

安徽大学 2024—2025 学年第 2 学期

《实变函数》 考试试卷 (A 卷)

(闭/开卷 满分 100 分 时间 120 分钟)

考场登记表序号_____

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
阅卷人						

一、判断题 (每小题 1 分, 共 10 分)

得分

- 若集列 $A_n = \left\{x: -1 + \frac{1}{n} \leq x \leq 1 + \frac{1}{n}\right\}, n = 1, 2, \dots$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [-1, 1]$. ()
- 两个非空集合 A, B , 若 A 对等于 B 的子集且 B 对等于 A 的子集, 则 A 对等于 B . ()
- 点集 E 的导集是 E 的所有内点的集合. ()
- 任何集合都有外测度. ()
- 设 $\{E_n\}$ 是一列可测集, 且 $E_n \subset E_{n+1}, n = 1, 2, \dots$, 则 $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} mE_n$. ()
- 定义在闭集上的连续函数是可测函数. ()
- 设 $f(x)$ 是可测集 E 上 a. e. 有限的可测函数, 则存在 F_σ 型集 $F \subset E$, 使得 $m(E - F) = 0$ 且 $f(x)$ 在 F 上连续. ()
- 若 $f(x)$ 在 E 上非负可测, 则存在简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$, 使得对任意 $x \in E$, $\varphi_k(x) \leq \varphi_{k+1}(x), k = 1, 2, \dots$, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = f(x)$. ()
- 若 Riemann 广义积分 $\int_a^\infty f(x)dx$ 收敛, 则实函数 $f(x)$ 在 $[a, \infty)$ 上 Lebesgue 可积. ()
- 设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的绝对连续函数, 则 $\int_{[a, b]} f'(x)dx = f(b) - f(a)$. ()

二、选择题 (每小题 2 分, 共 10 分)

得分

- 下面几个集合中与区间 $(0, 1)$ 不对等的是 ()
A. $[0, 1]$ B. $[0, 1)$ C. $(-\infty, \infty)$ D. $\{0, 1\}$
- 下面表述中不是聚点 P_0 的等价定义的是 ()
A. $\forall U(P_0)$ 含有 E 中无穷多个点 B. $\forall U(P_0)$ 中至少含有一个 E 中异于 P_0 的点
C. $\exists U(P_0)$, 其中除 P_0 外不含 E 中任何点 D. E 中存在互异的收敛于 P_0 的点列 $\{P_n\}$
- 下面关于 Cantor 三分集的说法不正确的是 ()
A. Cantor 三分集是可数集 B. Cantor 三分集是完备集

C. Cantor 三分集是可测集 D. Cantor 三分集是连续基数集

14. 设 $f(x)$ 在可测集 E 上可积, 则下列选项不正确的是 ()

- A. $\int_E f^+(x)dx < \infty, \int_E f^-(x)dx < \infty$ B. $\int_E f(x)dx = \int_E f^+(x)dx + \int_E f^-(x)dx$
C. $|f(x)|$ 在 E 上可积 D. $\left| \int_E f(x)dx \right| < \infty$

15. 设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的绝对连续函数, 则下列选项不正确的是 ()

- A. $f(x)$ 是一个可积函数的不定积分 B. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续
C. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不一定是有限变差函数 D. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上几乎处处存在导数

三、简答题 (每小题 5 分, 共 25 分)

得分	
----	--

16. 简述“内点”的定义, 并判断点 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 是否为集合

$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ 的内点, 说明判断依据.

17. 设集合 $E \subset \mathbf{R}^n$, 写出集合 E 是可测集的定义.

18. 简述可测集 E 上的实函数 $f(x)$ 是可测函数的定义.

19. 叙述关于积分序列极限的 Fatou 引理.

20. 简述 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的有限变差函数的定义.

四、计算题 (每小题 5 分, 共 15 分)

得分	
----	--

21. 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可数点集, 求 E 的外测度.

22. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx^{\frac{3}{2}}}{1+n^2x^2} \cos(nx) dx$.

23. 设函数 $f(x)$ 定义在 $[0, \infty)$ 上, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \in [0, 2025) \setminus \mathbf{Q}, \\ 2, & \text{若 } x \in [2025, 2050) \setminus \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 求 $\int_{[0, \infty)} f(x) dx$.

五、证明题 (每小题 8 分, 共 40 分)

得分	
----	--

24. 证明: 任意多个开集的并是开集.

25. 设 $E \subset \mathbf{R}^n$, 存在可测集列 $\{A_n\}, \{B_n\}$, 使得 $A_n \subset E \subset B_n$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} m(B_n - A_n) = 0$, 证明: E 是可测集.

26. 设在可测集 E 上, 函数列 $\{f_n(x)\}$ 依测度收敛于 $f(x)$, 函数列 $\{g_n(x)\}$ 依测度收敛于 $g(x)$. 证明: 在 E 上, 函数列 $f_n(x) + g_n(x)$ 依测度收敛于 $f(x) + g(x)$.

27. 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在可测集 E 上“基本上”一致收敛于 $f(x)$, 证明: $\{f_n(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

28. 设 $E \subset \mathbf{R}^n$ 为可测集, $f(x)$ 在 E 上可积, 证明: $|f(x)| < \infty$ a. e. 于 E .