

第二章 控制系统状态空间表达式的解

1、对

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x(k+1) = G(k)x(k) + H(k)u(k) \\ y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k) \end{cases}$$

如何求解出 $x(t)$, $X(k)$, 分析动态过程

2、内容:

(1) 线性定常系统、时变系统、离散系统状态方程的解;

(2) 连续系统状态方程离散化。

2.1 线性定常系统齐次状态方程的解

由 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

当 $u(t) = 0$ $\dot{x}(t) - Ax(t) = 0$ 一阶齐次微分方程组

$t = t_0$ 初始状态为 $x(t_0)$

$t = 0$ 初始状态为 $x(0)$

自由解： 系统在没有输入的情况下，由初始状态引起的自由运动。

一、矩阵指数法：——关键求 e^{At}

设 $\dot{x}(t) - Ax(t) = 0$ 的解为：

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots, x(0) = b_0$$

$$\dot{x}(t) = b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \cdots + kb_k t^{k-1} + \cdots,$$

$\dot{x}(t) = Ax(t)$, 对应于 t 的同次幂系数相等

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= Ab_0, 2b_2 = Ab_1 \Rightarrow b_2 = \frac{1}{2} Ab_1 = \frac{1}{2} A^2 b_0 = \frac{1}{2!} A^2 b_0 \\ 3b_3 &= Ab_2 \Rightarrow b_3 = \frac{1}{3} Ab_2 = \frac{1}{3 \times 2!} A^3 b_0 = \frac{1}{3!} A^3 b_0, \cdots, \\ b_k &= \frac{1}{k!} A^k b_0 \end{aligned} \right\} b_0 = x(0)$$

$$\text{所以 } x(t) = \left[I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \cdots \right] x(0)$$

矩阵指数函数

因为 $e^{At} = 1 + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \cdots$

即 $e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \cdots$

则齐次状态方程的解 $X(t) = e^{At} X(0)$

当初始时刻为 t_0 ，则 $|X(t)|_{t=t_0} = X(t_0)$

解为： $X(t) = e^{A(t-t_0)} X(t_0)$

证明： $X(t_0) = e^{At_0} X(0)$ $X(0) = e^{-At_0} X(t_0)$

$X(t) = e^{At} X(0) = e^{At} e^{-At_0} X(t_0) = e^{A(t-t_0)} X(t_0)$

例2.1 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 求 e^{At}

$$e^{At} = e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}t} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}t + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}t^2 + \frac{1}{3!}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}t^3 + \frac{1}{4!}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}t^4 + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \cdots & t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \cdots \\ -t + \frac{1}{3!}t^3 - \frac{1}{5!}t^5 + \cdots & 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \cdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

例2.2 用状态变量法求解方程

$$\ddot{y} + y = 0 \quad y(t)|_{t=0} = y(0), \quad \dot{y}(t)|_{t=0} = \dot{y}(0)$$

解：选状态变量为 $x_1 = y \quad x_2 = \dot{y}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \end{bmatrix}$$

由例2.1知 $e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$

依 $x = e^{At} x(0)$

$$\text{解为 } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \cos t + \dot{y}(0) \sin t \\ -y(0) \sin t + \dot{y}(0) \cos t \end{bmatrix}$$

得原方程的解为：

$$y(t) = x_1(t) = y(0) \cos t + \dot{y}(0) \sin t$$

❖ 通过例2.1和例2.2要求着重理解求解状态方程的思路

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) \text{ 的解为} \\ x(t) &= e^{At}x(0)\end{aligned}$$

