

第三章 线性系统的能控性和能观性

1、能控性和能观性是现代控制理论两个重要的基本概念。1960年由卡尔曼首先提出。

——卡尔曼 (Kalman) 美籍匈牙利人，是现代控制理论的主要奠基人之一。首先引入状态空间分析法，提出能控能观、最优调节器、卡尔曼滤波、最优控制的反问题等。

2、能控性是 $u(t)$ 支配 $X(t)$ 的能力，回答 $u(t)$ 能否使 $X(t)$ 作任意转移的问题；

3、能观性是 $Y(t)$ 反应 $X(t)$ 的能力，回答是否能够通过 $Y(t)$ 的量测来确定 $X(t)$ 的问题。

古典理论与现代理论的比较

古典中： $C(s)$ 既是输出又是被控量

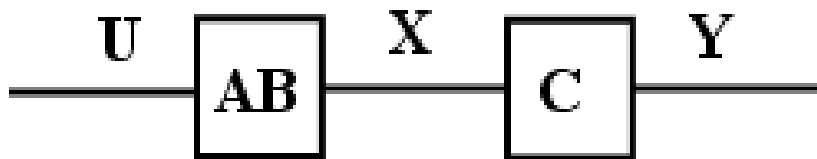


(1) $C(s)$ 肯定与 $R(s)$ 有关系；

(2) $C(s)$ 肯定是可测量的；

因此，只要满足稳定，肯定能控能观

现代中：



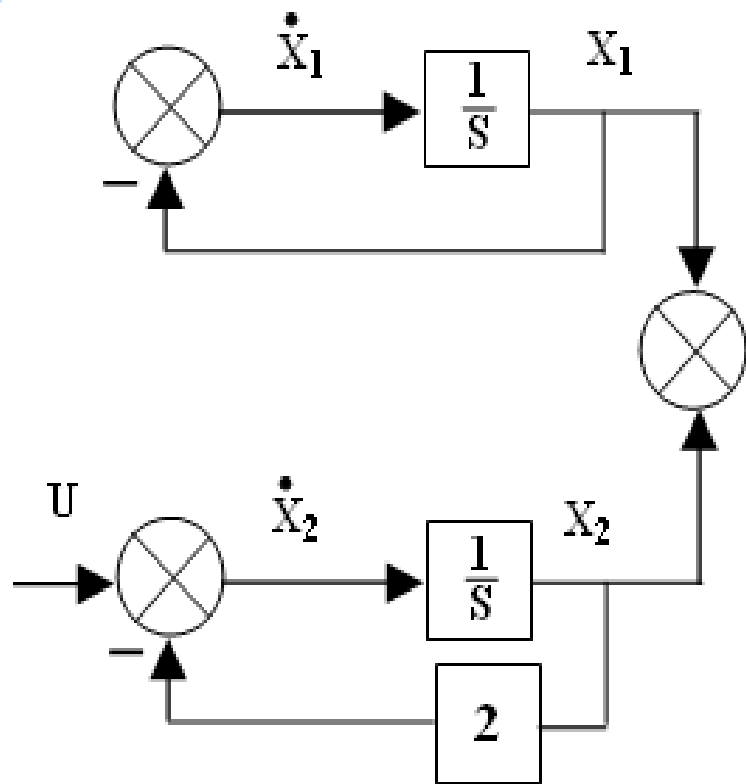
被控制量是 X （状态变量）



思考问题:

- 1、每个状态 $X(t)$ 是否受 $u(t)$ 控制
- 2、状态变量在系统内部，能否通过观测 $Y(t)$ 来测量 $X(t)$

例： $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$



分析：

1、 x_1 与输入 u 无关，不能控， x_2 能控， x_1, x_2 不完全能控。

2、 $y = x_1 + x_2$ ， x_1 或 x_2 都能对 y 产生影响，通过 y 能确定 x_1 或 x_2 ，能观测。

3、能控能观是最优制和最优估计的设计基础。

3.1 线性连续系统的能控性

一、线性时变系统的能控性

(一) 定义：对于系统 $\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$

若存在输入信号 $u(t)$ ，能在有限时间区间 $[t_0, t_f]$ 内将系统的任意一个初始状态 $x(t_0)$ 转移到终端状态 $x(t_f)$ ，称 $x(t)$ 在 t_0 时刻或 $[t_0, t_f]$ 区间上是完全能控的，或称系统在 t_0 时刻是能控的，否则不能控。

(二) 性质

线性时变系统方程的解

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

若状态 $x(t_0)$ 为能控的，则有 $u(t)$ 使 $x(t_f) = 0$

$$x(t_f) = \phi(t_f, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(t_f, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau = 0$$

$$\text{因此 } x(t_0) = -\phi^{-1}(t_f, t_0) \int_{t_0}^{t_f} \phi(t_f, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$x(t_0) = -\int_{t_0}^{t_f} \phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

意义： 系统状态 $x(t_0)$ 能控，即 $[t_0, t_f]$ 区间上受 $u(t)$ 控制。

(三) 能控性判据

[定理3.1] 系统 $\Sigma(A(t), B(t), C(t))$ 在 t_0 时刻或 $[t_0, t_f]$ 完全能控的充要条件是矩阵 $\Phi(t_0, t) * B(t)$ 是行线性无关的（满秩的、非奇异的）

