

学号
姓名
专业
年级
院/系

安徽大学 2024—2025 学年第 2 学期

《实变函数》考试试卷 (B 卷)

(闭卷 满分 100 分 时间 120 分钟)

考场登记表序号_____

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
阅卷人						

一、判断题 (每小题 1 分, 共 10 分)

得分	
----	--

- R^n 中单点集的测度为 0. ()
- 定义在开集上的连续函数是可测函数. ()
- $\bigcap_{n=1}^{\infty} [0, 1 + \frac{1}{n}) = [0, 1)$. ()
- 点集 E 的开核是 E 的所有聚点的集合. ()
- 设 $\{E_n\}$ 是一列可测集, 且 $E_{n+1} \subset E_n, n = 1, 2, \dots$, 则 $m(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n)$. ()
- 若 $f(x)$ 是可测集 E 上 a. e. 有限的可测函数, 则对任意 $\delta > 0$, 存在闭集 $F_\delta \subset E, m(E - F_\delta) < \delta$, $f(x)$ 在 F_δ 上连续. ()
- 集合 A 是无限集当且仅当 A 与它的某个子集对等. ()
- 若 $f(x)$ 在 E 上可测, 则存在可测简单函数列 $\varphi_k(x)$, 使得对任意 $x \in E$, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = f(x)$. ()
- 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数, 若 $\int_E f(x) dx = 0$, 则 $f(x) = 0$ a. e. 于 $x \in E$. ()
- 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调增函数, 则 $f(x)$ 的不连续点最多只有可数多个. ()

二、选择题 (每小题 2 分, 共 10 分)

得分	
----	--

- 下列集合中不是连续基数集的是 ()
A. 区间 $[a, b]$ B. 区间 $[a, \infty)$ C. 有理数全体 D. $\mathbf{R}^n$
- 设点 P_0 是集合 E 的聚点, 下列表述中不正确的是 ()
A. $\forall U(P_0)$ 含有 E 中无穷多个点. B. $\forall U(P_0)$ 中至少含有一个 E 中异于 P_0 的点.
C. $\exists U(P_0)$, 其中除 P_0 外不含 E 中任何点. D. E 中存在互异的收敛于 P_0 的点列 $\{P_n\}$

13. 下面关于 Cantor 三分集的说法不正确的是 ()

- A. 是连续基数集 B. 是开集 C. 是零测集 D. 是不可数集

14. 设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的可积函数, 则 ()

- A. $|f(x)|$ 可积 B. $f(x)$ 在 E 上连续 C. $|f(x)| < +\infty$ D. $\int_E f(x)dx = 0$

15. 设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 则下列选项不正确的是 ()

- A. $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的有界函数 B. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上几乎处处存在导数
C. $f(x)$ 可表示为两个增函数之差 D. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续

三、简答题 (每小题 5 分, 共 25 分)

得分	
----	--

16. 简述“开集”和“闭集”的定义 (用内点、聚点描述) .

17. 设 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中任一点集, 分别写出 E 的外测度和测度的定义.

18. 设 E 是 $[0,1]$ 中的不可测集, 函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \in E, \\ -x, & x \in [0,1] \setminus E. \end{cases}$ 试分析函数 $f(x)$ 与 $|f(x)|$ 在 $[0,1]$ 上的可测性.

19. 叙述关于积分序列极限的 Levi 定理.

20. 简述 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的绝对连续函数的定义.

四、计算题（每小题 5 分，共 15 分）

得分	
----	--

21. 设 $\{E_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的可测集列, $mE_n = 1$ ($n = 1, 2, \dots$), 求 $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)$ 的值.

22. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^2(nx) dx$.

23. 求积分 $\int_{[0, \infty)} f(x) dx$, 其中 $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \in [0, 100) \setminus \mathbf{Q}, \\ 2, & \text{若 } x \in [100, 200) \setminus \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

五、证明题（每小题 8 分，共 40 分）

得分	
----	--

24. 证明：集合 E 是闭集的充要条件是 $\bar{E} = E$.

25. 设 E 是 $[0,1]$ 中的可测集， $mE=1$. 证明：对任意可测集 $A \subset [0,1]$ ，都有 $m(E \cap A) = mA$.

26. 设在可测集 E 上，函数列 $\{f_n(x)\}$ 依测度收敛于 $f(x)$ ，函数列 $\{g_n(x)\}$ 依测度收敛于 $g(x)$.
证明：在 E 上，函数列 $\{2f_n(x)+3g_n(x)\}$ 依测度收敛于 $2f(x)+3g(x)$.

27. 设 $mE < \infty$, $f(x)$ 是 E 上 a. e. 有限的可测函数, 证明: 对任意 $\delta > 0$, 存在可测子集 $E_\delta \subset E$ 以及常数 $M > 0$, 使得 $m(E \setminus E_\delta) < \delta$, 且对任意 $x \in E_\delta$, 都有 $|f(x)| \leq M$.

28. 设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数, $g(x)$ 是 E 上的非负勒贝格可积函数, 且 $|f(x)| \leq g(x)$ a. e. 于 E , 证明: $f(x)$ 在 E 上勒贝格可积且 $\left| \int_E f(x) dx \right| \leq \int_E |f(x)| dx \leq \int_E g(x) dx$.