e^{At} 的性质

1.收敛： $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$ 对所有有限时间绝对收敛

2.可微： $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$

3.分解： $e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2}$

4.可逆： $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$

二、拉氏变换法

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

$$x(t)|_{t=0} = x(0)$$

$$sx(s) - x(0) = Ax(s)$$

$$sx(s) - Ax(s) = x(0)$$

$$[sI - A]x(s) = x(0)$$

$$x(s) = [sI - A]^{-1}x(0)$$

$$x(t) = L^{-1}x(s) = L^{-1}[sI - A]^{-1}x(0)$$

$$\text{即 } e^{At} = L^{-1}[sI - A]^{-1},$$

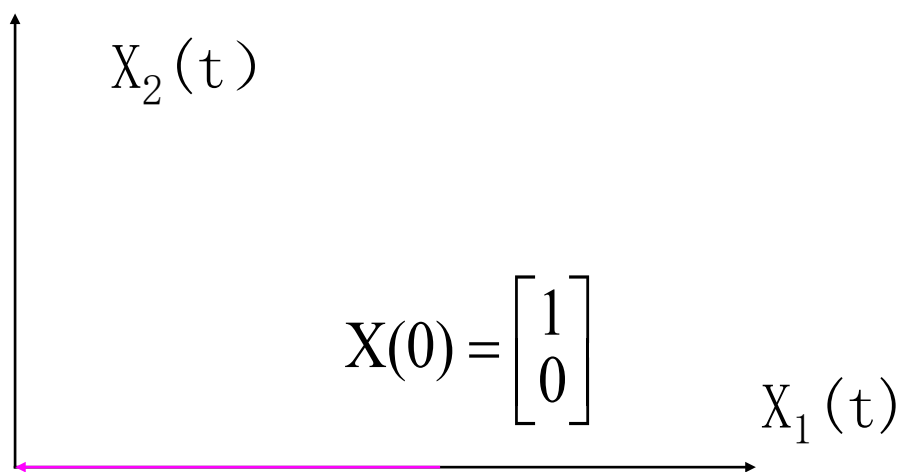
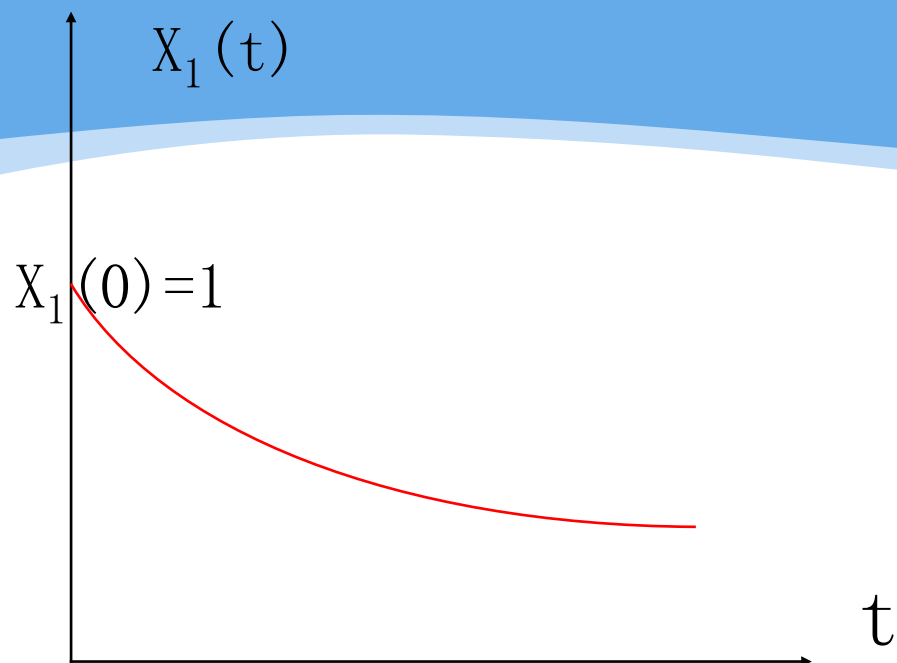
也可理解为求 e^{At} 的另一种方法

例2.3 已知 $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t)$ $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 求解。

解: $[sI - A] = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$

$$[sI - A]^{-1} = \frac{[sI - A]^*}{|sI - A|} = \frac{\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = L^{-1}[sI - A]^{-1} x(0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$$



2.2 状态转移矩阵

❖ 一、定义：

将 $\dot{X}(t) = AX(t)$ 的解写成 $X(t) = e^{At}X(0) = \Phi(t)X(0)$

$\Phi(t)$ 是满足 $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t), \Phi(0) = I$ 的 $n \times n$ 的矩阵

