

高等数学（下）期末考试

参考答案与详细解析

一、填空题

第1题

设 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{\partial}{\partial x} \int_{\cos y}^{\sin x} f(t) dt = \underline{\hspace{1cm}}$, $\frac{\partial}{\partial y} \int_{\cos y}^{\sin x} f(t) dt = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

【答案】

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\cos y}^{\sin x} f(t) dt = f(\sin x) \cdot \cos x$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{\cos y}^{\sin x} f(t) dt = f(\cos y) \cdot \sin y$$

【详细解题步骤】

本题使用变上限积分的求导公式 (Leibniz 公式) :

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt = f(b(x)) \cdot b'(x) - f(a(x)) \cdot a'(x)$$

第一步: 对 x 求偏导

将 y 视为常数, 积分上限为 $b(x) = \sin x$, 下限为 $a(x) = \cos y$ (与 x 无关, 故 $a'(x) = 0$) :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\cos y}^{\sin x} f(t) dt = f(\sin x) \cdot (\sin x)' - f(\cos y) \cdot 0 = f(\sin x) \cdot \cos x$$

第二步: 对 y 求偏导

将 x 视为常数, 积分上限为 $b(y) = \sin x$ (与 y 无关, 故 $b'(y) = 0$), 下限为 $a(y) = \cos y$:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{\cos y}^{\sin x} f(t) dt = f(\sin x) \cdot 0 - f(\cos y) \cdot (\cos y)' = -f(\cos y) \cdot (-\sin y) = f(\cos y) \cdot \sin y$$

【知识点】变上限积分求导 (Leibniz 公式); 多元函数偏导数; 复合函数求导链式法则

第2题

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^q n}$ ($q > 0$), 当 q 满足 $\underline{\hspace{1cm}}$ 时该级数收敛, 当 q 满足 $\underline{\hspace{1cm}}$ 时该级数发散。

【答案】

当 $q > 1$ 时该级数收敛; 当 $0 < q \leq 1$ 时该级数发散。

【详细解题步骤】

使用积分判别法。设 $f(x) = \frac{1}{x \ln^q x}$, $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上连续、正值、单调递减。

第一步：计算反常积分

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^q x} dx$$

令 $u = \ln x$, 则 $du = \frac{1}{x} dx$, 当 $x = 2$ 时 $u = \ln 2$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $u \rightarrow +\infty$:

$$\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{u^q} du = \int_{\ln 2}^{+\infty} u^{-q} du$$

第二步：分情况讨论

• 当 $q \neq 1$ 时:

$$\int_{\ln 2}^{+\infty} u^{-q} du = \left[\frac{u^{1-q}}{1-q} \right]_{\ln 2}^{+\infty}$$

- 若 $q > 1$: $1 - q < 0$, $u^{1-q} \rightarrow 0$ ($u \rightarrow +\infty$), 积分收敛

- 若 $0 < q < 1$: $1 - q > 0$, $u^{1-q} \rightarrow +\infty$, 积分发散

• 当 $q = 1$ 时:

$$\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{u} du = [\ln u]_{\ln 2}^{+\infty} = +\infty \quad (\text{发散})$$

第三步：由积分判别法得出结论

积分与级数同敛散, 故 $q > 1$ 时级数收敛, $0 < q \leq 1$ 时级数发散。

【知识点】正项级数敛散性判别; 积分判别法; p -级数 ($\sum \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 收敛, $p \leq 1$ 发散)

第3题

将 $\sqrt{1+x}$ 展开成 x 的幂级数为 $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots$, 收敛域是

_____。

【答案】 $[-1, 1]$

【详细解题步骤】

利用二项式展开公式 (Newton 广义二项式定理):