二、线性定常系统的能控性

(一) 定义: 对 $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$ 系统, 如果存在分段连续的 $u(t)$ 在 $[t_0, t_f]$ 内, 将系统的任一 $x(t_0)$ 转移到 $x(t_f)$, 称此系统是状态完全能控制的, 或状态能控的。若 n 个状态变量中, 至少有一个状态变量不能控时, 称系统是状态不完全能控或不能控。

注意: 1、某些状态能控 $\neq$ 系统完全能控

2、系统完全能控 $\rightarrow$ 肯定状态能控

(二) 能控性判别准则: --- 三个定理

[定理3.2] 线性定常系统完全能控的充要条件是矩阵

$$M = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] \text{ 是满秩的}$$

证明: 线性定常系统状态方程的解

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

假设 $t_0 = 0, x(t_f) = 0$ 则有

$$x(t_f) = \Phi(t_f)x(0) + \int_0^{t_f} \Phi(t_f - \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$x(0) = -\int_0^{t_f} \Phi(-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$\Phi(t)$ 可表示为:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= a_0(t)I + a_1(t)A + \dots + a_{n-1}(t)A^{n-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)A^i \end{aligned}$$

$$\text{则 } \mathbf{x}(\mathbf{0}) = -\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^i \mathbf{B} \int_0^{t_f} a_i(\tau) u(\tau) d\tau = -\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^i \mathbf{B} r_i(t_f)$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{0}) = -\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0(t_f) \\ r_1(t_f) \\ \vdots \\ r_{n-1}(t_f) \end{bmatrix}$$

方程中 $\begin{bmatrix} r_0(t_f) \\ \vdots \\ r_i(t_f) \\ \vdots \\ r_{n-1}(t_f) \end{bmatrix}$ 为未知， n 个未知，其它已知

方程有解的充要条件是系数阵满秩

$$\text{即 } [\text{rank}]M = \text{rank}[\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B} \cdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n$$

例3.1已知 $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u$, 判能控性

解:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u \end{cases} \quad \dot{x}_1, \dot{x}_2 \text{ 都与 } u \text{ 有关, 所以} \\ \text{状态完全能控, 即能控}$$

$$M = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$|M| \neq 0$, 秩为2, $\therefore$ 满秩, 能控

例3.2有系统如下，判断其是否能控

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

解：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Ab = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -a_2 \end{bmatrix} \quad A^2b = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_2 \\ -a_1 + a_2^2 \end{bmatrix}$$



故:
$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 1 & -a_2 & -a_1 + a_2^2 \end{bmatrix}$$

它是一个三角形矩阵，斜对角线元素均为1，不论 a_2 、 a_1 取何值，其秩为3，系统总是能控的。因此把凡是具有本例形式的状态方程，称之为能控标准型。

[定理3.3] 若线性定常系统的系数矩阵 A 有互不相同的特征值，则系统能控的充要条件是输入矩阵 B 没有任何一行的元素全部为零。

[定理3.4] 若 A 为约旦型，则系统能控的充要条件是

(1) B 中对应于互异的特征值的各行，没有一行的元素全为零。

(2) B 中与每个约旦块最后一行相对应的各行，没有一行的元素全为零。

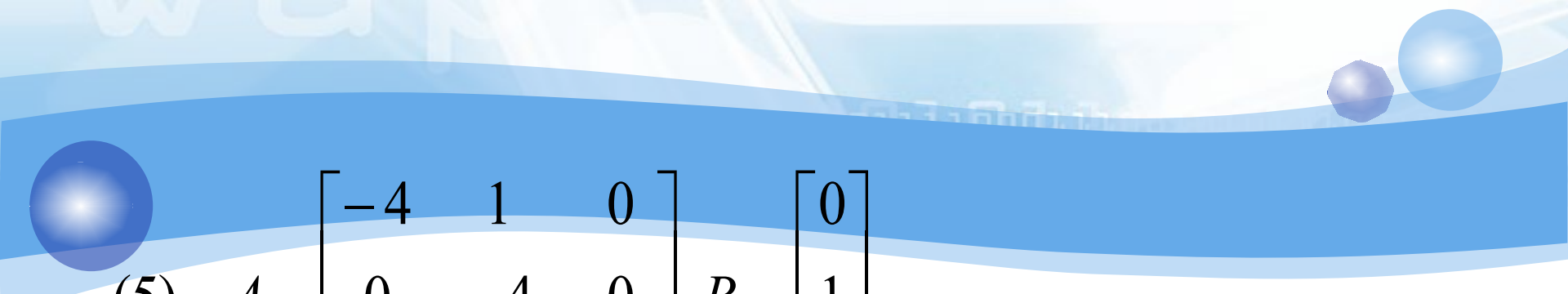
例3.4 判断下列系统的能控性

$$(1)、A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2)、A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(3)、A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(4)、A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$


$$(5)、A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

所以A为约旦阵，但有两个相同特征值的约旦块对应b虽为最后一行全为0的元素行，仍不能控，可算出 $\text{rank}[M] < 3$.

