

## 2025-2026 学年第一学期 离散数学 (A) 答案

### 一、选择题（每题 2 分，总计 20 分）

BAACA BDABB

### 二、填空题（每空 2 分，总计 20 分）

1. 重言式

2.  $\exists x(S(x) \wedge L(x))$

3. 2

4.  $\{1,3,5\}$

5. 3

6.  $\{1,2,3\}, \{2,3,4\}$

7. 4

8.  $2x+7$

9. (0,2,2)

### 三、解答题（本大题共 5 小题，总计 46 分）

1.

设 3 度顶点为  $x$  个，则阶数  $n=5+3+x=8+x$ ，边数  $m=7+x$ 。由握手定理

$$2m=14+2x=5*1+3*2+3x=11+3x$$

解得  $x=3$ ，故  $n=8+3=11$

2.

$$S = \{x | x \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq x \leq 300\}$$

$$A = \{x | x \in S \wedge x \text{ 可被 } 3 \text{ 整除}\}$$

$$B = \{x | x \in S \wedge x \text{ 可被 } 5 \text{ 整除}\}$$

$$C = \{x|x \in S \wedge x \text{可被 } 7 \text{ 整除}\}$$

则有：

$$|A \cap B \cap C| = \lfloor 300/105 \rfloor = 2$$

$$|A| = \lfloor 300/3 \rfloor = 100 \quad |A \cap B| = \lfloor 300/15 \rfloor = 20$$

$$|B| = \lfloor 300/5 \rfloor = 60 \quad |A \cap C| = \lfloor 300/21 \rfloor = 14$$

$$|C| = \lfloor 300/7 \rfloor = 42 \quad |B \cap C| = \lfloor 300/35 \rfloor = 8$$

$$\begin{aligned} |\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| &= |S| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C| \\ &= 300 - (100 + 60 + 42) + (20 + 14 + 8) - 2 \\ &= 138 \end{aligned}$$

3.

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

从 $v_4$ 到自身长度为2的回路有2条

4.

$$(p \vee q) \rightarrow (q \rightarrow p)$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (q \rightarrow p)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \vee \neg q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee p \vee \neg q$$

$$\Leftrightarrow p \vee \neg q$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_3$$

5.

(1) 设  $p$ : 王晓聪明,  $q$ : 王晓用功  $p \wedge q$

(2) 设  $t$ : 张晓静挑选 202 房间,  $u$ : 张晓静挑选 203 房间

$(t \wedge \neg u) \vee (u \wedge \neg t)$

(3)  $p$ : 两个三角形全等  $q$ : 三角形的三条边全部相等。  $p \leftrightarrow q$

四、证明题 (本大题共 2 小题, 总计 14 分)

1.

(1)  $\forall \langle a, b \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, b = b \Rightarrow \langle a, b \rangle R \langle a, b \rangle$ , 因此  $R$  自反

(2)  $\forall \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,

$\langle a, b \rangle R \langle c, d \rangle \Leftrightarrow b = d \Rightarrow d = b \Leftrightarrow \langle c, d \rangle R \langle a, b \rangle$ ,

因此  $R$  对称

(3)  $\forall \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle, \langle e, f \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,

$\langle a, b \rangle R \langle c, d \rangle$  且  $\langle c, d \rangle R \langle e, f \rangle \Leftrightarrow$

$b = d$  且  $d = f \Rightarrow b = f \Leftrightarrow \langle a, b \rangle R \langle e, f \rangle$ , 因此  $R$  传递

2.

设  $p$ : 我趴着;  $q$ : 我站着;  $r$ : 敌人能看到我

前提:  $p \rightarrow \neg r, q \rightarrow r$

结论:  $q \rightarrow \neg p$

(1) 真值表法

| $p$ | $q$ | $r$ | $\neg r$ | $\neg p$ | $p \rightarrow \neg r$ | $q \rightarrow r$ | $q \rightarrow \neg p$ | $(p \rightarrow \neg r) \wedge (q \rightarrow r)$ | $((p \rightarrow \neg r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$ |
|-----|-----|-----|----------|----------|------------------------|-------------------|------------------------|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| 0   | 0   | 0   | 1        | 1        | 1                      | 1                 | 1                      | 1                                                 | 1                                                                                      |
| 0   | 0   | 1   | 0        | 1        | 1                      | 1                 | 1                      | 1                                                 | 1                                                                                      |
| 0   | 1   | 0   | 1        | 1        | 1                      | 0                 | 1                      | 0                                                 | 1                                                                                      |
| 0   | 1   | 1   | 0        | 1        | 1                      | 1                 | 1                      | 1                                                 | 1                                                                                      |
| 1   | 0   | 0   | 1        | 0        | 1                      | 1                 | 1                      | 1                                                 | 1                                                                                      |
| 1   | 0   | 1   | 0        | 0        | 0                      | 1                 | 1                      | 0                                                 | 1                                                                                      |
| 1   | 1   | 0   | 1        | 0        | 1                      | 0                 | 0                      | 0                                                 | 1                                                                                      |
| 1   | 1   | 1   | 0        | 0        | 0                      | 1                 | 0                      | 0                                                 | 1                                                                                      |

(2) 主析取范式法

$$((p \rightarrow \neg r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee r)) \vee (\neg q \vee \neg p)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg r) \vee \neg(\neg q \vee r) \vee (\neg q \vee \neg p)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg q \vee \neg p$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \\ & \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \\ & \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \\ & \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow m_{111} \vee m_{101} \vee m_{110} \vee m_{010} \vee m_{101} \vee m_{100} \vee m_{001} \vee m_{000} \vee m_{011}$$

$$\vee m_{010} \vee m_{001} \vee m_{000}$$

$$\Leftrightarrow m_{000} \vee m_{001} \vee m_{010} \vee m_{011} \vee m_{100} \vee m_{101} \vee m_{110} \vee m_{111}$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$$

(3) 构造证明

(1)  $p \rightarrow \neg r$  前提引入

(2)  $r \rightarrow \neg p$  (1) 假言易位

(3)  $q \rightarrow r$  前提引入

(4)  $q \rightarrow \neg p$  (2), (3) 假言三段论

结论是有效结论