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad |x| < 1$$

其中 $\alpha = \frac{1}{2}$ 。

第一步：求收敛半径

由比值判别法，收敛半径 $R = 1$ ，即在 $(-1, 1)$ 内绝对收敛。

第二步：检验端点 $x = 1$

级数变为 $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n}$ 。当 $n \geq 2$ 时， $\binom{1/2}{n}$ 的符号交替变化 $((-1)^{n-1})$ ，且 $\left| \binom{1/2}{n} \right| \sim \frac{C}{n^{3/2}}$ ($n \rightarrow \infty$)，由 p -级数判别法 ($p = 3/2 > 1$)，级数绝对收敛。

第三步：检验端点 $x = -1$

级数变为 $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^n$ 。由于 $\binom{1/2}{n} (-1)^n$ 当 $n \geq 1$ 时全部为非负项，且 $\sim \frac{C}{n^{3/2}}$ ，同样收敛。

结论

两个端点均收敛，故收敛域为 $[-1, 1]$ 。

【知识点】函数的幂级数展开；Newton 广义二项式定理；收敛半径与收敛域；端点敛散性检验

二、选择题

第1题

设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则二重积分 $\iint_D \ln(x^2 + y^2) d\sigma$ _____。

- A. ≥ 0
 B. ≤ 0 ✓
 C. $= 0$
 D. 不一定存在

【答案】B

【详细解析】

分析被积函数的符号

在区域 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ 内 (除去原点), 有 $0 < x^2 + y^2 \leq 1$ 。

由于 $\ln t \leq 0$ 当 $0 < t \leq 1$, 所以在 D 内 (除原点外):

$$\ln(x^2 + y^2) \leq 0$$

判断积分的存在性

虽然在原点处 $\ln(x^2 + y^2) \rightarrow -\infty$, 但这是可积瑕点。用极坐标验证:

$$\iint_D \ln(x^2 + y^2) d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \ln(r^2) \cdot r dr d\theta = 2\pi \int_0^1 2r \ln r dr$$

计算 $\int_0^1 r \ln r dr$: 令 $u = \ln r$, $dv = r dr$, 分部积分得

$$\int_0^1 r \ln r dr = \left[\frac{r^2}{2} \ln r \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{r}{2} dr = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

所以积分 $= 2\pi \times 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\pi < 0$ 。

结论

被积函数在 D 内几乎处处 ≤ 0 , 积分存在且值为 $-\pi < 0$, 故选 B. ≤ 0 。

【知识点】二重积分的性质 (保号性); 对数函数的符号; 极坐标下的二重积分; 瑕积分

第2题

设 $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2 + y^4}}$, 则_____。

- A. $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$ 都存在
 B. $f'_x(0, 0)$ 不存在, $f'_y(0, 0)$ 存在 ✓
 C. $f'_x(0, 0)$ 存在, $f'_y(0, 0)$ 不存在
 D. $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$ 都不存在

【答案】B

【详细解析】

使用偏导数的定义（极限法）来判断。

第一步：计算 $f'_x(0,0)$

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{(\Delta x)^2}} - e^0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{|\Delta x|} - 1}{\Delta x}$$

分别计算左右极限：

- 右极限 ($\Delta x \rightarrow 0^+$) : $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \rightarrow 1$
- 左极限 ($\Delta x \rightarrow 0^-$) : $\frac{e^{-\Delta x} - 1}{\Delta x} \rightarrow -1$

左右极限不相等，故 $f'_x(0,0)$ 不存在。

第二步：计算 $f'_y(0,0)$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{(\Delta y)^4}} - 1}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{e^{(\Delta y)^2} - 1}{\Delta y}$$

利用等价无穷小 $e^u - 1 \sim u$ ($u \rightarrow 0$) :

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(\Delta y)^2}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

故 $f'_y(0,0) = 0$ ，存在。

关键分析

f'_x 不存在的原因是 $\sqrt{x^2} = |x|$ 在 $x = 0$ 处不可导（绝对值函数的尖点）；而 f'_y 存在是因为 $\sqrt{y^4} = y^2$ 在 $y = 0$ 处光滑可导。