证明 $X(0) = \Phi(0)X(0) = IX(0) \quad \therefore \Phi(0) = I$

$\dot{X}(t) = \dot{\Phi}(t)X(0) = AX(t) = A\Phi(t)X(0)$

$\therefore \dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$

说明 $X(t) = \Phi(t)X(0)$ 是方程的唯一解

得： $\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$



意义：说明齐次方程的解仅是初始状态的转移。

$\Phi(t)$ 称为状态转移矩阵。线性定常方程 $\Phi(t)$ 即为 e^{At}

二、 $\Phi(t)$ 的几条重要性质

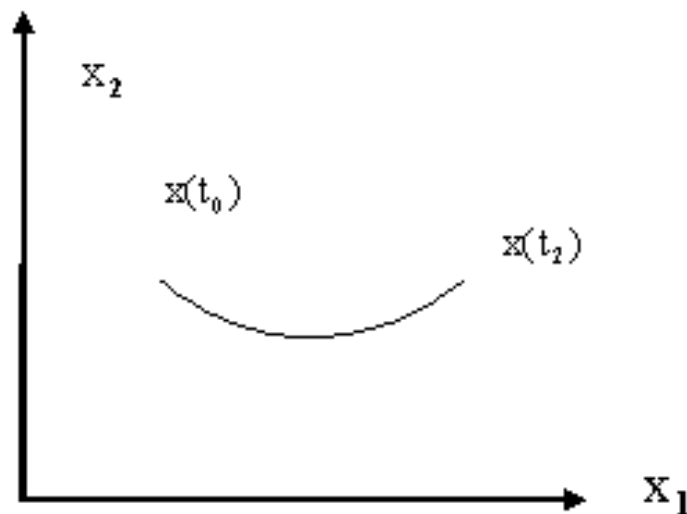
1. $\Phi(\mathbf{0}) = e^{A\mathbf{0}} = \mathbf{I}$

分解2. $\Phi(t_1 + t_2) = e^{A(t_1 + t_2)} = e^{At_1} e^{At_2}$

$$= \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)$$

有逆3. $\Phi(t) = e^{At} = (e^{-At})^{-1} = [\Phi(-t)]^{-1}$ 或 $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$

传递4、 $\phi(t_2 - t_1)\phi(t_1 - t_0) = \phi(t_2 - t_0)$ 称为传递性



有逆5、 $\phi(t - t_0)$ 必有逆，即 $\phi(t_0 - t)$
写成 $\phi^{-1}(t - t_0) = \phi(t_0 - t)$

$$6、[\phi(t)]^k = \phi(kt)$$

2.3 线性定常系统非齐次状态方程解

——在输入 $u(t)$ 作用下的强迫运动

$$\dot{x} = Ax + Bu \implies \dot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t)$$

同左乘 e^{-At}

$$e^{-At} [\dot{x}(t) - Ax(t)] = e^{-At} Bu(t)$$

$$\frac{d}{dt} [e^{-At} x(t)] = e^{-At} Bu(t)$$

两边积分

$$e^{-At} x(t) \Big|_0^t = \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

$$e^{-At} x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

$$x(t) = e^{At} x(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

$$\therefore x(t) = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau) Bu(\tau) d\tau$$

机电工程系

讨论

解由两部分组成

- 1、 $\phi(t)x(0)$ 为零输入解，表示初始状态引起的自由运动，或初始状态的转移项。
- 2、 $\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$ 表示由控制作用引起的强迫运动。
- 3、适当选择 $u(t)$ ，可使系统状态在状态空间获得满足要求的最佳轨迹
- 4、当初始时刻 $t = t_0$ 时，初始状态为 $x(t_0)$

$$x(t) = \phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$\phi(t - t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

2.4 线性时变系统状态方程的解

线性时变系统的状态方程为 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}$

(1) 不一定有解

(2) 当 $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$ 在定义区间绝对可积时，对每一初始态存在唯一解。

时变系统中 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 随 t 变化，如 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & t \end{bmatrix} \mathbf{x}$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad \mathbf{x}(t)|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0)$$

其解为： $\mathbf{x}(t) = \phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0)$

