

《 实变函数 》 期末考试试题 A 卷参考答案及评分标准

一、 判断题（每小题 1 分，共 10 分）

1. $\times$ 2. $\checkmark$ 3. $\times$ 4. $\checkmark$ 5. $\checkmark$ 6. $\checkmark$ 7. $\times$ 8. $\checkmark$ 9. $\times$ 10. $\checkmark$

二、 选择题（每小题 2 分，共 10 分）

11. D 12. C 13. A 14. B 15. C

二、 简答题（每小题 5 分，共 25 分）

16. 简述“内点”的定义，并判断点 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 是否为集合

$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ 的内点，说明判断依据.

答：设点 $P \in \mathbf{R}^n$ ，集合 $E \subset \mathbf{R}^n$ ，如果存在 P 的某一邻域 $U(P) \subset E$ ，则称点 P 为集合 E 的内点.

点 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 不是集合 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ 的内点，因为在点 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 的任意邻域中总包含不属于集合 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ 的点. (5 分)

17. 设集合 $E \subset \mathbf{R}^n$ ，写出集合 E 是可测集的定义.

答：如果对任意点集 $T \subset \mathbf{R}^n$ ，都有 $m^*T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$ ，则称 E 是可测集. (5 分)

18. 简述可测集 E 上的实函数 $f(x)$ 是可测函数的定义.

答：如果对于任何有限实数 a ， $E[f > a]$ 都是可测集，则称 $f(x)$ 是定义在 E 上的可测函数.

..... (5 分)

19. 叙述关于积分序列极限的 Fatou 引理.

答：设 $E \subset \mathbf{R}^n$ 为可测集， $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数列，则

$$\int_E \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx. \quad \text{..... (5 分)}$$

20. 简述 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数的定义.

答：设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的有限函数，如果对于 $[a, b]$ 的一切分划 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ，使

$\left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \right\}$ 成一有界数集，则称 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数. (5 分)

四、计算题（每小题 5 分，共 15 分）

21. 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可数点集，求 E 的外测度.

解：设 $E = \{x_i : i = 1, 2, \dots\}$. 因为对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在开区间 I_i ，使得 $x \in I_i$ ，且 $|I_i| = \frac{\varepsilon}{2^i}$. 故 $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ 且 $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| = \varepsilon$ ，进而 $m^* E \leq \varepsilon$. 由 ε 的任意性， $m^* E \leq 0$. 又由于 $m^* E \geq 0$ ，所以 $m^* E = 0$ (5 分)

22. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx^{\frac{3}{2}}}{1+n^2x^2} \cos(nx) dx$.

解：令 $f_n(x) = \frac{nx^{\frac{3}{2}}}{1+n^2x^2} \cos(nx)$ ，则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上连续，进而在 $[0, 1]$ 同时黎曼可积和勒贝格可积，且

$$\int_0^1 \frac{nx^{\frac{3}{2}}}{1+n^2x^2} \cos(nx) dx = \int_{[0,1]} \frac{nx^{\frac{3}{2}}}{1+n^2x^2} \cos(nx) dx,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^{\frac{3}{2}}}{1+n^2x^2} \cos(nx) = 0.$$

又

$$|f_n(x)| = \left| \frac{nx^{\frac{3}{2}}}{1+n^2x^2} \cos(nx) \right| \leq \frac{nx^{\frac{3}{2}}}{2nx} = \frac{\sqrt{x}}{2}, x \in [0, 1],$$

而函数 $\frac{\sqrt{x}}{2}$ 在 $[0, 1]$ 上勒贝格可积，由勒贝格控制收敛定理得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx^{\frac{3}{2}}}{1+n^2x^2} \cos(nx) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_n(x) dx = \int_{[0,1]} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_{[0,1]} 0 dx = 0. \dots\dots (5 \text{ 分})$$

23. 设函数 $f(x)$ 定义在 $[0, \infty)$ 上， $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \in [0, 2025) \setminus \mathbf{Q}, \\ 2, & \text{若 } x \in [2025, 2050) \setminus \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 求 $\int_{[0, \infty)} f(x) dx$.

