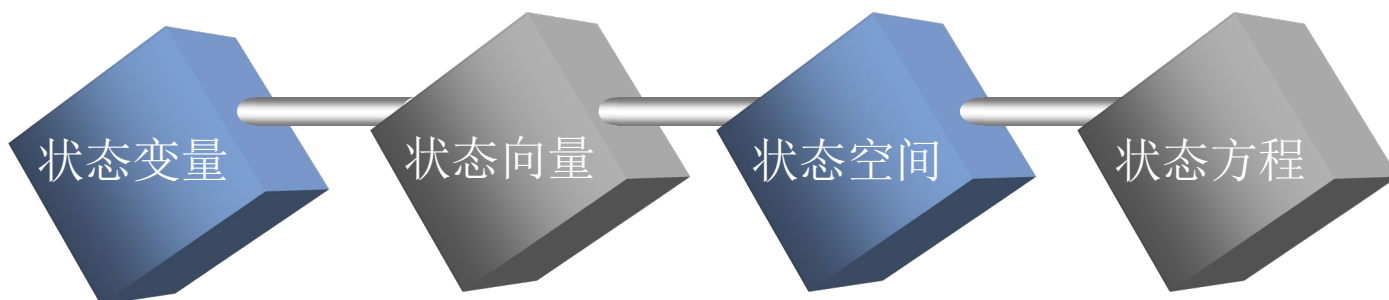


第一章 控制系统的状态表达式

- ❖ 系统的动态特性由状态变量构成的一阶微分方程组来描述，能同时给出系统全部独立变量的响应，因而能同时确定系统的全部内部运动状态。

1.1 状态空间表示法的基本概念



●状态：表征系统运动的信息和行为

●状态变量：能完全表示系统运动状态的最小个数的一组变量

由状态变量构成的向量
 $X(t)$

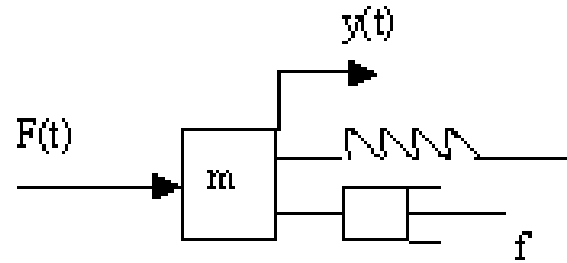
$$x(t)^T = [x_1(t), x_2(t), x_3(t) \dots x_4(t)]$$

以各状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, \dots x_n(t)$ 为坐标轴组成的几维空间。

由系统的状态变量与输入变量之间的关系构成的一阶微分方程组。

例1.1 设有一质量弹簧阻尼系统。试确定其状态变量和状态方程。

解:
$$F(t) - ky(t) - f \cdot \dot{y}(t) = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$
$$m\ddot{y}(t) + f \cdot \dot{y}(t) + ky(t) = F(t)$$



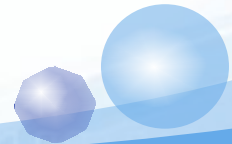
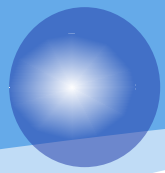
选 $y(t) = x_1(t)$ $\dot{y}(t) = x_2(t)$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) \dots \dots \dots (1)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{f}{m} \dot{y}(t) - \frac{k}{m} y(t) + \frac{1}{m} F(t) \dots \dots \dots (2)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m} x_1(t) - \frac{f}{m} x_2(t) + \frac{1}{m} F(t)$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -f/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} F(t)$$

状态方程的标准形式: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
(A: 系统矩阵 B: 输入矩阵)

线性定常系统: $\dot{x} = Ax + Bu$

输出方程

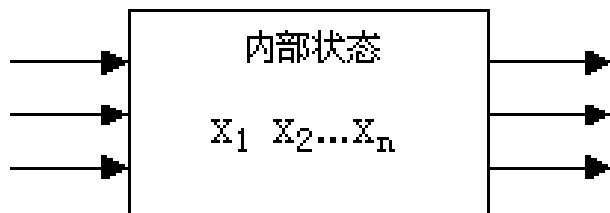
❖ 系统的输出量与状态变量之间的关系

$$y(t) = x_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (C: \text{输出矩阵})$$

状态空间表达式

- ❖ 状态方程和输出方程的总和即称为状态空间表达式。它构成对一个系统动态行为的完整描述。



$$\dot{x}(t) = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

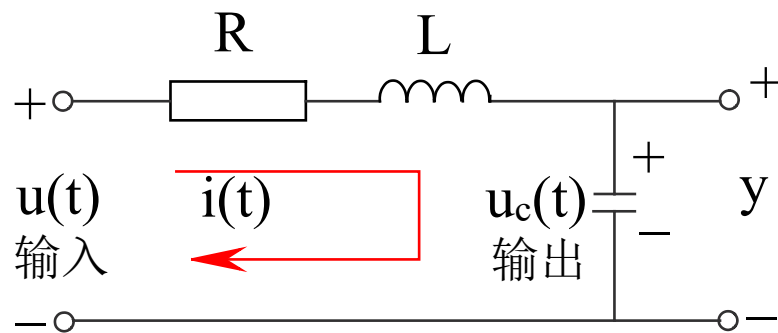
- Y:输出向量
- A:系数矩阵
- C:输出矩阵

- u:输入向量
- B:控制矩阵（输入矩阵）
- D:直接矩阵

❖ 例1.2求图示R-L-C网络的状态空间表达式

解:以 $i(t)$ 、 $u_c(t)$ 作为中间变量,
列写该回路的微分方程

$$\begin{cases} Ri + \frac{di}{dt} + U_c(t) = u(t) \\ U_c(t) = \frac{1}{c} \int i dt \end{cases}$$