一、齐次矩阵微分方程的解

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad \mathbf{x}(t)|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0)$$

$$\text{其解为: } \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0)$$

$\boldsymbol{\phi}(t, t_0)$ 是 $n \times n$ 阶非奇异方阵，且满足

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t, t_0) = \mathbf{A}\boldsymbol{\phi}(t, t_0)$$

$$\boldsymbol{\phi}(t_0, t_0) = \mathbf{I}$$

证明：将解带入齐次方程,得

$$\frac{d}{dt}[\phi(t, t_0)x(t_0)] = A(t)\phi(t, t_0)x(t_0)$$

$$\text{即 } \dot{\phi}(t, t_0) = A(t)\phi(t, t_0)$$

$$\text{将 } t=t_0 \text{ 代入解中 } x(t_0) = \phi(t_0, t_0)x(t_0)$$
$$\therefore \phi(t_0, t_0) = I$$

$\therefore x(t) = \phi(t, t_0)x(t_0)$ 是齐次矩阵的解

❖ 讨论：

- ❖ 1. 齐次解与定常系统一样，也是初始状态的转移， $\varphi(t, t_0)$ 称为时变系统的状态转移矩阵。
- ❖ 2. 将定常系统中的 $\varphi(t)$, $\varphi(t-t_0)$ 改为 $\varphi(t, t_0)$ 定常系统可推广到时变系统。

二、非齐次矩阵微分方程的解

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

其解为: $\mathbf{x}(t) = \phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$

三，状态转移矩阵 $\varphi(t, t_0)$

1. $\phi(t, t_0)$ 与 $\phi(t)$ $\phi(t-t_0)$ 对比

共同：形式和性质类似

区别：本质不同，但 $\Phi(t, t_0)$ 既是 t 的函数，也是 t_0 的函数

即： $\Phi(t)$ 是 t 的函数 e^{At}

$\Phi(t-t_0)$ 是 $(t-t_0)$ 的函数 $e^{A(t-t_0)}$

2. $\Phi(t, t_0)$ 的计算式一展开成级数, 可用数值方法计算

$$\phi(t, t_0) = I + \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t A(\tau_1) \left[\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 \right] d\tau_1 + \cdots$$

证明: 两边各项求导, 可得

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t, t_0) &= A(t)\phi(t, t_0) \\ \phi(t_0, t_0) &= I + 0 + 0 + \cdots = I\end{aligned}$$

满足齐次解中的条件

2.5 离散时间系统状态方程的解

离散系统 $x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), x(k)|_{k=0} = x(0)$
 $y(k) = Cx(k) + Du(k)$

一、递推法（迭代法）

❖ 在方程中依次令 $k=0, 1, 2, \dots T=1$ 秒

$$x(1) = Gx(0) + Hu(0)$$

$$x(2) = Gx(1) + Hu(1) = G^2 x(0) + GHu(0) + Hu(1)$$

$$x(3) = Gx(2) + Hu(2) = G^3 x(0) + G^2 Hu(0) + GHu(1) + Hu(2)$$

...

方程解：

$$x(k) = G^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} Hu(j) \quad (k = 1, 2, 3, \dots j = 1, 2, 3, \dots)$$

$G^k x(0)$ — 表示初始状态 $x(0)$ 的组合，零输入响应

$\sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} Hu(j)$ — 表示输入作用 $u(j)$ 的组合，输入作用响应

讨论

❖ 参照齐次解 $x(t) = \Phi(t)x(0)$ $x(k) = G^k x(0)$, 状态转移阵 $\Phi(k) = G^k$, 且满足 $\Phi(k+1) = G\Phi(k)$ $\Phi(0) = I$, 描述系统由 $t=0$ 到 $t=kT$ 状态的转移。

$$x(k) = \phi(k)x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \phi(k-j-1)Hu(j)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

二、z变换法

- ❖ 对 $x(k+1)=Gx(k)+Hu(k)$
- ❖ z变换: $zx(z)-zx(0)=Gx(z)+Hu(z)$
- ❖ $(zI-G)x(z)=zx(0)+Hu(z)$
- ❖ $x(z)=[zI-G]^{-1}zx(0)+[zI-G]^{-1}Hu(z)$
- ❖ z反变换:
- ❖ **$x(k)=Z^{-1}[(zI-G)^{-1}z]x(0)+Z^{-1}[(zI-G)^{-1}Hu(z)]$**