【知识点】偏导数的定义（极限法）；绝对值函数的不可导性；等价无穷小替换；多元函数偏导数存在性的判断

三、计算题

第3题

求心形线 $r = a(1 - \cos \theta)$ 以内, 圆 $r = a$ 以外部分的面积。

【答案】 $S = a^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \right)$

【详细解题步骤】

第一步：求两曲线的交点

令 $a(1 - \cos \theta) = a$, 得 $1 - \cos \theta = 1$, 即 $\cos \theta = 0$ 。

解得 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 或 $\theta = -\frac{\pi}{2}$ (即 $\theta = \frac{3\pi}{2}$)。

第二步：确定积分区域

心形线 $r = a(1 - \cos \theta)$ 在圆 $r = a$ 以外的部分, 即 $a(1 - \cos \theta) > a$, 也就是 $\cos \theta < 0$ 。

这对应 $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$, 即 $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ 的补集...

实际上, 心形线在 $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$ 时 $r > a$ (在圆外)。

所求区域为: $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$, r 从 a 到 $a(1 - \cos \theta)$ 。

第三步：利用对称性简化

心形线关于 x 轴对称, 只需计算上半部分再乘以 2:

$$S = 2 \times \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} [(a(1 - \cos \theta))^2 - a^2] d\theta = \int_{\pi/2}^{\pi} [a^2(1 - \cos \theta)^2 - a^2] d\theta$$

第四步：展开被积函数

$$a^2(1 - \cos \theta)^2 - a^2 = a^2(1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta - 1) = a^2(\cos^2 \theta - 2\cos \theta)$$

利用 $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$:

$$= a^2 \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} - 2\cos \theta \right) = a^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} - 2\cos \theta \right)$$

第五步：逐项积分

$$S = a^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} - 2\cos \theta \right) d\theta$$

$$= a^2 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} - 2\sin \theta \right]_{\pi/2}^{\pi}$$

代入上限 $\theta = \pi$:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2\pi}{4} - 2 \sin \pi = \frac{\pi}{2} + 0 - 0 = \frac{\pi}{2}$$

代入下限 $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\sin \pi}{4} - 2 \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + 0 - 2 = \frac{\pi}{4} - 2$$

$$S = a^2 \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - 2 \right) \right] = a^2 \left(\frac{\pi}{4} + 2 \right)$$

等等，让我重新核对。上半部分 $\theta \in [\pi/2, \pi]$ ，下半部分 $\theta \in [\pi, 3\pi/2]$ ，由对称性：

$$S = 2 \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2} [a^2(1 - \cos \theta)^2 - a^2] d\theta = a^2 \int_{\pi/2}^{\pi} (\cos^2 \theta - 2 \cos \theta) d\theta$$

$$= a^2 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} - 2 \sin \theta \right]_{\pi/2}^{\pi} = a^2 \left[\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0 \right) - \left(\frac{\pi}{4} + 0 - 2 \right) \right]$$

$$= a^2 \left(\frac{\pi}{4} + 2 \right)$$

再核对：实际上应该直接对整个区间 $[\pi/2, 3\pi/2]$ 积分（不利用对称性）：

$$S = \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} [a^2(1 - \cos \theta)^2 - a^2] d\theta = \frac{a^2}{2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\cos^2 \theta - 2 \cos \theta) d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} - 2 \sin \theta \right]_{\pi/2}^{3\pi/2}$$

$$\text{上限 } \theta = 3\pi/2: \frac{3\pi}{4} + \frac{\sin 3\pi}{4} - 2 \sin \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} + 0 + 2$$

$$\text{下限 } \theta = \pi/2: \frac{\pi}{4} + 0 - 2$$

$$S = \frac{a^2}{2} \left[\left(\frac{3\pi}{4} + 2 \right) - \left(\frac{\pi}{4} - 2 \right) \right] = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} + 4 \right) = a^2 \left(\frac{\pi}{4} + 2 \right)$$

两种方法结果一致，最终答案：

$$\boxed{S = a^2 \left(\frac{\pi}{4} + 2 \right)}$$

【知识点】极坐标下的面积公式 $S = \frac{1}{2} \int r^2 d\theta$ ；心形线与圆的交点求解；利用对称性简化积分；三角恒等式 $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$