结论： 系统的能控性，取决于状态方程中的A和B。

3.2 线性定常离散系统的能控性

一、定义

对于线性定常离散系统 $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$



如果存在控制信号序列 $\mathbf{u}(k)$ 、 $\mathbf{u}(k+1) \dots \mathbf{u}(n-1)$ ，使得系统从第 k 步状态 $\mathbf{x}(k)$ 开始，能在第 n 步上达到零状态（平衡状态），即 $\mathbf{x}(n) = \mathbf{0}$ ，其中 n 为大于 k 的某一个有限正整数，称系统在第 k 步上是能控的， $\mathbf{x}(k)$ 称为系统在第 k 步上的能控状态。

如果对于任一个 k ，第 k 步上的状态 $\mathbf{x}(k)$ 都是能控状态，则系统都完全能控，称系统完全能控。

注意：控制信号序列有限，但规律和大小没有限制

二、判别准则

[定理3.5] 线性定常离散系统 $\Sigma (G,H)$ 状态能控的充要条件是能控性矩阵

证明: $M = [H, GH \cdots G^{n-1}H]$ 是满秩的 (秩为 n)

离散解: $x(k) = G^k x(0) + \sum_{j=1}^{k-1} G^{k-j-1} H u(j)$

假设能控, 经 n 步, $x(k)=x(n)=0$

$$0 = G^n x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} G^{n-j-1} H u(j)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} G^{n-j-1} H u(j) = -G^n x(0)$$

写成

$$\begin{bmatrix} G^{n-1}H, G^{n-2}H \cdots GH, H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(n-1) \end{bmatrix} = -G^n x(0)$$

其中 $[u(0) \dots u(n-1)]^T$ 为 n 个未知，方程有解的充要条件是系数阵满秩，即

$$\text{rank} M = \text{rank}[G^{n-1}H, G^{n-2}H \cdots GH, H] = n$$

$$\text{或} \text{rank}[H, GH \cdots G^{n-1}H] = n$$

说明：形式上同连续系统， $AB \rightarrow GH$ 机电工程系

例3.5已知

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

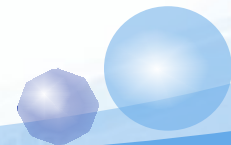
判断是否能控

解：

$$[H, GH, G^2H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \text{秩} = 3 = n$$

$\therefore$ 系统能控

说明：也可把矩阵G化为对角形或约旦标准型后，按定理3.3、3.4判别系统是否能控。

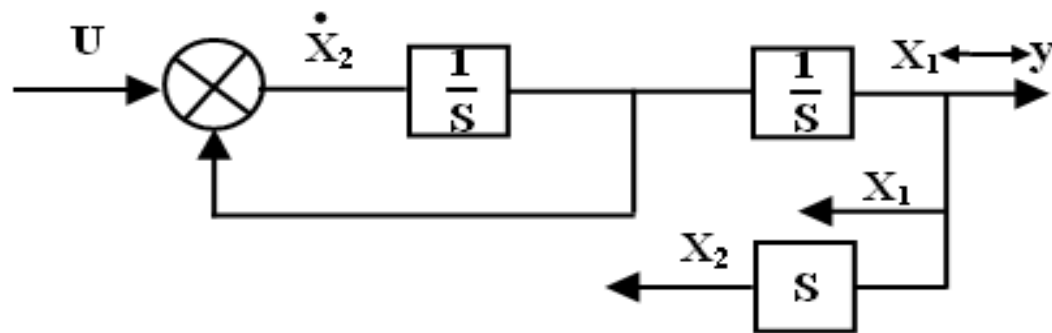


3.3 线性定常系统的能观测性

一、定义：系统 $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$

如果对任意给定的 $u(t)$ ，在有限观测时间内 $[t_0 \sim t_f]$ 内测量值，就能唯一地确定 $x(t_0)$ ，则称 $x(t_0)$ 是能观的，如果每个 $x(t_0)$ 是能观，称状态完全能观，简称状态能观

例3.7: $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$



二、判别准则

[定理3.7] 线性定常系统 $\Sigma(A, B, C)$ 状态能观测的充要条件是

$$\text{rank} N = \text{rank} \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} = n, (\text{满秩})$$

[证明]

$$y(t) = cx(t) = c\phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t c\phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau$$

系统能观测性与输入向量无关，令 $u(t)=0, t_0=0$

$$y(t) = c\phi(t - t_0)x(t_0) = c\phi(t) x(0) = ce^{At}x(0)$$

$$c \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) A^i x(0) = [a_0(t)I, a_1(t)I \cdots a_{n-1}(t)I] \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} x(0)$$

可见，根据在 $[0, t_f]$ 量测的 $y(t)$, 能将初始状态 $x(0)$ 唯一地确定下来地充要条件是

$$\text{rank} N = \text{rank} \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} = n, \text{—状态能观}$$

例3.8、若系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_{(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} u(t) \\ y_{(t)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

试判断系统的能观测性

$$\text{解: } N = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ -3 & -3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}, \text{rank} N = 1 < m = 2$$

$\therefore$ 系统是不能观测的

例3.9对于能观测标准型,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, c = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$

$$\text{则 } N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, |N| \neq 0, \text{秩为 } n, \therefore \text{能观}$$