例2. 4已知离散时间系统的状态方程

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}; H = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

试求当初始状态 $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, 控制作用为 $u(k)=1$ 时, 此系统 $\Phi(k)$ 和 $x(k)$

解: 根据定义 $\phi(k) = G^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}^k$

按上式直接计算 $\Phi(k)$ 有一定困难, 为此, 将原状态方程变换成约旦标准型, 即将 G 变换为对角线型。

令 $x(k) = T\tilde{x}(k)$ ，代入原式得

$$\tilde{x}(k+1) = T^{-1}GT\tilde{x}(k) + T^{-1}Hu(k)$$

相应地有 $T^{-1}GT = \Lambda; \tilde{\Phi}(K) = (T^{-1}GT)^k = \Lambda^k$

$$\tilde{x}(k) = \tilde{\Phi}(k)\tilde{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{\Phi}(j)T^{-1}Hu(k-j-1)$$

$$|\lambda I - G| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0.16 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 0.2)(\lambda + 0.8) = 0$$

$$\lambda_1 = -0.2; \lambda = -0.8$$

$$\therefore \Lambda = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix}; \tilde{\Phi}(k) = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} (-0.2)^k & 0 \\ 0 & (-0.8)^k \end{bmatrix}$$

又求得

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.2 & -0.8 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(k)T\tilde{\Phi}(k)T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.2 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-0.2)^k & 0 \\ 0 & (-0.8)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4(-0.2)^k - (-0.8)^k & 5[(-0.2)^k - (-0.8)^k] \\ -0.8[(-0.2)^k - (-0.8)^k] & -(-0.2)^k + 4(-0.8)^k \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Phi}(k)\tilde{x}(0) = \tilde{\Phi}(k)T^{-1}x(0) = \begin{bmatrix} (-0.2)^k & 0 \\ 0 & (-0.8)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -(-0.2)^k \\ 4(-0.8)^k \end{bmatrix}$$

该式右边第二项

$$\sum_{j=0}^{k-1} \tilde{\Phi}(j) T^{-1} H u(k-j-1) = \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{\Phi}(j) \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1]$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \begin{bmatrix} (-0.2)^j & 0 \\ 0 & (-0.8)^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{k-1} \begin{bmatrix} 3(-0.2)^j \\ -2(-0.8)^j \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3[1 + (-0.2) + (-0.2)^2 + \cdots + (-0.2)^{k-1}] \\ -2[1 + (-0.8) + (-0.8)^2 + \cdots + (-0.8)^{k-1}] \end{bmatrix}$$

$$\therefore \tilde{x}(k) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -(-0.2)^k \\ 4(-0.8)^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{0.4}[1 - (-0.2)^k] \\ -\frac{1}{0.9}[1 - (-0.8)^k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0.2)^k + \frac{5}{2} \\ \frac{22}{9}(-0.8)^k - \frac{10}{9} \end{bmatrix}$$

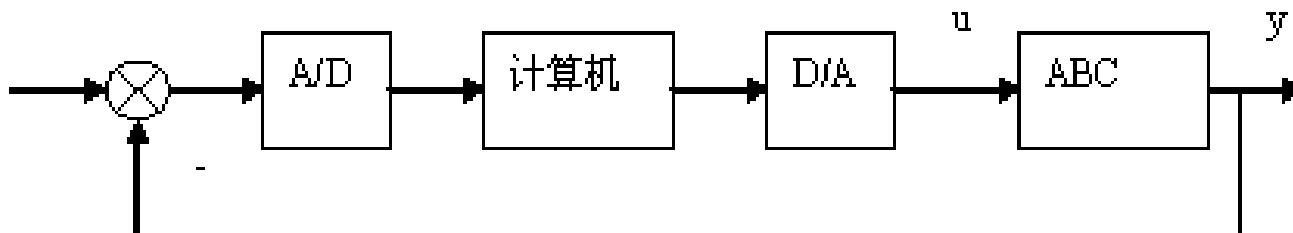
$$\begin{aligned}\therefore x(k) = T\tilde{x}(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.2 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0.2)^k + \frac{5}{2} \\ \frac{22}{9}(-0.8)^k - \frac{10}{9} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0.2)^k + \frac{22}{9}(-0.8)^k + \frac{25}{18} \\ \frac{3.4}{6}(-0.2)^k - \frac{17.6}{9}(-0.8)^k + \frac{7}{18} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

