

第一章习题答案

1-1 试求图 1-27 系统的模拟结构图，并建立其状态空间表达式。

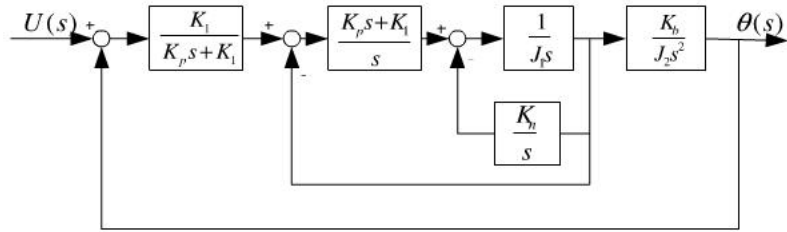


图1-27 系统方块结构图

解：系统的模拟结构图如下：

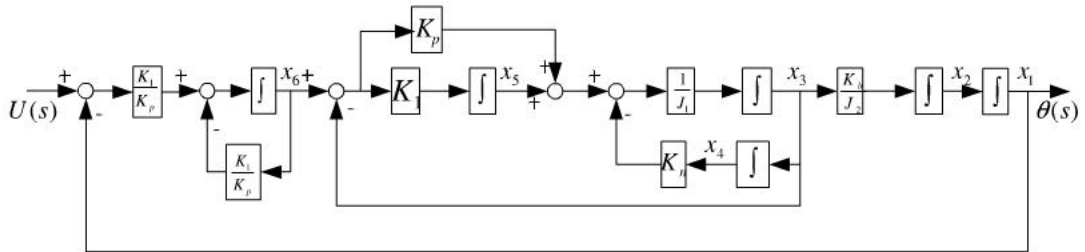


图1-30 双输入-双输出系统模拟结构图

系统的状态方程如下：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{K_b}{J_2} x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{K_p}{J_1} x_3 - \frac{K_n}{J_1} x_4 + \frac{1}{J_1} x_5 + \frac{K_p}{J_1} x_6 \\ \dot{x}_4 &= x_3 \\ \dot{x}_5 &= -K_1 x_3 + K_1 x_6 \\ \dot{x}_6 &= -\frac{K_1}{K_p} x_1 - \frac{K_1}{K_p} x_6 + \frac{K_1}{K_p} u \end{aligned}$$

令 $\theta(s) = y$ ，则 $y = x_1$

所以，系统的状态空间表达式及输出方程表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_b}{J_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{K_p}{J_1} & -\frac{K_n}{J_1} & \frac{1}{J} & \frac{K_p}{J_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_1 & 0 & 0 & K_1 \\ -\frac{K_1}{K_p} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{K_1}{K_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K_1}{K_p} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

1-2 有电路如图 1-28 所示。以电压 $u(t)$ 为输入量，求以电感中的电流和电容上的电压作为状态变量的状态方程，和以电阻 R_2 上的电压作为输出量的输出方程。

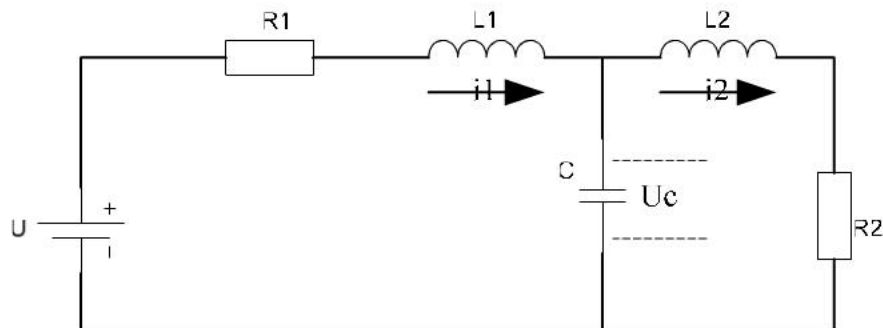


图1-28 电路图

解：由图，令 $i_1 = x_1, i_2 = x_2, u_c = x_3$ ，输出量 $y = R_2 x_2$

$$\begin{aligned} R_1 x_1 + L_1 \dot{x}_1 + x_3 &= u \\ \text{有电路原理可知: } L_2 \dot{x}_2 + R_2 x_2 &= x_3 \\ x_1 &= x_2 + C \dot{x}_3 \end{aligned} \quad \text{既得}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{R_1}{L_1} x_1 - \frac{1}{L_1} x_3 + \frac{1}{L_1} u \\ \dot{x}_2 &= -\frac{R_2}{L_2} x_2 + \frac{1}{L_2} x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{1}{C} x_1 + \frac{1}{C} x_2 \\ y &= R_2 x_2 \end{aligned}$$