[定理3.8] 若矩阵 A 有互不相同的特征值，则系统能观测的充要条件是输出矩阵 C 没有任何一列的元素全部为0。

[定理3.9] 若矩阵 A 为约旦型，则系统能观测的充要条件是

(1) 输出矩阵 C 中对应于互异特征值的各列，没有一列的元素全为0。

(2) C 中与每个约旦块的第一列相对应的各列，没有一列的元素全为0。

例3.10 下列的一些系统是完全能观测的

$$(1) \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x, y = [1 \quad 3]$$

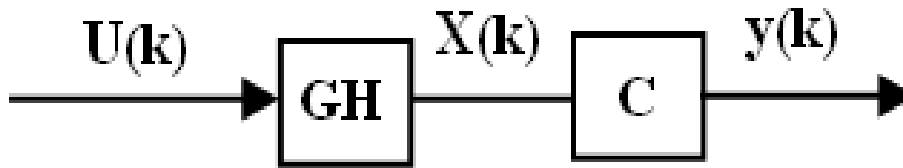
$$(2) \dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

下列的系统是不完全能观测的

$$(1) \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x, y = [0 \quad 1] x$$

$$(2) \dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} x$$

三 线性定常离散系统的能观测性



(一) 定义：当 $u(k)$ 给定，根据第 i 步，以及以后若干步对 $y(i), y(i+1) \dots y(n)$ 的测量，就唯一地确定出第 i 步的 $x(i)$ ，称 $x(i)$ 是能观的。如果每个 $x(i)$ 都能观，称状态完全能观，简称状态能观。

(二) 判别准则

[定理3.10]线性定常离散系统状态能观测的充要条件是

$$\text{rank} N = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

[证明]假设观测从第0步开始, 令 $u(k)=0$, 则

$$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

$$\text{由解 } x(k) = G^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} G^{k-i-1} H u(i)$$

$$y(k) = Cx(k) = CG^k x(0)$$

递推求解:

$$k = 0, y(0) = Cx(0)$$

$$k = 1, y(1) = CGx(0)$$

$\vdots$

$$k = n - 1, y(n - 1) = CG^{n-1}x(0)$$

矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} x(0)$$

即 $x(0)$ 有解的充要条件是系数矩阵满秩

从测量的 $y(0), y(1) \cdots y(n-1)$ 要唯一地确定出 $x(0) \{x_1(0) x_2(0) \cdots x_n(0)\}^T$ 的

充要条件是 $\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} = n$

3.5 对偶原理

一、线性系统的对偶关系

系统 Σ_1 :

$$\dot{x}_1(t) = Ax_1(t) + Bu_1(t)$$

$$y_1(t) = Cx_1(t)$$

$$A - n \times n$$

$$B - n \times r$$

$$C - m \times n$$

系统 Σ_2 :