选 $x_1 = i, x_2 = u_c(t)$ 为系统两状态变量，则

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u(t) \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 \\ y = x_2 = u_c(t) \end{array} \right.$$

写成矩阵-向量的形式为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

令 $x = [x_1 \quad x_2]^T$ 为状态向量

$$\text{则: } \dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{c} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = [0 \quad 1] x$$

1.2 状态空间表达式的模拟结构图

❖ 一、模拟结构图

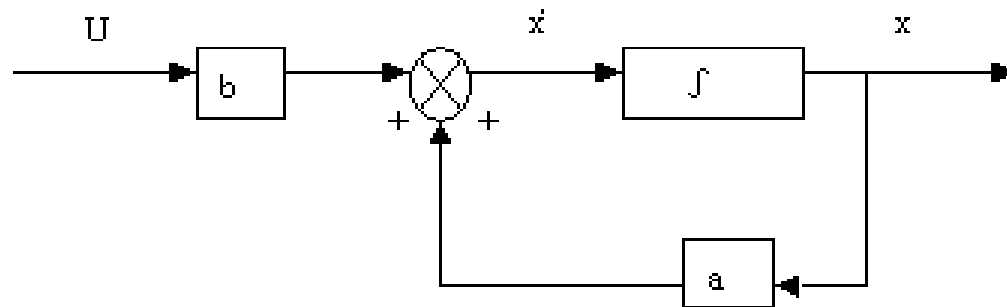
- ❖ 用来反映系统各状态变量之间的信息传递关系，对建立系统的状态空间表达式很有帮助。
- ❖ 用模拟结构图代替模拟计算机的详细模拟图。

二、绘制步骤

- 1、根据所给的输出方程，画出相应的加法器、比例器和状态变量；
- 2、积分器的数目应等于状态变量个数，将他们画在适当的位置，每个积分器的输出表示相应的某个状态变量
- 3、根据所给的状态方程，画出相应的加法器和比例器，最后用箭头将这些元件连接起来。

例1-2：一阶标量微分程： $\dot{x} = ax + bu$

模拟结构图：

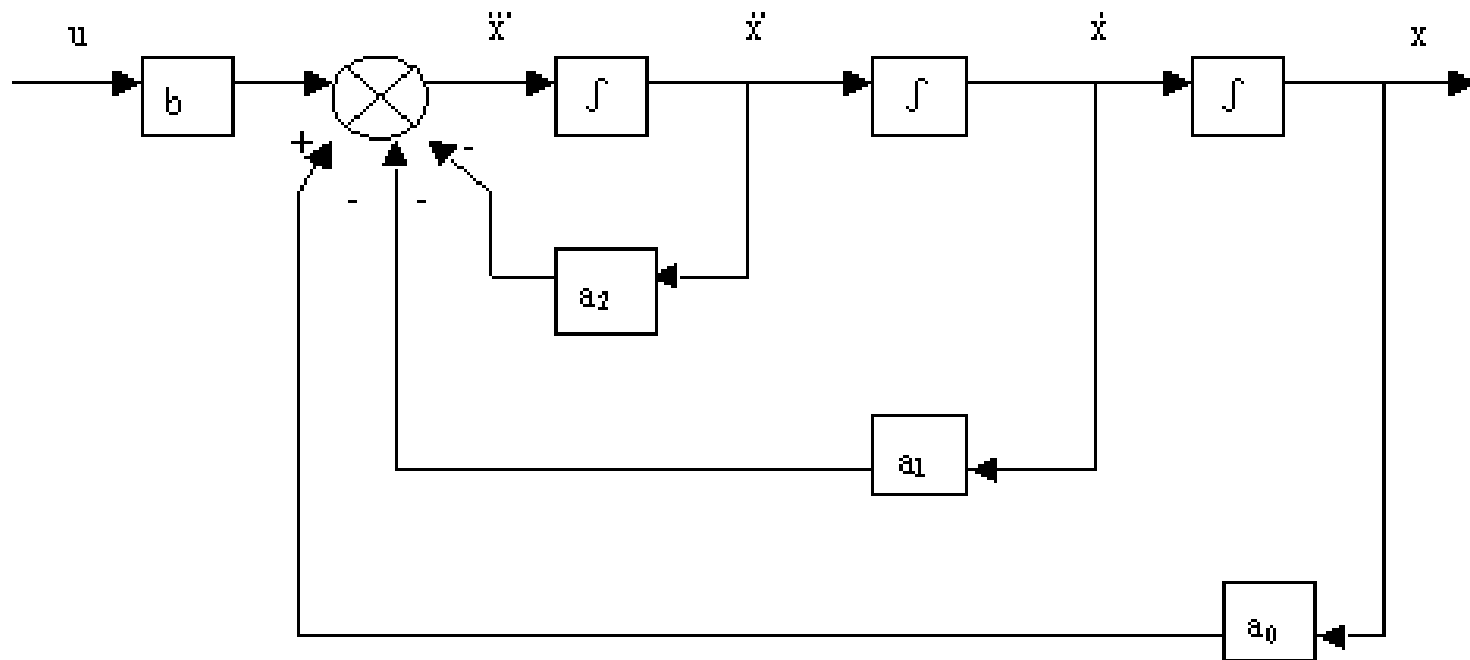


例1-3：三阶微分方程： $\ddot{x} = a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = bu$