写成矢量矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

1-3 参考例子 1-3 (P19) .

1-4 两输入 u_1 , u_2 , 两输出 y_1 , y_2 的系统, 其模拟结构图如图 1-30 所示, 试求其状态空间表达式和传递函数阵。

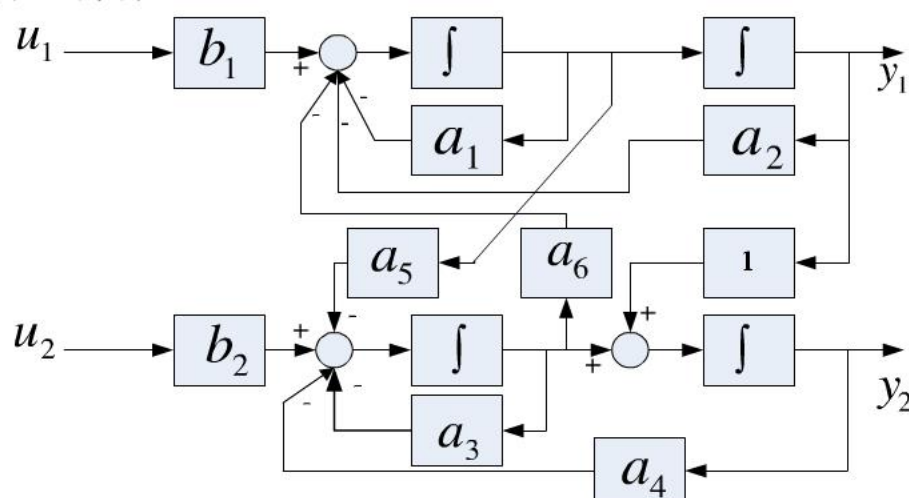


图1-30双输入--双输出系统模拟结构图

解: 系统的状态空间表达式如下所示:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & -a_1 & 0 & -a_6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_5 & -a_4 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & s + a_1 & 0 & a_6 \\ -1 & 0 & s & -1 \\ 0 & a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$W_{ux}(s) = (sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & s+a_1 & 0 & a_6 \\ -1 & 0 & s & -1 \\ 0 & a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$W_{uy}(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & s+a_1 & 0 & a_6 \\ -1 & 0 & s & -1 \\ 0 & a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1-5 系统的动态特性由下列微分方程描述

$$(2) \ddot{y} + 5\dot{y} + 7y = \ddot{u} + 3\dot{u} + 2u$$

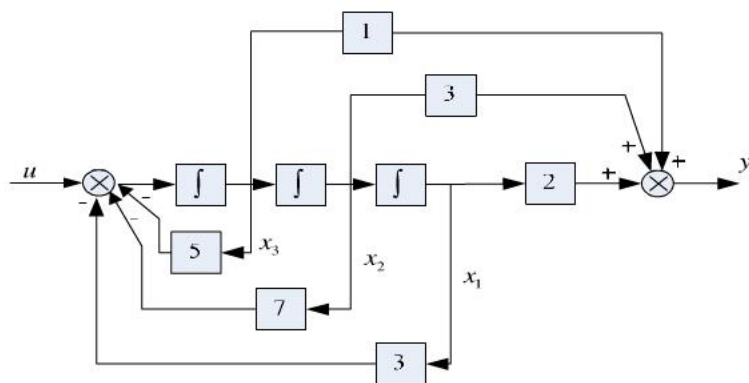
列写其相应的状态空间表达式，并画出相应的模拟结构图。

解：令 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \ddot{y}$ ，则有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -7 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