解：令 $E_1 = [0, 2025) \setminus \mathbf{Q}$, $E_2 = [2025, 2050) \setminus \mathbf{Q}$, $E_3 = [0, \infty) - E_1 \cup E_2$ ，则集合 E_1, E_2, E_3 是可测集，所以函数 $f(x)$ 是 $[0, \infty)$ 上的简单函数. 由简单函数积分的定义可得

$$\int_{[0, \infty)} f(x) dx = 1 \times mE_1 + 2 \times mE_2 + 0 \times mE_3 = 2025 + 2 \times 25 = 2075. \dots\dots (5 \text{ 分})$$

五、证明题（每小题 8 分，共 40 分）

24. 证明：任意多个开集的并是开集。

证明：设 $G_\alpha, \alpha \in I$ 为一族开集，令 $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ 。

任取 $x \in G$ ，则存在 $\alpha_0 \in I$ 使 $x \in G_{\alpha_0}$ ，故 x 是 G_{α_0} 的内点。

由内点定义知 x 也是 G 的内点，因此 G 为开集。

……(8 分)

25. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ ，存在可测集列 $\{A_n\}, \{B_n\}$ ，使得 $A_n \subset E \subset B_n$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} m(B_n - A_n) = 0$ ，证明： E 是可测集。

证明：令 $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ ，则 B 可测且 $B \subset B_n$ 。对任意 n ，有 $B - E \subset B_n - E$ ，从而 $m^*(B - E) \leq m^*(B_n - E)$ 。

又由 $A_n \subset E \subset B_n$ 可得 $B_n - E \subset B_n - A_n$ ，进而可得。

$$m^*(B - E) \leq m^*(B_n - A_n) = m(B_n - A_n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

所以 $m^*(B - E) = 0$ ， $B - E$ 是可测集。又由于 B 是可测，所以 $E = B - (B - E)$ 是可测集合。
……(8 分)

26. 设在可测集 E 上，函数列 $\{f_n(x)\}$ 依测度收敛于 $f(x)$ ，函数列 $\{g_n(x)\}$ 依测度收敛于 $g(x)$ 。

证明：在 E 上，函数列 $f_n(x) + g_n(x)$ 依测度收敛于 $f(x) + g(x)$ 。

证明：对任意 ε ，由 $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ 和 $|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ 可得

$$|f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

故有 $E[|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}] \cap E[|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}] \subset E[|f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)| < \varepsilon]$ 。

从而有 $E[|f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)| \geq \varepsilon] \subset E[|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}] \cup E[|g_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}]$ ，

可得 $mE[|f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)| \geq \varepsilon] \leq mE[|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}] + mE[|g_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}]$ 。

由 $f_n(x) \Rightarrow f(x), g_n(x) \Rightarrow g(x)$ 知，

$$mE[|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}] \rightarrow 0, \quad mE[|g_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

进而有， $mE[|f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)| \geq \varepsilon] \rightarrow 0$ 。

所以， $f_n(x) + g_n(x)$ 依测度收敛于 $f(x) + g(x)$ 。

……(8 分)

27. 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在可测集 E 上“基本上”一致收敛于 $f(x)$ ，证明： $\{f_n(x)\}$ 在 E 上几乎

处处收敛于 $f(x)$.

证明：由“基本上”一致收敛的定义得, $\forall \delta = \frac{1}{n} > 0, \exists$ 可测集 $E_n \subset E$, 使 $m(E - E_n) < \frac{1}{n}$, 且在 E_n 上 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$, 从而在 E_n 上 $f_n(x)$ 点点收敛于 $f(x)$. 令 $E_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 则在 E_0 上, $f_n(x)$ 点点收敛于 $f(x)$.

$$m(E - E_0) = m(E - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = m(\bigcap_{n=1}^{\infty} (E - E_n)) \leq m(E - E_n) < \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

故 $m(E - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$, 所以 $f_n(x)$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$ (8 分)

28. 设 $E \subset \mathbf{R}^n$ 为可测集, $f(x)$ 在 E 上可积, 证明: $|f(x)| < \infty$ a. e. 于 E .

证明：由 $f(x)$ 在 E 上可积知, $f^+(x), f^-(x)$ 在 E 上都可积. 因 $f^+(x), f^-(x)$ 均非负, 由非负可测函数的积分性质得 (注意: 写出非负可测函数积分性质的证明过程, 也是正确的)

$$f^+(x) < \infty, f^-(x) < \infty \quad \text{a. e. 于 } E.$$

由 $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ 即得 $|f(x)| < \infty$ a. e. 于 E (8 分)