将最高阶导数留在等式左边，上式可改成：

$$\ddot{x} = -a_0 x - a_1 \dot{x} - a_2 \ddot{x} + bu$$

其模拟结构图如下：



1.3 状态空间表达式的建立(方块图出发)

❖ 用状态空间分析系统时，首先要建立给定系统的状态空间表达式。建立表达式的三个方法如下：

1

由系统传递函数方块图来建立；

2

从系统的物理或化学的机理出发进行推导；

3

由描述系统运动过程的高阶微分方程或传递函数予以演化而得。

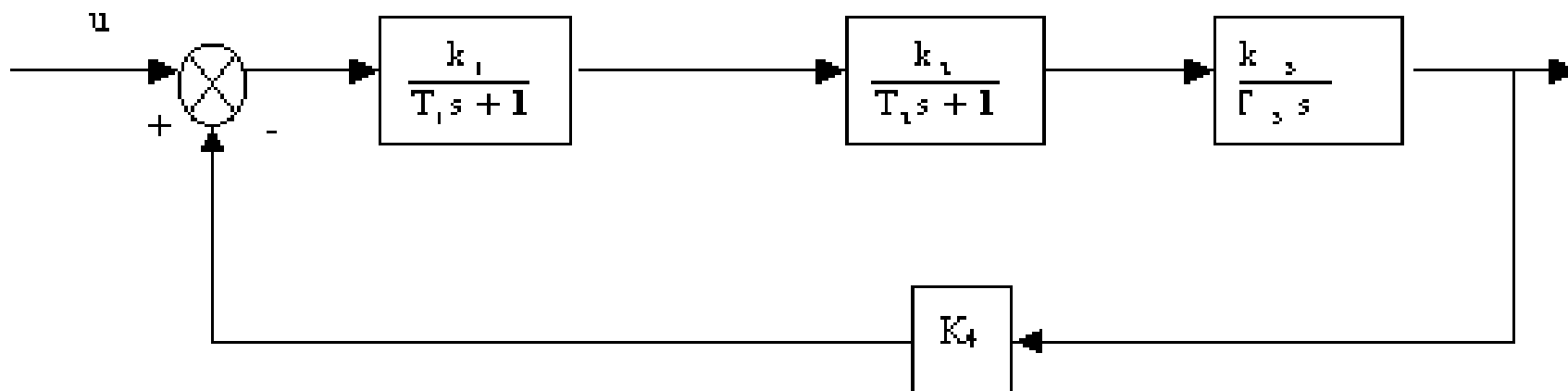
从系统方块图出发建立状态空间表达式

1. 将系统传递函数方块图的各个环节变换成相应的模拟图

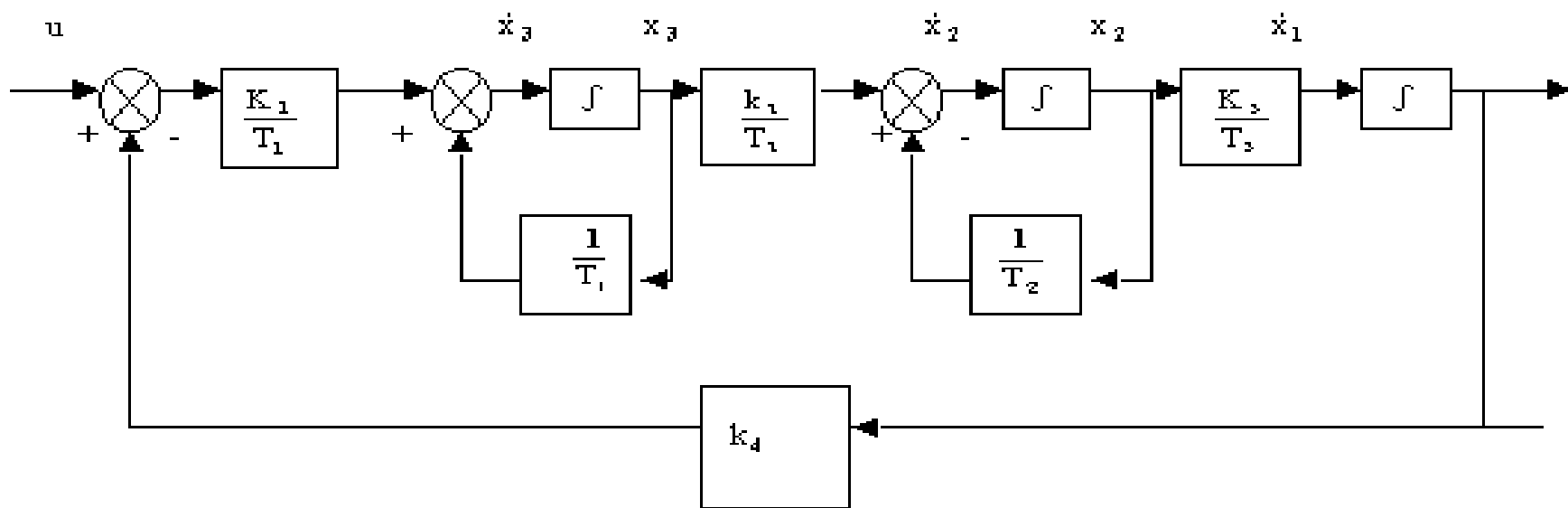
2. 把每个积分器的输出选作为一个状态变量 x_i ，其输入便是相应的 x_i'