四、综合题

第3题

计算二重积分 $I = \iint_D |x^2 + y^2 - 4| dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$ 。

【答案】 $I = \frac{9\pi}{2}$

【详细解题步骤】

第一步：分析绝对值，划分积分区域

被积函数含绝对值 $|x^2 + y^2 - 4|$ ，需要分区域讨论：

- 当 $x^2 + y^2 \leq 4$ 时（圆 $r \leq 2$ 内）： $|x^2 + y^2 - 4| = 4 - (x^2 + y^2)$
- 当 $4 < x^2 + y^2 \leq 9$ 时（圆环 $2 < r \leq 3$ ）： $|x^2 + y^2 - 4| = x^2 + y^2 - 4$

因此将 D 分为两个子区域：

$$D_1 : x^2 + y^2 \leq 4 \quad (r \leq 2), \quad D_2 : 4 < x^2 + y^2 \leq 9 \quad (2 < r \leq 3)$$

第二步：转换为极坐标

令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $dx dy = r dr d\theta$ ：

$$I = \iint_{D_1} (4 - r^2) r dr d\theta + \iint_{D_2} (r^2 - 4) r dr d\theta$$

第三步：计算 I_1 (D_1 上的积分)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r dr d\theta = 2\pi \int_0^2 (4r - r^3) dr \\ &= 2\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 2\pi (8 - 4) = 2\pi \times 4 = 8\pi \end{aligned}$$

第四步：计算 I_2 (D_2 上的积分)

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{2\pi} \int_2^3 (r^2 - 4) r dr d\theta = 2\pi \int_2^3 (r^3 - 4r) dr \\ &= 2\pi \left[\frac{r^4}{4} - 2r^2 \right]_2^3 = 2\pi \left[\left(\frac{81}{4} - 18 \right) - (4 - 8) \right] \\ &= 2\pi \left[\frac{81}{4} - 18 + 4 \right] = 2\pi \left[\frac{81}{4} - 14 \right] = 2\pi \left[\frac{81 - 56}{4} \right] = 2\pi \times \frac{25}{4} = \frac{25\pi}{2} \end{aligned}$$

第五步：合并结果

$$I = I_1 + I_2 = 8\pi + \frac{25\pi}{2} = \frac{16\pi + 25\pi}{2} = \frac{41\pi}{2}$$

等等，让我重新计算 I_1 ：

$$I_1 = 2\pi \int_0^2 (4r - r^3) dr = 2\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 2\pi \left(2 \times 4 - \frac{16}{4} \right) = 2\pi(8 - 4) = 8\pi$$

这步没错。再算 I_2 ：

$$\left[\frac{r^4}{4} - 2r^2 \right]_2^3 = \left(\frac{81}{4} - 18 \right) - \left(\frac{16}{4} - 8 \right) = \left(\frac{81}{4} - \frac{72}{4} \right) - (4 - 8) = \frac{9}{4} - (-4) = \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4}$$

$$I_2 = 2\pi \times \frac{25}{4} = \frac{25\pi}{2}$$

$$I = 8\pi + \frac{25\pi}{2} = \frac{16\pi + 25\pi}{2} = \frac{41\pi}{2}$$

嗯，让我再仔细检查。实际上 I_1 中被积函数是 $4 - r^2$ ，在 $r \in [0, 2]$ 上非负，积分应为正。 I_2 中被积函数是 $r^2 - 4$ ，在 $r \in [2, 3]$ 上非负，积分也应为正。两个正数相加。

重新核算 I_1 ： $\int_0^2 (4r - r^3) dr = [2r^2 - r^4/4]_0^2 = 8 - 4 = 4$ ， $I_1 = 2\pi \times 4 = 8\pi$ ✓