$$\dot{x}_2(t) = A^T x_2(t) + C^T u_2(t)$$

$$y_1(t) = B^T x_2(t)$$

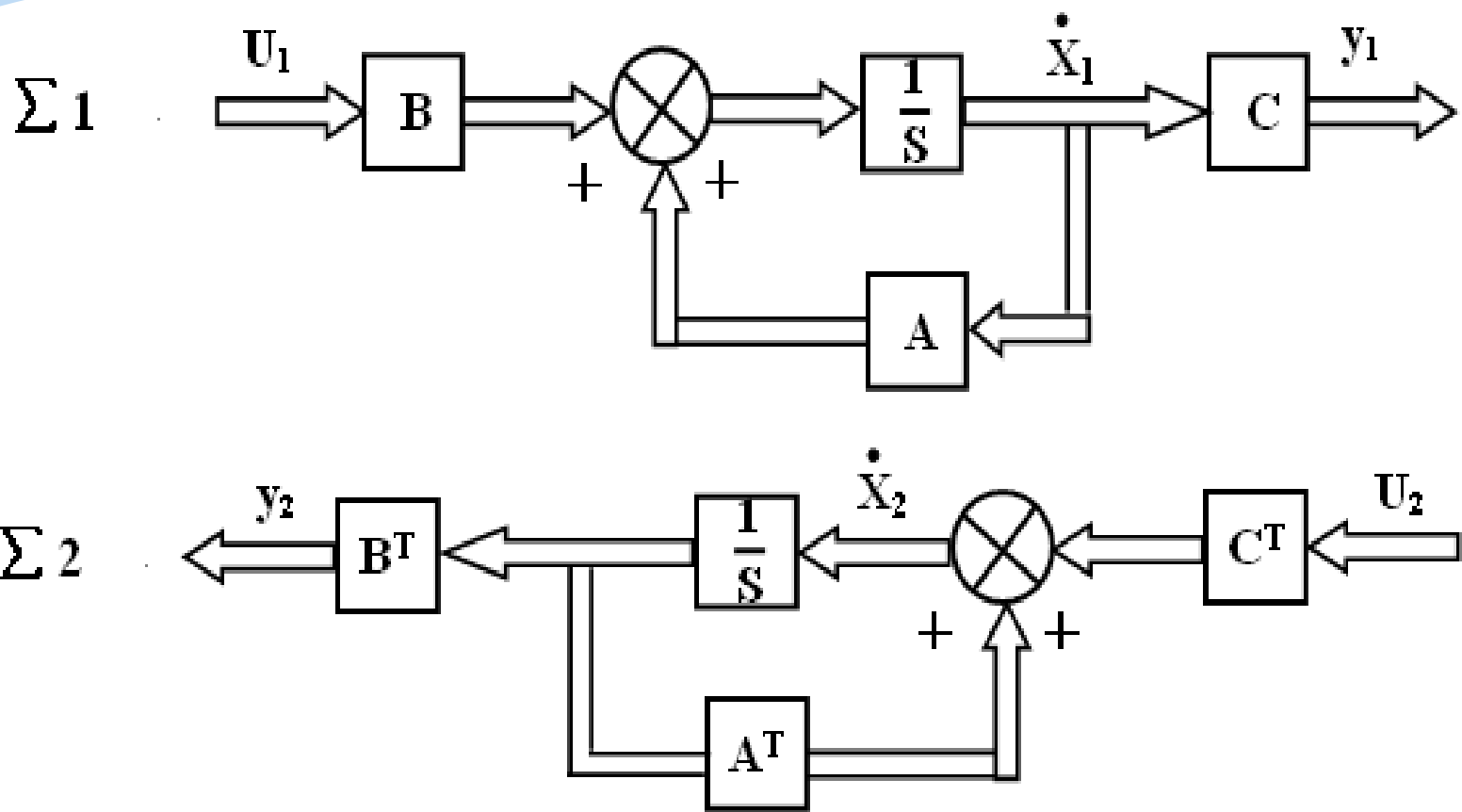
$$A^T - n \times n$$

$$C^T - n \times m$$

$$B^T - r \times n$$

称系统 Σ_1 和 Σ_2 是互为对偶的。 Σ_1 是 Σ_2 的对偶系统或 Σ_2 是 Σ_1 的对偶系统。

二 对偶系统的结构图特点



- (1) 输入端与输出端互换，信号传递方向相反
- (2) 信号引出点和信号综合点互换
- (3) 对应矩阵转置

$\Sigma 1$ 图表示用 $u_1(t)$ 控制 $y_1(t)$ 是“控制问题”，
 $\Sigma 2$ 图表示用输出量去求输出量，称为“估计问题”

三、对偶系统的传递函数互为转置

$$\Sigma_1: G_1(s) = C(sI - A)^{-1} B$$

$$\Sigma_2: G_2(s) = B^T (sI - A^T)^{-1} C^T$$

$$G_2(s) = C(sI - A^T)^{-1} B$$

对偶系统的特征值是相同

$$\text{即 } |SI - A| = |SI - A^T|$$

四、对偶原理

系统 $\Sigma_1 (A_1, B_1, C_1)$ 和 $\Sigma_2 (A_2, B_2, C_2)$ 是互为对偶的两个系统，则 Σ_1 的能控性等价于 Σ_2 的能观性， Σ_2 的能观性等价于 Σ_1 的能控性。或者说，若 Σ_1 是状态完全能控的（完全能观的），则 Σ_2 是完全能观的（完全能控的）

证明：对 Σ_2 而言，能控性判别矩阵

$$M_2 = [B_2, A_2 B_2 \cdots A_2^{n-1} B_2]$$

的秩为 n ，则系统状态完全能控的。

将 $A_2 = A_1^T, B_2 = C_1^T, C_2 = B_1^T$ 代入上式

$$M_2 = [C_1^T, A_1^T C_1^T \cdots (A_1^T)^{n-1} C_1^T] = N_1^T$$

说明 $\Sigma 1$ 的能观性判别矩阵 N_1 的秩也为 n ，从而说明 $\Sigma 1$ 为完全能观的。

同理有

$$\begin{aligned} N_2^T &= [C_2^T, A_2^T C_2^T \cdots (A_2^T)^{n-1} C_2^T] \\ &= [B_1, A_1 B_1 \cdots A_1^{n-1} B] \end{aligned}$$