3. 根据系统的实际连结，写出相应的状态空间表达式。

例1-4 系统传递函数方块图如图所示，输入为 u ，输出为 y 。试求其状态空间表达式。



❖ 各环节的模拟结构图如图所示:



从图可知

$$\dot{x}_1 = \frac{K_3}{T_3} x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T_2} x_2 + \frac{K_2}{T_2} x_3$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{T_1} x_3 - \frac{K_1 K_4}{T_1} x_1 + \frac{K_1}{T_1} u$$

$$y = x_1$$

状态方程

输出方程

❖ 写成向量矩阵形式，系统的状态空间表达式为：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{K_3}{T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & \frac{K_2}{T_2} \\ -\frac{K_1 K_4}{T_1} & 0 & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_1}{T_1} \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

1.4 状态空间表达式的建立

n阶常系数微分方程（单入单出）

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_0 u$$

一、化高阶微分方程为状态方程 (以输入函数不含有导数项情况为例)

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 u$$

U—输入

y—输出

1. 选状态变量x—选各阶导数

$$x_1 = y, x_2 = \dot{y}, \dots, x_n = y^{(n-1)}$$

2、建立 $\dot{x}$ 方程

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \dot{x}_n = y^n$$

$$y^n = -a_0 y - a_1 \dot{y} - \dots - a_{n-1} y^{n-1} + b_0 u$$

$$= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + b_0 u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

3、系统输出方程

$$y = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = CX \quad C = [\mathbf{1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0}]$$

二、能控标准型

- ❖ 1. A 的对角线上方的元素均为1, 最后一行为微分方程各阶导数的系数,其余为0。这样的矩阵叫做友阵, 具有友阵特征的变量称为相变量 (各个状态变量依次是变量 y 的各阶导数)。
- ❖ 2. b 阵的特征:
- ❖ A b 具有上述特征时系统为能控标准形

例1.3：系统方程为 $\ddot{y}+6\dot{y}+11y=6u$, 求系统的状态空间表达式。

解：选取 $x_1 = y, x_2 = \dot{y}, x_3 = \ddot{y}$

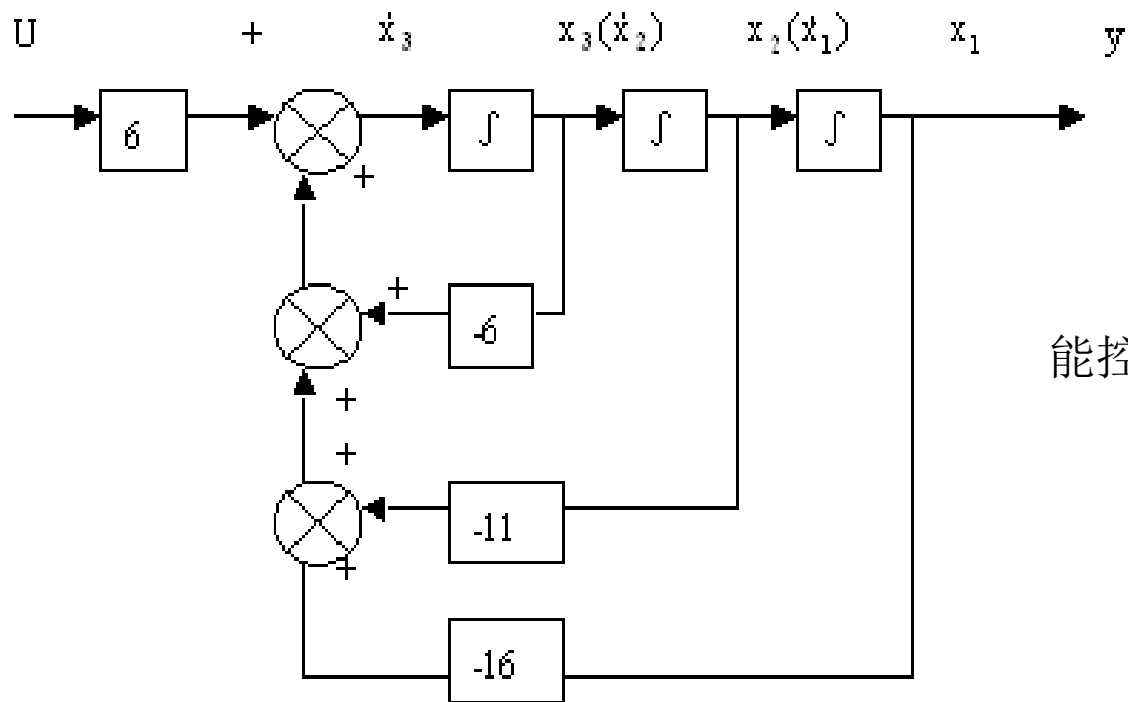
原方程可化为 $\ddot{y} = -16y - 11\dot{y} - 6\ddot{y} = 6u$

可得一阶微分方程组
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -6x_3 - 11x_2 - 16x_1 + 6u \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -16 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