2.6 连续时间系统状态方程的离散化

- ❖ (1) 用计算机对连续时间系统状态方程求解
— 需先将其状态方程化为离散方程
- ❖ (2) 对连续受控对象进行计算机在线控制
— 受控对象模型离散化

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$



假设：(1) $t=kT$, T 为采样周期，且很小, $k=0,1,2,\dots$ 为一正整数

❖ (2) $u(t)$ 只在采样时离散化，即在 $kt \leq t \leq (k+1)T$, $u(t)=u(kT)=\text{常数}$ ，0阶保持

一、线性定常系统状态方程的离散化

—（按非齐次状态方程解，求出）

线性定常系统状态方程的解为：

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau$$

取 $t_0 = kT$, $t = (k+1)T$, $u(\tau) = u(kT) = \text{常数}$

$$x([(k+1)T]) = \Phi(T)x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \phi[(k+1)T - \tau]Bu(kT)d\tau$$

$$\text{令 } G(T) = \Phi(T) = e^{AT}$$

$$H(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T - \tau]} \cdot B d\tau$$

下限 $\tau = kT$, 相当于 $t = T$

上限 $\tau = (k+1)T$, 相当于 $t = 0$

$$\text{则: } H(T) = \int_0^T e^{AT} B dt = \int_0^T \Phi(t) B dt$$

$$\text{设 } t = (k+1)T - \tau, dt = -d\tau$$

得连续离散化方程:

$$x([(k+1)T]) = G(T)x(kT) + H(T)u(kT)$$

$$\text{即 } t = kT \text{ 时刻, } y(kT) = Cx(kT) + Du(kT)$$

离散后 C 与 D 不改变

将连续状态方程离散化步骤

- 1、求 $\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}[SI - A]^{-1}$
- 2、 $G(T) = \Phi(T) = \Phi(t)|_{t=T}$
- 3、求 $H(T) = \int_0^T e^{At} B dt$
- 4、求 $x[(k+1)T] = G(T)x(kT) + H(T)u(kT)$

例2.5 已知控制对象满足 $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$, 求其离散化方程

解:

$$(1) \Phi(t) = L^{-1}[SI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$(2) G(T) = \Phi(t)|_{t=T} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2(1 - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}$$

$$(3) H(T) = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & 1/2(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & 1/2(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(2T + e^{-2T} - 1) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \end{bmatrix} = [G(T)] \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + [H(kT)U(kT)]$$



❖ 说明:

- ❖ (1) 当T选定后（如T=0.5秒）G(t)和H(t)都是确定的系数矩阵
- ❖ (2) 离散化后得状态方程，可按递推法或Z变换法求出解

$$x(k) = \Phi(k)x(0) + \sum_{j=1}^{k-1} \Phi(k-j-1)Hu(j)$$

二、线性时变系统状态方程的离散化

- ❖ 按导数定义近似求出，也称近似计算方法。
假设 T 很小 $T \leq 0.1T_{\min}$ （最小时间常数），精度要求不高时，可用差商代替微商。

$$t = kT:$$

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

求取 $[kT, (k+1)T]$ 区间的导数

$$\dot{x}(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{x[(k+1)T] - x(kT)}{T}$$

$$\dot{x}(kT) = \frac{x[(k+1)T] - x(kT)}{T} = A(kT)x(kT) + B(kT)u(kT)$$

$$x[(k+1)T] = [I + TA(kT)]x(kT) + TB(kT)u(kT)$$

$$x[(k+1)T] = G^*(kT)x(kT) + H^*(kT)u(kT)$$

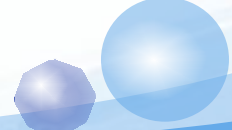
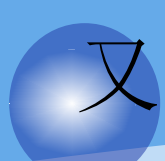
$$G^*(kT) = I + TA(kT)$$

$$H^*(kT) = TB(kT)$$

比较:

$$\text{当 } G^*(kT) = \Phi(T) = e^{AT} = I + AT + \frac{1}{2!}(AT)^2 + \dots \approx I + AT$$