重新核算 I_2 ：

$$\int_2^3 (r^3 - 4r) dr = [r^4/4 - 2r^2]_2^3 = (81/4 - 18) - (4 - 8) = 81/4 - 18 + 4 = 81/4 - 14 = (81 - 56)/4 = 25/4,$$

$$I_2 = 2\pi \times 25/4 = 25\pi/2 \quad \checkmark$$

最终答案：

$$I = 8\pi + \frac{25\pi}{2} = \frac{41\pi}{2}$$

【知识点】含绝对值的二重积分；区域划分法；极坐标变换；圆域与圆环域上的积分计算

五、应用题（本题 10 分）

求函数 $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ 的极值。

【答案】函数在点 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ 处取得极小值 $f\left(\frac{1}{2}, -1\right) = -\frac{e}{2}$ 。

【详细解题步骤】

第一步：求一阶偏导数

对 x 求偏导（ y 视为常数，使用乘积法则）：

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} [e^{2x}(x + y^2 + 2y)] = 2e^{2x}(x + y^2 + 2y) + e^{2x} \cdot 1 = e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1)$$

对 y 求偏导（ x 视为常数）：

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y} [e^{2x}(x + y^2 + 2y)] = e^{2x}(2y + 2)$$

第二步：求驻点（令一阶偏导数为零）

由 $f_y = 0$ ： $e^{2x}(2y + 2) = 0$ 。因为 $e^{2x} > 0$ 恒成立，所以 $2y + 2 = 0$ ，得 $y = -1$ 。

将 $y = -1$ 代入 $f_x = 0$ ：

$$e^{2x}(2x + 2(-1)^2 + 4(-1) + 1) = 0$$

$$e^{2x}(2x + 2 - 4 + 1) = 0$$

$$e^{2x}(2x - 1) = 0$$

因为 $e^{2x} > 0$ ，所以 $2x - 1 = 0$ ，得 $x = \frac{1}{2}$ 。

唯一驻点为 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ 。

第三步：求二阶偏导数

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} [e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1)] = 2e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1) + e^{2x} \cdot 2 = e^{2x}(4x + 4y^2 + 8y + 4)$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} [e^{2x}(2y + 2)] = 2e^{2x}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} [e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1)] = e^{2x}(4y + 4)$$

第四步：在驻点处计算二阶偏导数的值

在点 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ 处, $e^{2x} = e^1 = e$:

$$A = f_{xx} \left(\frac{1}{2}, -1 \right) = e \left(4 \times \frac{1}{2} + 4 \times 1 + 4 \times (-1) + 4 \right) = e(2 + 4 - 4 + 4) = 6e$$

等等, 让我重新计算:

$$f_{xx} = e^{2x}(4x + 4y^2 + 8y + 4)$$

代入 $x = 1/2, y = -1$:

$$= e(4 \times \frac{1}{2} + 4 \times 1 + 8 \times (-1) + 4) = e(2 + 4 - 8 + 4) = 2e$$

$$B = f_{xy} \left(\frac{1}{2}, -1 \right) = e(4 \times (-1) + 4) = e(0) = 0$$

$$C = f_{yy} \left(\frac{1}{2}, -1 \right) = 2e$$

第五步：用二阶充分条件判别

计算判别式:

$$AC - B^2 = 2e \times 2e - 0^2 = 4e^2 > 0$$

且 $A = 2e > 0$ 。

由二元函数极值的二阶充分条件: $AC - B^2 > 0$ 且 $A > 0$, 故该点为极小值点。

第六步：计算极小值

$$f \left(\frac{1}{2}, -1 \right) = e^{2 \times \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} + (-1)^2 + 2 \times (-1) \right) = e \left(\frac{1}{2} + 1 - 2 \right) = e \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{e}{2}$$

结论

函数 $f(x, y)$ 在点 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ 处取得极小值 $\boxed{-\frac{e}{2}}$ 。

【知识点】二元函数极值的求法：一阶偏导数与驻点；二阶偏导数与 Hessian 矩阵；极值的二阶充分条件（ $AC - B^2 > 0$ 且 $A > 0$ 为极小值）；乘积法则求偏导