❖ 状态方程和输出方程（模拟结构图）



能控标准型

能控性：是控制作用 $u(t)$ 支配系统 $x(t)$ 的能力

❖ 三、状态变量不唯一，高阶方程还可以化为能观测标准型

例1.3：系统方程为 $\ddot{y}+6\ddot{y}+11\dot{y}=6u$, 求系统的状态空间表达式。

解：由 $\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y = 6u$

设 $x_1 = \ddot{y} + 6\dot{y} + 11y$, $x_2 = \dot{y} + 6y$, $x_3 = y$

状态方程： $\dot{x}_1 = \ddot{y} + 6\dot{y} + 11y = 6u - 16y = 6u - 16x_3$

$\dot{x}_2 = \ddot{y} + 6\dot{y} = x_1 - 11y = x_1 - 11x_3$

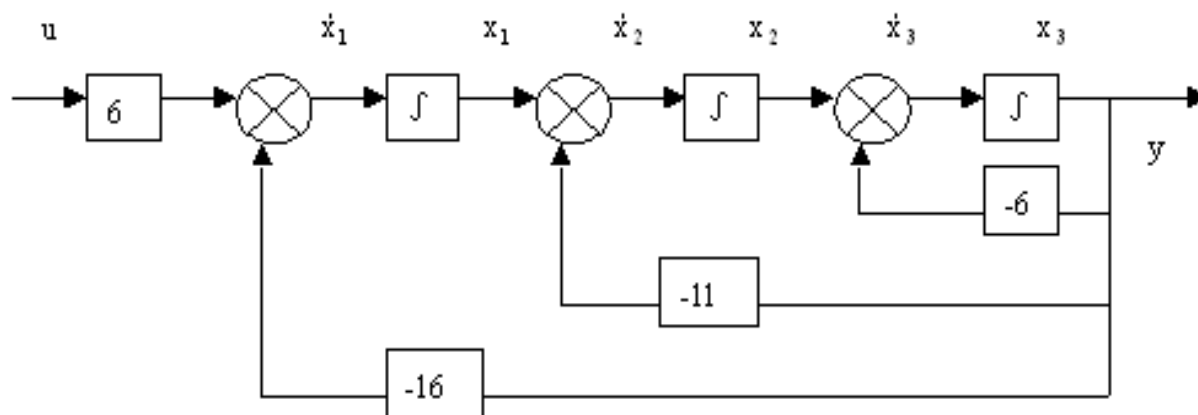
$\dot{x}_3 = \dot{y} = x_2 - 6x_3$

输出方程： $y = x_3$

矩阵形式:
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

模拟结构图



能观测标准型

- ❖ 能观测性是系统输出 $y(t)$ 放映系统状态向量 $x(t)$ 的能力， y 可反映 $x_1 \ x_2 \ x_3$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \dots 0 - a_0 \\ 1 & 0 \dots 0 - a_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \dots 1 - a_{n-1} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]$$

归纳

- ❖ (1) 能控标准型 A, b 与能观标准型 A, c 互为转置
- ❖ (2) 从上述两例可知, 状态变量选择不唯一, 但个数一定

1.5 由传递函数求状态方程

❖ 一、直接法

由 $y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_m u^m + b_{m-1}u^{m-1} + \dots + b_0u$

在初始条件下，求拉斯变换：

$$t = 0, y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = \dots = y^{(n)}(0)$$

$$S^n Y(s) + a_{n-1}S^{n-1}Y(s) + \dots + a_0Y(s) = b_m S^m u(s) + \dots + b_0u(s)$$

$$G(s) = Y(s) / U(s) = \frac{(b_m S^m + b_{m-1}S^{m-1} + \dots + b_0)}{(S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \dots + a_0)} = \frac{Y(s)}{Z(s)} \cdot \frac{Z(s)}{U(s)}$$

设 $n > m, n = m + 1$

$$\frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{1}{(S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \dots + a_0)}$$

$$S^n Z(s) + a_{n-1}S^{n-1}Z(s) + \dots + a_0Z(s) = U(s)$$

拉氏反变换

$$Z^{(n)} + a_{n-1}Z^{(n-1)} + \dots + a_0Z = u$$

$$x_1 = Z, x_2 = \dot{Z}, \dots, x_n = Z^{n-1}$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

可控标准型

其中 $x_1 = z, x_2 = \dot{z}, x_n = z^{n-1}$

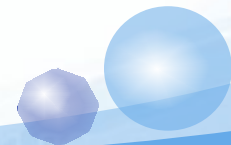
$$\frac{Y(s)}{Z(s)} = b_{n-1}S^{n-1} + b_{n-2}S^{n-2} + \dots + b_1S + b_0$$

$$Y(s) = b_{n-1}S^{n-1}Z(s) + b_{n-2}S^{n-2}Z(s) + \dots + b_1SZ(s) + b_0Z(s)$$

拉氏反变换

$$y = b_{n-1}Z^{n-1} + \dots + b_0Z = b_{n-1}x_n \dots + b_0x_1$$

$$y = Cx = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$



例1.4 准型

$$G(s) = \frac{4s^3 + 9s^2 + 14s + 23}{2s^3 + 4s^2 + 6s + 10}$$

求其能控标

解：（1）解决分母比分子高一阶

$$G(s) = 2 + \frac{s^2 + 2s + 2}{2s^3 + 4s^2 + 6s + 10}$$

将分母最高次幂变为1

$$G(s) = 2 + \frac{\frac{1}{2}s^2 + s + \frac{3}{2}}{s^3 + 2s^2 + 3s + 5} = \frac{Y(s)}{u(s)}$$

$$Y(s) = 2u(s) + \frac{\frac{1}{2}s^2 + s + \frac{3}{2}}{s^3 + 2s^2 + 3s + 5} u(s)$$