即若 $\Sigma 2$ 的 N_2 满秩， $\Sigma 2$ 为完全能观，则 $\Sigma 1$ 的 M_1 亦满秩而为状态完全能控。

3.6 线性系统的结构分解

(1) 当系统不能控或不能观测时，并不是所有状态都不能控或不能观测（可通过坐标变换对状态空间进行分解。）

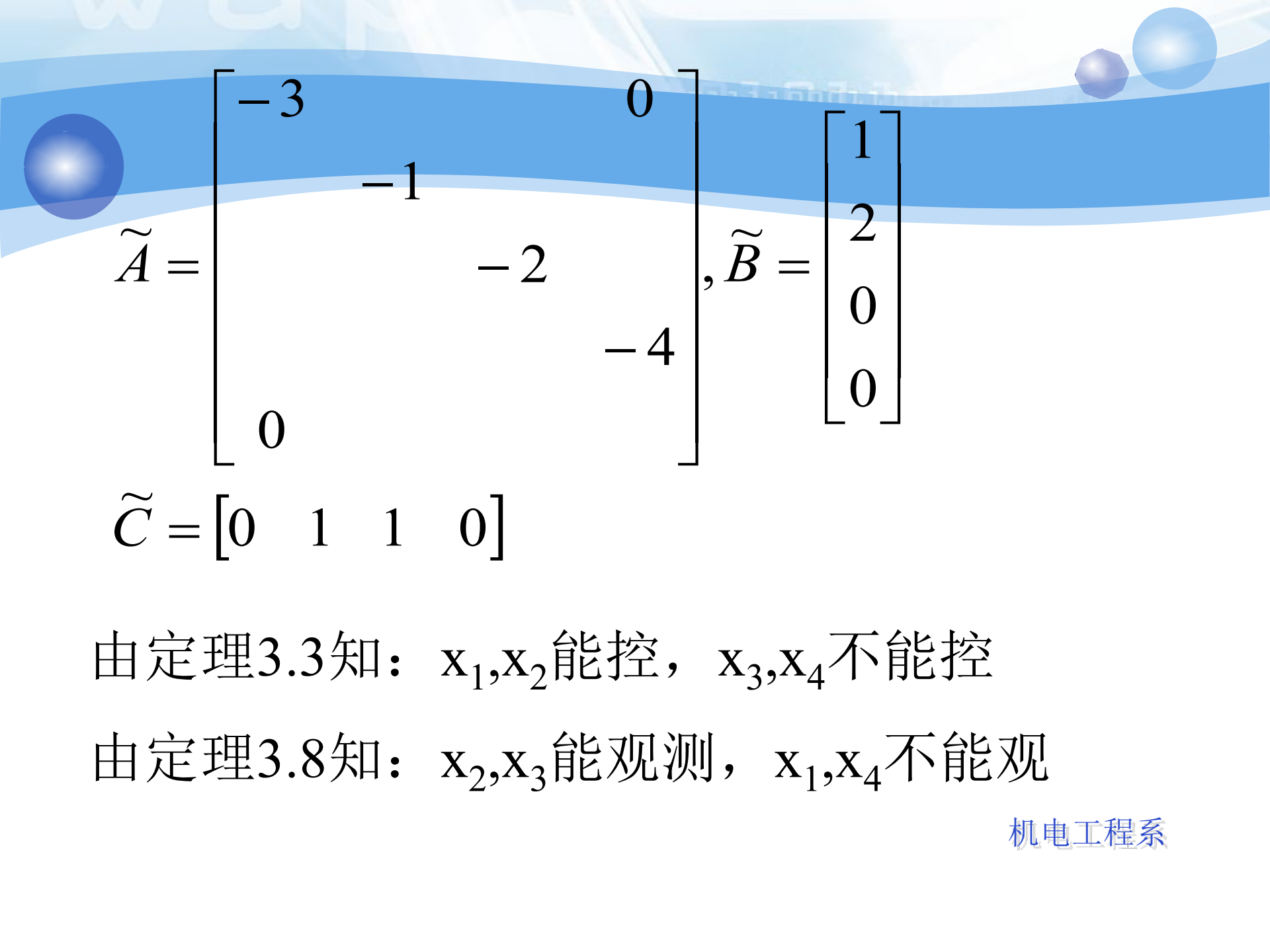
(2) 把状态空间按能控性或能观性进行结构分解。

一、结构分解举例

设经过变换后

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u$$

$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$


$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -3 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -2 & \\ & & & -4 \\ 0 & & & \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\tilde{C} = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0]$$

