $m(E \cap A) = mA$.

证明: 由 $E \subset [0,1]$, $mE = 1$, 可得

$$m([0,1] \setminus E) = m([0,1]) - mE = 0.$$

又因为

$$[0,1] \setminus (E \cap A) = [0,1] \cap (E \cap A)^c = ([0,1] \setminus E) \cup ([0,1] \setminus A),$$

因此 $m([0,1] \setminus (E \cap A)) = m([0,1] \setminus A)$, 即 $1 - m(E \cap A) = 1 - mA$, 从而 $m(E \cap A) = mA$. \dots\dots (8 \text{ 分})

26. 设在可测集 E 上, 函数列 $\{f_n(x)\}$ 依测度收敛于 $f(x)$, 函数列 $\{g_n(x)\}$ 依测度收敛于 $g(x)$.

证明: 在 E 上, 函数列 $\{2f_n(x) + 3g_n(x)\}$ 依测度收敛于 $2f(x) + 3g(x)$.

证明: 因为对任意 ε , 由 $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$ 和 $|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{6}$ 可得

$$|(2f_n(x) + 3g_n(x)) - (2f(x) + 3g(x))| \leq 2|f_n(x) - f(x)| + 3|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

所以

$$E[|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}] \cap E[|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{6}] \subset E[|(2f_n(x) + 3g_n(x)) - (2f(x) + 3g(x))| < \varepsilon].$$

因此

$$E[|(2f_n(x) + 3g_n(x)) - (2f(x) + 3g(x))| \geq \varepsilon] \subset E[|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{4}] \cup E[|g_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{6}],$$

于是由测度的性质可得

$$mE[|(2f_n(x) + 3g_n(x)) - (2f(x) + 3g(x))| \geq \varepsilon] \leq mE[|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{4}] + mE[|g_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{6}].$$

由 $f_n(x) \Rightarrow f(x), g_n(x) \Rightarrow g(x)$ 知,

$$mE[|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{4}] \rightarrow 0, \quad mE[|g_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{6}] \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty).$$

进而有,

$$mE[|(2f_n(x) + 3g_n(x)) - (2f(x) + 3g(x))| \geq \varepsilon] \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty).$$

所以, $2f_n(x) + 3g_n(x)$ 依测度收敛于 $2f(x) + 3g(x)$ (8 分)

27. 设 $mE < \infty$, $f(x)$ 是 E 上 a. e. 有限的可测函数, 证明: 对任意 $\delta > 0$, 存在可测子集 $E_\delta \subset E$ 以及常数 $M > 0$, 使得 $m(E \setminus E_\delta) < \delta$, 且对任意 $x \in E_\delta$, 都有 $|f(x)| \leq M$.

证明: 由题意, $m(E[|f| = \infty]) = 0$. 又

$$E[|f| < \infty] = \bigcup_{k=1}^{\infty} E[|f| \leq k].$$

由于 $mE < \infty$, 以及 $E[|f| \leq k] \subset E[|f| \leq k+1]$, 所以

$$mE[|f| < \infty] = \lim_{k \rightarrow \infty} mE[|f| \leq k].$$

于是对任意 $\delta > 0$, 存在正整数 N , 对任意 $k \geq N$,

$$mE[|f| < \infty] < mE[|f| \leq k] + \delta.$$

取 $E_\delta = E[|f| \leq N]$, $M = N$, 则对任意 $x \in E_\delta$, $|f(x)| \leq M$, 而

$$E \setminus E_\delta \subset E[|f| = \infty] \cup (E[|f| < \infty] \setminus E[|f| \leq N]),$$

因此,

$$m(E \setminus E_\delta) \leq mE[|f| = \infty] + m(E[|f| < \infty] \setminus E[|f| \leq N]) < \delta. \quad \text{..... (8 分)}$$

28. 设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数, $g(x)$ 是 E 上的非负勒贝格可积函数, 且 $|f(x)| \leq g(x)$ a. e. 于 E , 证明: $f(x)$ 在 E 上勒贝格可积且 $\left| \int_E f(x) dx \right| \leq \int_E |f(x)| dx \leq \int_E g(x) dx$.

证明: 由于

$$0 \leq f^+(x) \leq g(x), 0 \leq f^-(x) \leq g(x),$$

由于 $g(x)$ 在 E 上可积, 所以 $f^+(x), f^-(x)$ 在 E 上都可积, 且

$$\int_E f^+(x) dx \leq \int_E g(x) dx < \infty, \int_E f^-(x) dx \leq \int_E g(x) dx < \infty.$$

因此, $f(x)$ 在 E 上勒贝格可积, 且

$$\begin{aligned} \left| \int_E f(x) dx \right| &= \left| \int_E f^+(x) dx - \int_E f^-(x) dx \right| \leq \int_E f^+(x) dx + \int_E f^-(x) dx \\ &= \int_E |f(x)| dx \leq \int_E g(x) dx. \end{aligned} \quad \text{..... (8 分)}$$