(2) 直接应用公式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 2u(t)$$

即 $y=Cx+Du$

D为直接矩阵，输入对输出的直接作用

说明：可按能控→能观的关系，直接写出能观标准型

带导数函数的微分方程，当 $m < n$, $m = n - 1$ 时，

$$y = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-1}]$$

例1.5 $\ddot{y} + 2\ddot{y} + 5\dot{y} + y = \ddot{u} + \dot{u} + 3u$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & -\mathbf{5} & -\mathbf{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} u$$

$$b_3 = \mathbf{0}$$

$$b_2 = \mathbf{1}$$

$$b_1 = \mathbf{1}$$

$$b_0 = \mathbf{3}$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

二、并联法

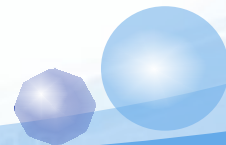
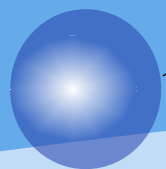
$$\frac{Y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{M(s)}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2) \cdots (s + \lambda_n)} \quad \begin{array}{l} \lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n) \\ \text{极点} \end{array}$$

$$= \frac{c_1}{s + \lambda_1} + \frac{c_2}{s + \lambda_2} + \cdots + \frac{c_n}{s + \lambda_n} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s + \lambda_i}$$

c_i 可通过拉氏变换求留数

$$c_i = \lim_{s \rightarrow -\lambda_i} G(s)(s + \lambda_i)$$

$$Y(s) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s + \lambda_i} u(s)$$



令 $x_i(s) = \frac{1}{s + \lambda_i} u(s)$ 反变换:

$$s x_i(s) + \lambda_i x_i(s) = u(s)$$

$$\dot{x}_i = -\lambda_i x_i + u$$

$$\dot{x}_1 = -\lambda_1 x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = -\lambda_2 x_2 + u$$

...

$$\dot{x}_n = -\lambda_n x_n + u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & & & \\ & -\lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & -\lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