由定理3.3知: x_1, x_2 能控, x_3, x_4 不能控

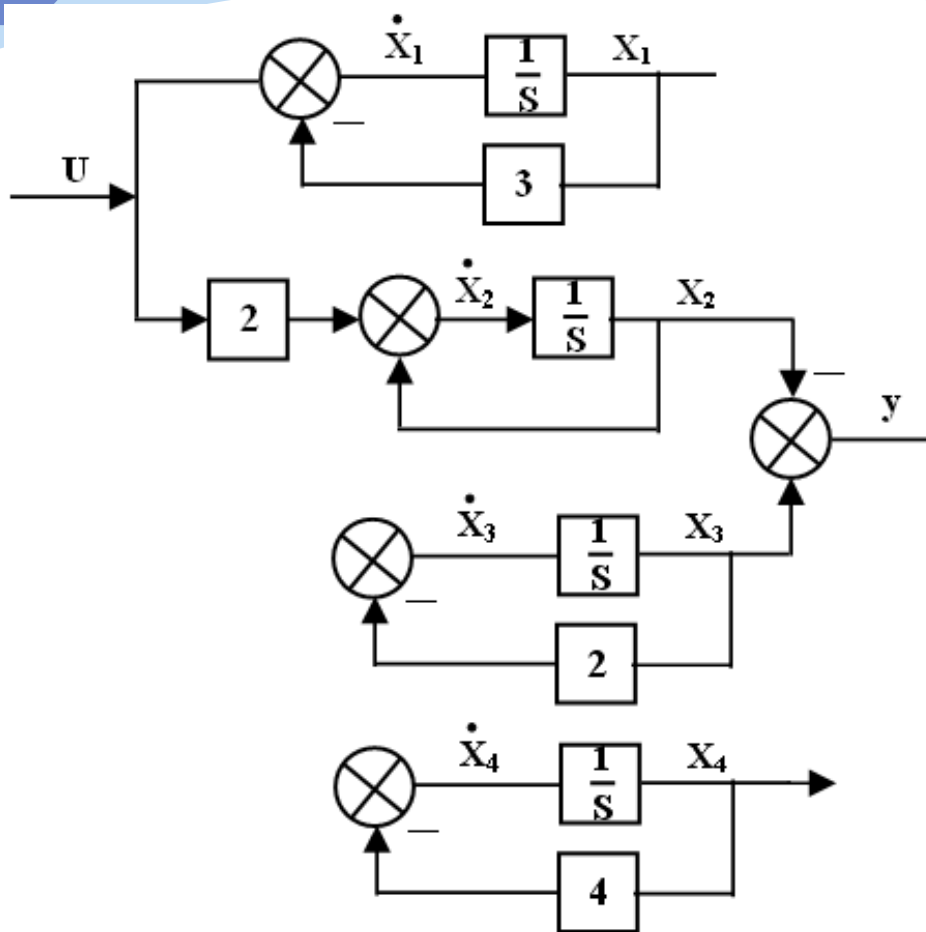
由定理3.8知: x_2, x_3 能观测, x_1, x_4 不能观

系统有：

- (1) 能控能观 $\tilde{x}_2$
- (2) 能控不能观 $\tilde{x}_1$
- (3) 不能控能观 $\tilde{x}_3$
- (4) 不能控不能观 $\tilde{x}_4$

} 四种情况

结构图：



x_1 能控不能观

x_2 能观能控

x_3 不能控能观

x_4 不能控不能观

机电工程系

上述是通过变换把一个系统分解成4个子系统

$$(1) \dot{x} = Ax + Bu, T^{-1} \dot{\tilde{x}} + Bu$$

$$\text{同乘 } T: \dot{\tilde{x}} = TAT^{-1} \tilde{x} + TBu$$

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B}u$$

$$(2) y = cx = cT^{-1} \tilde{x} = \tilde{c} \tilde{x}$$

$$\text{令 } \tilde{x} = Tx(t)$$

$$x(t) = T^{-1} \tilde{x}$$

二、系统按能控性分解

(一)定理3.10 设系统 $\Sigma(A,B,C)$ 不能控，则 $\text{rank} M = \text{rank}[B, AB \dots A^{n-1}B] = r < n$ ，必存在一非奇异矩阵 $T = R_c$ ，使得

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \\ r & n-r \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \\ r & n-r \end{bmatrix}$$

则系统得状态空间被分解成能控和不能控的两部分

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{A}_{11}\tilde{x}_1 + \tilde{A}_{12}\tilde{x}_2 + \tilde{B}_1u, r\text{维子系统} \\ y_1 = \tilde{C}_1\tilde{x}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{A}_{22}\tilde{x}_2, (n-r)\text{维子系统} \\ y_2 = \tilde{C}_2\tilde{x}_2 \end{cases}$$

(二)变换矩阵T的求法:

(1) 从 $M=[B, AB \dots A^{n-1}B]$ 中选择 r 个线性无关的列向量

(2) 以(1)求得的列向量, 作为T的前 r 个列向量, 其余列向量可以在保持T为非奇异的情况下, 任意选择。

(三)说明:

(1) 系统按能控性分解后, 其能控性不变。

(2) 系统按能控性分解后, 其传递函数阵不变。

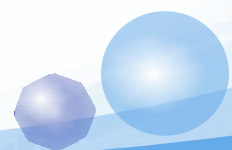
三、系统按能观测性分解

(一)定理3.11 设系统 $\Sigma(A,B,C)$ 不能观, 则

$$\text{rank} V = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = l < n, \text{ 则存在非奇异矩阵 } T, \text{ 使得}$$

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}_{n-l}^L, \tilde{x} = Tx$$

$$\tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix}_{n-l}^l, \tilde{C} = CT^{-1} = [\tilde{C}_1 \quad 0]$$



原状态方程被分解成能观和不能观测的两部分

$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{A}_{11}\tilde{x}_1 + \tilde{B}_1u, y_1 = \tilde{C}_1\tilde{x}_1 \cdots \text{能观}$

$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{A}_{21}\tilde{x}_1 + \tilde{A}_{22}\tilde{x}_2 + \tilde{B}_2u \cdots \text{不能观}$

(二)变换矩阵 R_0 的求法:

(1) 从矩阵 $V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ 中 l 个线性无关行向量

(2) 以 (1) 中求得得行向量作为 T^T 的前 l 个行向量, 其余行向量可以在保证 T^T 为非奇异的条件下任选。

例3.16 设线性定常系统如下，判别其能观性，若不是完全能观的，将该系统按能观性进行分解。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, y = [0 \quad 1 \quad -2]x$$

解： 系统的能观性判别矩阵

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

其秩， $\text{rank} N = 2 < n$

所以该系统是状态不完全能观的。

为构造非奇异变换阵 R_0^{-1} ，取

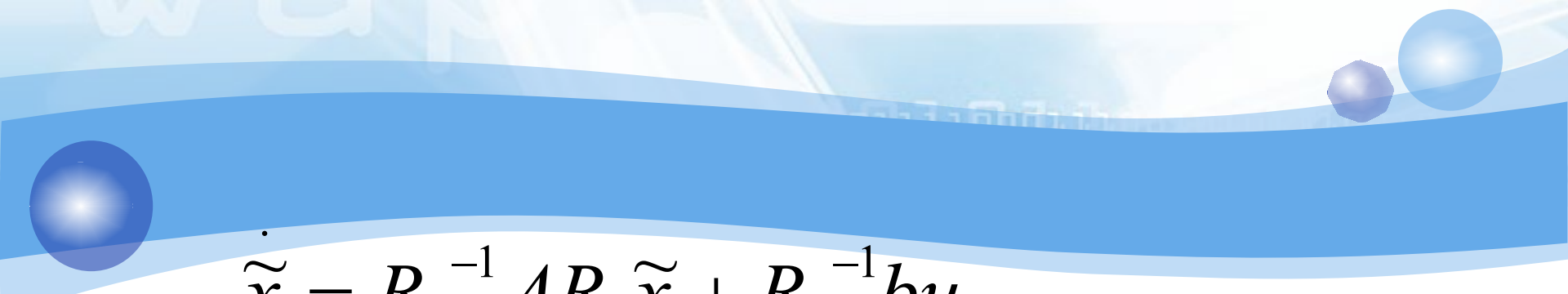
$$R'_1 = C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R'_2 = CA = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R'_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{得 } R_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 R_3 是在保证 R_0^{-1} 非奇异的条件下任意选取的。
于是系统状态空间表达式变换为