T的值越小,近似程度越高


$$\text{又 } H^*(kT) = \int_0^T e^{At} B dt = \int_0^T \left[I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \dots \right] B dt$$

T很小,t就很小,将包含t的各式略去

$$= \int_0^T I \cdot B \cdot dt = BT$$

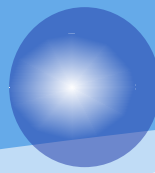
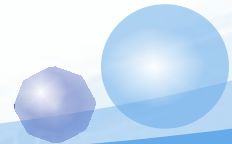
结论：上式为近似计算方法

例2.6 已知时变系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 5(1 - e^{-5t}) \\ 0 & 5(e^{-5t} - 1) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 5 & 5e^{-5t} \\ 0 & 5(1 - e^{-5t}) \end{bmatrix} u$$

试将它离散化，并求出输入和初始条件分别为

$u(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 时，方程在采样时刻的近似解



解法(1):离散化, 取 $T = 0.2$ 秒, $t = kT = 0.2k$

$$G^*(kT) = I + TA(kT) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0.2 \begin{bmatrix} 0 & 5(1 - e^{-k}) \\ 0 & 5(e^{-k} - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-k} \\ 0 & e^{-k} \end{bmatrix}$$

$$H^*(kT) = TB(kT) = 0.2 \begin{bmatrix} 5 & 5e^{-k} \\ 0 & 5(1 - e^{-k}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-k} \\ 0 & 1 - e^{-k} \end{bmatrix}$$

代入 $x[(k+1)T] = G^*(kT)x(kT) + H^*(kT)u(kT)$

得: 离散化方程为

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-k} \\ 0 & e^{-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & e^{-k} \\ 0 & 1 - e^{-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(kT) \\ u_2(kT) \end{bmatrix}$$

(2) 用递推法求离散方程的近似解:

取 $k=0, 1, 2, \dots$, $T=0.2$ 秒, 并代入输入函数和初始条件可得近似解:

$$\begin{bmatrix} x_1(0.2) \\ x_2(0.2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

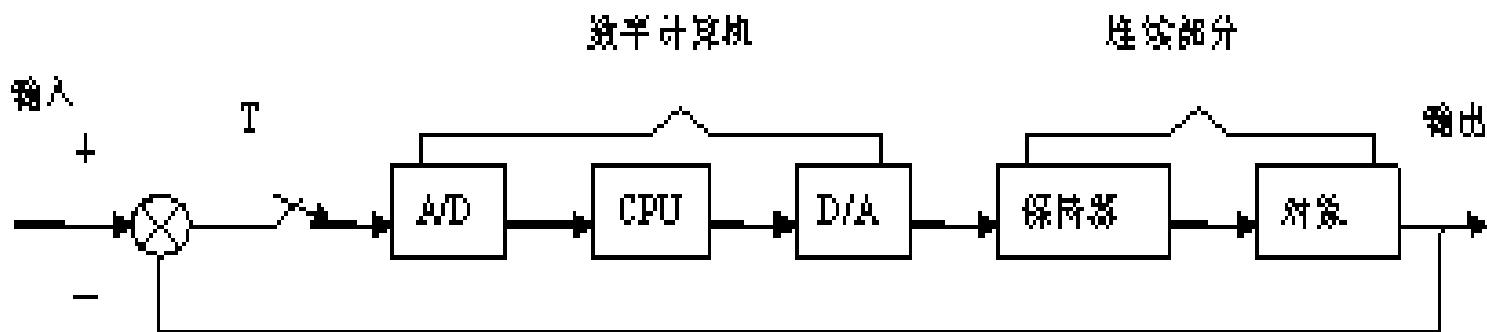
$$\begin{bmatrix} x_1(0.4) \\ x_2(0.4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.63 \\ 0 & 0.37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0.37 \\ 0 & 0.63 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.37 \\ 0.63 \end{bmatrix}$$