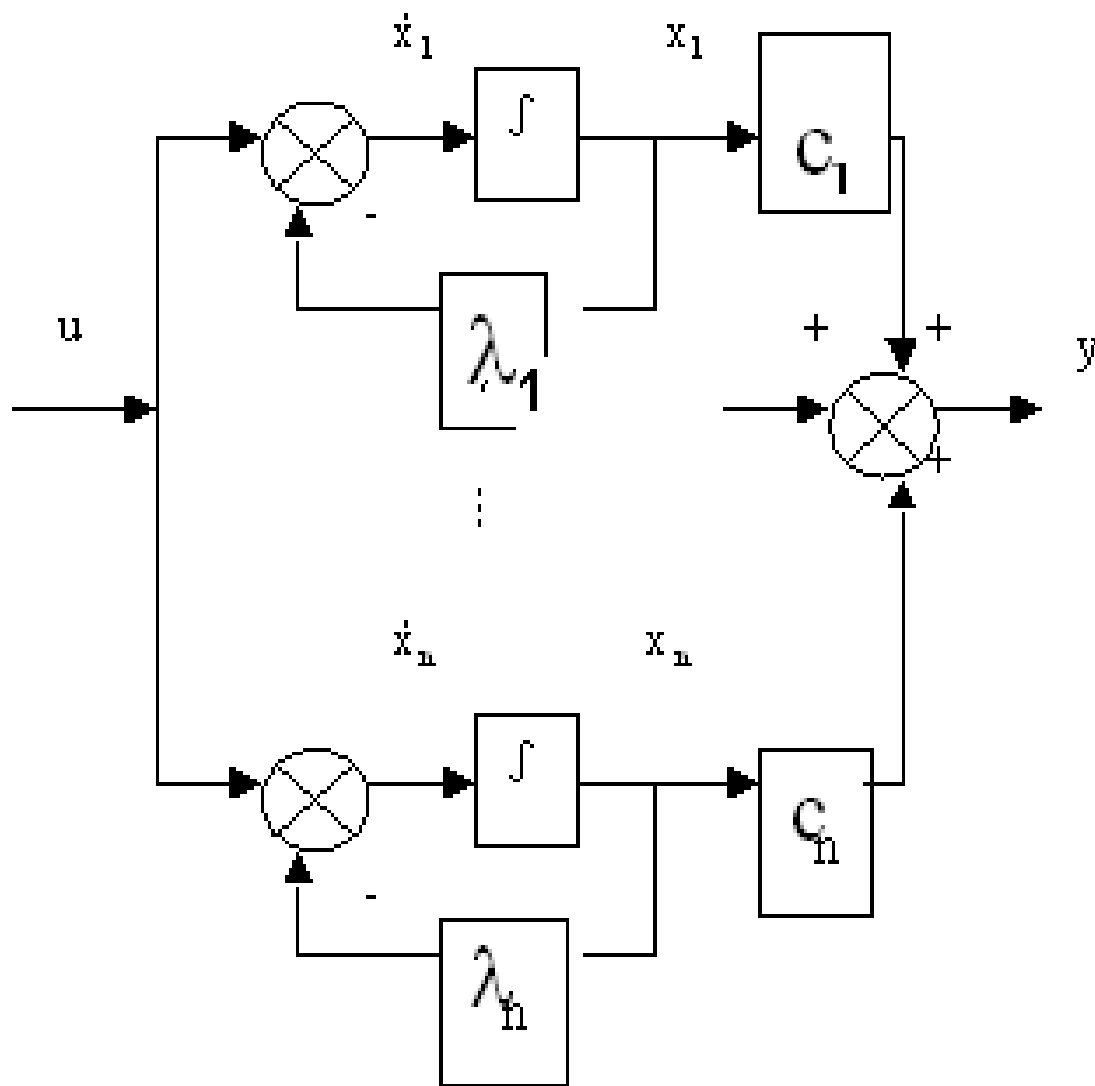


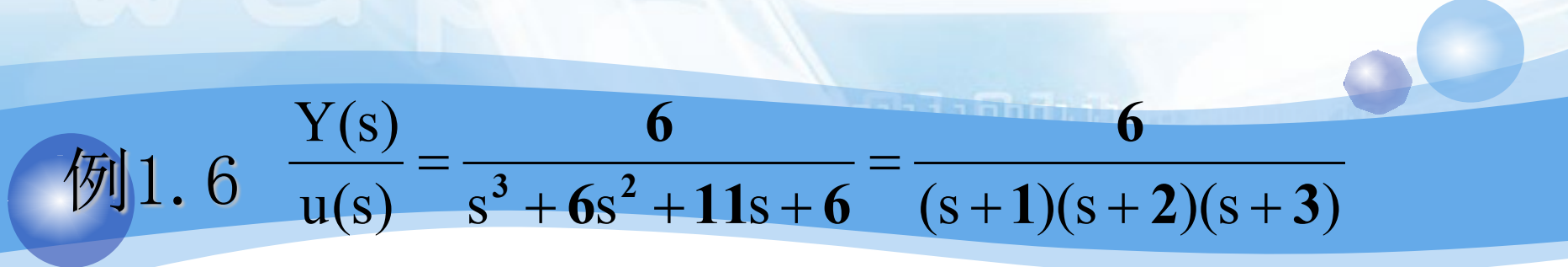
输出方程 $Y(s) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(s)$

$$y(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t) = [c_1 c_2 \cdots c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

特点：n个子系统互不相关，都是独立的，即解耦系统

解耦系统图形





例1.6 $\frac{Y(s)}{u(s)} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

展开为部分分式

$$= \frac{3}{s+1} + \frac{-6}{s+2} + \frac{3}{s+3}$$

可知: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$
 $c_1 = 3, c_2 = -6, c_3 = 3$

状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

机电工程系

1.6 由状态空间表达式求传递函数阵G(s)

一、传递函数（阵）

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

一般情况D=0, 假设相应变量的初始条件为0

拉氏变换:

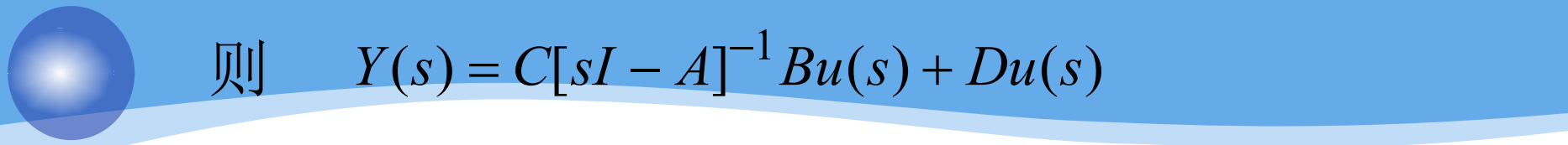
$$s\mathbf{x}(s) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{x}(s) + \mathbf{D}\mathbf{u}(s)$$

$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{A}\mathbf{x}(s) = \mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{x}(s) = \mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$

$$\mathbf{x}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$



则 $Y(s) = C[sI - A]^{-1}Bu(s) + Du(s)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{u(s)} = C[sI - A]^{-1}B + D$$

意义：建立现代与经典的关系，从现代的状态方程的ABCD可求出传递阵（函数）

例1.7 已知 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

解: $[sI - A] = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$

(SI-A) 伴随阵

$$[sI - A]^{-1} = \frac{1}{|sI - A|} [sI - A]^*$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

例1.8: 同上 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$

则 $G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$

可见A中对角线上是
 $G(s)$ 的极点

二 系统的特征方程和特征根

$$\begin{aligned} G(s) &= C[SI - A]^{-1} B + D \\ &= C \frac{[sI - A]^*}{|sI - A|} B + D \\ &= \frac{C[sI - A]^* B + |sI - A| D}{|sI - A|} \end{aligned}$$

系统的特征方程为 $|sI - A| = 0$

系统的特征值：即特征方程的根 $\lambda_i = (i = 1, 2 \cdots n)$
为古典的极点

即：**A**的特征多项式等于传递函数的分母多项式 $|\mathbf{SI}-\mathbf{A}|$

传递函数的极点就是系统矩阵**A**的特征值。系统进行非奇异变换（线性变换），特征值不变

1.7 离散系统的状态空间表达式

连续系统

- 用微分方程来表示，采用拉普拉斯变换传递函数进行分析。

对比

离散系统

- 用差分方程来描述，用 Z 变换脉冲传递函数进行分析。

离散系统的状态空间表达式
可通过差分方程或脉冲传递
函数。



❖ 离散系统的信号采用数字形式，输入和输出都是脉冲序列或数字序列。计算机控制系统属离散系统。

一、差分方程和脉冲传递函数

❖ 线性定常离散系统可用n次差分方程表示:

$$\begin{aligned} & y[(k+n)T] + a_{n-1}[(k+n-1)T] + \cdots + a_0 y(kT) \\ & = b_m u[(k+m)T] + b_{m-1} u[(k+m-1)T] + \cdots + b_0 u(kT) \\ & (k=0,1,\cdots,n;n \geq m) \end{aligned}$$

$$\text{由 } Z[x(k-m)] = z^{-m} x(z) \quad Z[(x(k))] = x(z)$$

脉冲传递函数:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{u(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