$$\dot{\tilde{x}} = R_0^{-1} A R_0 \tilde{x} + R_0^{-1} b u$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = C R_0 \tilde{x} = [1 \quad 0 \quad 0] \tilde{x}$$

3.7 系统的实现

一、概念：

根据给定的传递函数阵 $G(s)$ ，求其相应的状态空间表达式 (A,B,C,D) 使其满足 $C(SI-A)^{-1}B+D=G(S)$ ，称该状态空间表达式 (A,B,C,D) 为传递函数阵 $G(S)$ 的一个实现。

二、实现的目的是为了仿真（做模仿）

通过模拟结构图，用积分器、加法器等（集成电路块）连接试验，物理可实现条件为

1、 $G(S)$ 中的每一个元素 $G_{ij}(S)$ 的分子分母多项式的系数均为实常数。

2、 $G(S)$ 中每一个元素均为 S 的真有理分式函数

三、如何实现：

状态变量的选择有无穷多组，实现的方法有无穷多。
单变量系统可以根据 $G(S)$ 直接写出其能控标准型实现和能观标准型实现。

四、最小实现

(1)若 $G(s)$ 的一个实现为

$$\text{定义:} \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = cx \end{cases}, \quad (1)$$

如果 $G(S)$ 不存在其它实现

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{c}\tilde{x} \end{cases}, \quad (2)$$

使 $\tilde{x}$ 的维数小于 x 的维数，则称 (1) 式的实现为 $G(S)$ 的一个最小实现。

(2) 定理: $G(S)$ 的一个实现

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = cx \end{cases}$$

为最小实现的充要条件是 (A,B,C) 不但能控而且能观。

(3) 确定最小实现的步骤

1、对 $G(S)$ 初选一种实现 (A,B,C) ，通常选取能控或能观标准型实现，检查其实现的能控性（或能观性），若为能控又能观则 (A,B,C) 便是最小实现。

2、否则对以上标准型实现 (A,B,C) 进行结构分解，找出其完全能控又完全能观的子系统 $\Sigma(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1)$ ，这便是 $G(S)$ 的一个最小实现。

3.8 能控性和能观性与传递函数阵的关系

一、定理3.12：对于单变量系统，如果 $G(S)$ 存在零极点对消，则由状态变量选择而定，要么能控，要么能观或既不能控也不能观，若没有零极点对消，则状态能控能观。

证明：

$$\text{对于 } \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{b}u, y = \tilde{c}\tilde{x}$$

$\tilde{A}$ 有互不相同的 λ_i

从状态空间看：

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \tilde{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]$$

$$G(s) = \tilde{c}[sI - \tilde{A}]^{-1}\tilde{b} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i b_i}{s - \lambda_i}, (i = 1, 2, \cdots, n)$$

从传递函数阵看:

$$G(s) = \frac{k(s-u_1)(s-u_2)\cdots(s-u_n)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)}, n \geq m$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{s-\lambda_i}$$

$$\text{其中: } \alpha_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s-\lambda_i)G(s)$$

$$\text{故 } C_i b_i = \alpha_i$$

$$x_i \neq 0, \text{ 即 } c_i b_i \neq 0$$

$$\begin{cases} c_i \neq 0, \text{ 能观} \\ b_i \neq 0, \text{ 能控} \end{cases}$$

1、设有零极点对消，能控能观， $x_i \neq 0$, 即 $c_i b_i \neq 0$

$\begin{cases} c_i \neq 0, \text{能观} \\ b_i \neq 0, \text{能控} \end{cases}$

2、有零极点对消，就会存在 $\alpha_i = 0$

$$\alpha_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i) \frac{k \cdots (s - u_m)}{\cdots (s - \lambda_n)} = 0$$

如 $\lambda_1 = u_1, i = 1, \alpha_1 = 0$

即 $c_i b_i = 0$ $\begin{cases} c_i \neq 0, b_i = 0, \text{能观不能控} \\ c_i = 0, b_i \neq 0, \text{能控不能观} \\ c_i = 0, b_i = 0, \text{不能控, 不能观} \end{cases}$

机电工程系

由定理可得以下推论：

$G(s)$ 所表示的仅仅似乎该系统既能观测又能控的那一部分子系统，所以 $G(s)$ 是系统的一种不完整描述。 $G(s)$ 若有零极点对消，就会出现不能控或不能观。

二、**定理3.13**：对于多变量系统，系统能控又能观的充分条件是其传递函数阵 $G(s)$ 中无零极点对消。（不是必要条件）。