递推求下去

$$\begin{bmatrix} x_1(0.6) \\ x_2(0.6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.865 \\ 0 & 0.135 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.37 \\ 0.63 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0.135 \\ 0 & 0.865 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.05 \\ 0.95 \end{bmatrix}$$

三、计算机控制系统的状态空间表达式

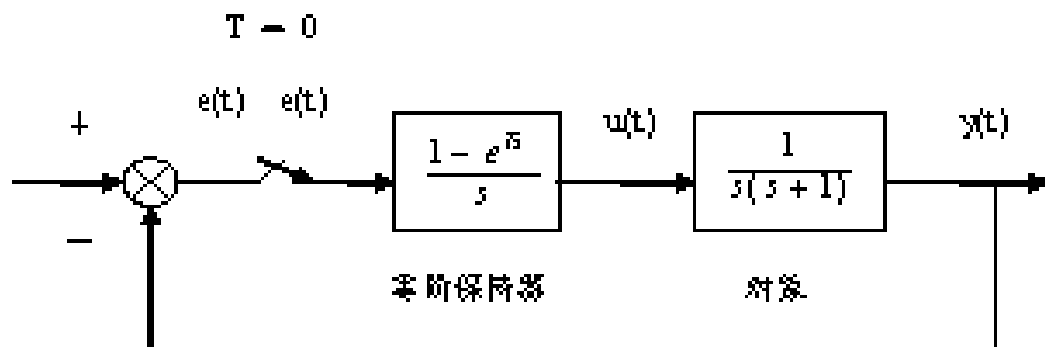
- ❖ (一) 计算机控制系统的组成
- ❖ 连续部分：保持和被控对象串联
- ❖ 离散部分：数字计算



- ❖ (二) 连续部分离散化，求被控对象离散化状态方程。

- ❖ （三）系统的离散化状态空间表达式：
- ❖ 根据系统结构确定系统的离散状态方程和输出方程。特点 $u(kT)=r(kT)-y(kT)=r(kT)-Cx(kT)$,

例2.7 求如图所示的计算机控制系统的状态方程



解：对象 $\frac{1}{s(s+1)}$ 的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

说明：

$u(t)$ 是零阶保持器的输出，即 $u(kT)=\text{常数}$ 满足假设，可离散化

方法1、线性定常系统离散化

$$(1)a、 e^{At} = L^{-1}[sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$b、 G^*(t) = e^{AT} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix}$$

$$c、 H^*(T) \int_0^T e^{AT} B dt = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} T + e^{-T} - 1 \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix}$$

$$d、 x[(k+1)T] = G^*(T)x(kT) + H^*(T)u(kT)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T + e^{-T} - 1 \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix} u(kT)$$

(2) 由 $u(kT)=r(kT)-y(kT)=r(kT)-x_1(kT)$ 代入, 得系统的离散化状态方程。

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)] \\ x_2[(k+1)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T+e^{-T}-1 \\ 1-e^{-T} \end{bmatrix} u(kT)$$

$$= \begin{bmatrix} 2-T-e^{-T} & 1-e^{-T} \\ e^{-T}-1 & e^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T+e^{-T}-1 \\ 1-e^{-T} \end{bmatrix} r(kT)$$

系统输出方程

$$y(kT) = x_1(kT) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}$$

令 $T=0.1$ 秒, 得系统离散化状态空间表达式

$$y(kT) = x_1(kT) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1)T \\ x_2(k+1)T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.995 & 0.095 \\ -0.095 & 0.905 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.095 \end{bmatrix} r(kT)$$

$$y(kT) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}$$

方法2、近似离散化 $A(kT)=A$ 定常 $B(kT)=B$

$$a、G^*(kT) = I + TA = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 - T \end{bmatrix}$$

$$b、H^*(kT) = TB = \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 - T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix} u(kT)$$

$$u(kT) = r(kT) - x_1(kT)$$

系统离散状态方程 ($T=0.1$)

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ -0.1 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} r(kT)$$

$$\text{输出 } y(kT) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}$$

可见 T 较小时，
两种方法得
状态空间表
达式近似相
等。

机电工程系

离散方程求解可按2.3递推法或Z变换求解



Thank You !