机电工程系

二、状态方程的建立

◆ 1、由差分方程

设 $T=1$ 输入仅有 (kT) 项, $b_0=1$ 整个方程可以写为:

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\dots+a_0y(k)=u(k)$$

设 $x_1(k)=y(k)$

$$x_2(k)=y(k+1)=x_1(k+1)$$

$$x_3(k)=y(k+2)=x_2(k+1)$$

.....

$$x_n(k)=y(k+n-1)=x_{n-1}(k+1)$$

$$x_n(k+1)=y(k+n)=-a_0 x_1(k)-a_1 x_2(k)-$$

$$\dots-a_{n-1}x_n(k)+u(k)$$

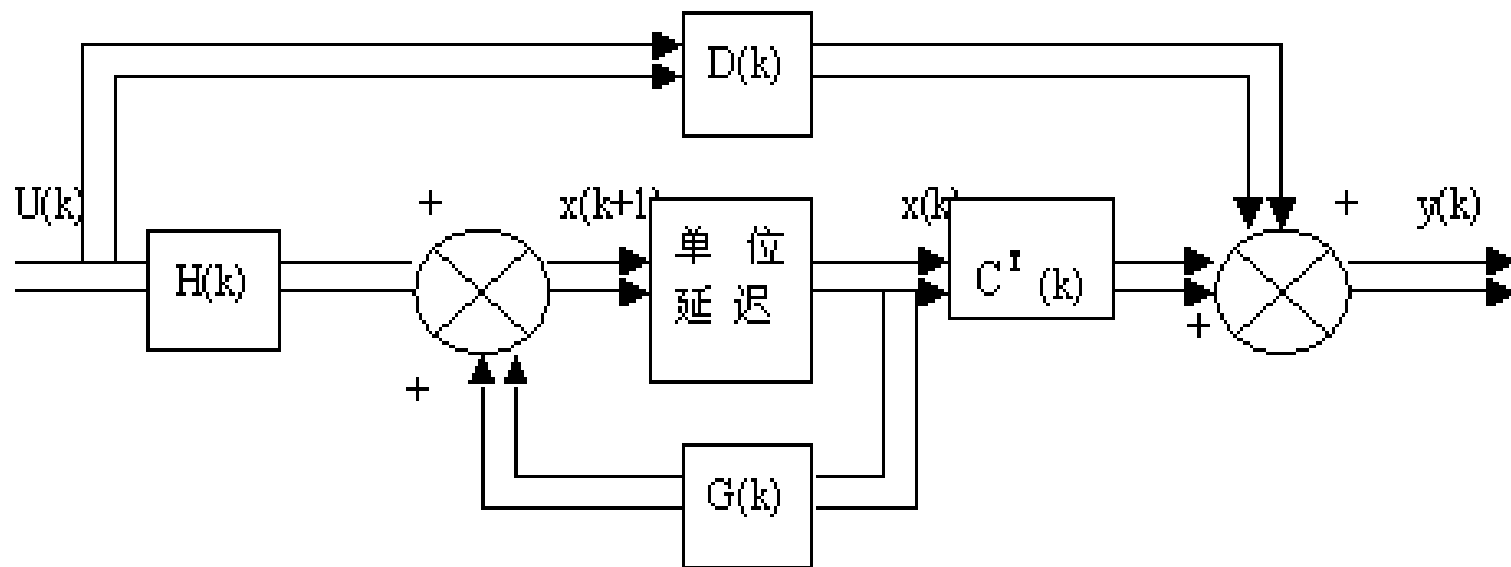
$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \dots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \dots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = x_1(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \dots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

向量矩阵形式

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

离散系统方块图



例1.9：已知离散系统的差分方程为

$Y(k+3)+2y(k+2)+5y(k+1)+6y(k)=u(k)$ 试写出其状态方程和输出方程。

$$\text{解: } \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = x(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

例1. 10 已知输入如下

$$y(k+3) + 2y(k+2) + 5y(k+1) + 6y(k) = 3u(k+2) + 2u(k+1) + 6u(k)$$

则，输出为：

$$y(k) = x(k) = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

本章小结

1

状态空间表达式概念、模拟结构图、可控可观标准型及变换.....●

2

化高阶微分方程为状态方程。.....●

3

直接法由 $G(s)$ 求状态方程。.....●

4

由差分方程求状态方程.....●

作业

1、已知系统微分方程，试将其变换为状态空间表达式, 并画出模拟结构图。

$$(1)\ddot{y} + 2\ddot{y} + 4\dot{y} + 6y = 2u$$

$$(2)\ddot{y} + 7\ddot{y} + 3y = \ddot{u} + 3\dot{u} + 2u$$

2、已知系统的 $G(s)$

$$G(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

建立状态空间表达式



3、已知离散系统的差分方程为

$$y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 2u(k+1) + 3u(k)$$

试求系统的状态空间表达式，并画出其模拟结构图。