相应的模拟结构图如下：



1-6 (2) 已知系统传递函数 $W(s) = \frac{6(s+1)}{s(s+2)(s+3)^2}$ ，试求出系统的约旦标准型的实现，并画出相应的模拟结构图

$$\text{解： } W(s) = \frac{6(s+1)}{s(s+2)(s+3)^2} = \frac{-4}{(s+3)^2} + \frac{-\frac{10}{3}}{s+3} + \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -4 & -\frac{10}{3} & 3 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

1-7 给定下列状态空间表达式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(1) 画出其模拟结构图

(2) 求系统的传递函数

解：

$$(2) \quad W(s) = (sI - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 2 & s+3 & 0 \\ 1 & -1 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$|sI - A| = s(s+3)^2 + 2(s+3) = (s+3)(s+2)(s+1)$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+3)(s+2)(s+1)} \begin{bmatrix} (s+3)^2 & s+3 & 0 \\ -2(s+3) & s(s+3) & 0 \\ -s-5 & s-1 & (s+1)(s+2) \end{bmatrix}$$

$$W_{ux}(s) = (sI - A)^{-1} B = \frac{1}{(s+3)(s+2)(s+1)} \begin{bmatrix} (s+3)^2 & s+3 & 0 \\ -2(s+3) & s(s+3) & 0 \\ -s-5 & s-1 & (s+1)(s+2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+3)(s+2)(s+1)} \begin{bmatrix} (s+3) \\ s(s+3) \\ (2s+1)(s+3) \end{bmatrix}$$

$$W_{uy}(s) = C(sI - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+3) \\ s(s+3) \\ (2s+1)(s+3) \end{bmatrix} \frac{1}{(s+3)(s+2)(s+1)}$$

$$= \frac{(2s+1)}{(s+2)(s+1)}$$

1-8 求下列矩阵的特征矢量

$$(3) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -12 & -7 & -6 \end{bmatrix}$$

解: A 的特征方程 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -3 & \lambda & -2 \\ 12 & 7 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$

解之得: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$

当 $\lambda_1 = -1$ 时, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -12 & -7 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix}$

解得: $p_{21} = p_{31} = -p_{11}$ 令 $p_{11} = 1$ 得 $P_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(或令 $p_{11} = -1$, 得 $P_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$)

当 $\lambda_1 = -2$ 时, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -12 & -7 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix}$

解得: $p_{22} = -2p_{12}, p_{32} = \frac{1}{2}p_{12}$ 令 $p_{12} = 2$ 得 $P_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

(或令 $p_{12} = 1$, 得 $P_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$)

当 $\lambda_1 = -3$ 时, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -12 & -7 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix}$

解得: $p_{23} = -3p_{13}, p_{33} = 3p_{13}$ 令 $p_{13} = 1$ 得 $P_3 = \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$

1-9 将下列状态空间表达式化成约旦标准型 (并联分解)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

解: A 的特征方程 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda & -2 \\ -1 & 1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2 = 0$

$$\lambda_{1,2} = 3, \lambda_3 = 1$$

当 $\lambda_1 = 3$ 时, $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix}$

解之得 $p_{21} = p_{31} = p_{11}$ 令 $p_{11} = 1$ 得 $P_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

当 $\lambda_2 = 3$ 时, $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

解之得 $p_{12} = p_{22} + 1, p_{22} = p_{32}$ 令 $p_{12} = 1$ 得 $P_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

当 $\lambda_3 = 1$ 时, $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix}$

解之得 $p_{13} = 0, p_{23} = 2p_{33}$ 令 $p_{33} = 1$ 得 $P_3 = \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -5 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$CT = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -5 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} u \\ \text{约旦标准型} & \\ y &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tilde{x} \end{aligned}$$

1-10 已知两系统的传递函数分别为 $W_1(s)$ 和 $W_2(s)$

$$W_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ 0 & \frac{s+1}{s+2} \end{bmatrix} \quad W_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+4} \\ \frac{1}{s+1} & 0 \end{bmatrix}$$

试求两子系统串联联结和并联连接时，系统的传递函数阵，并讨论所得结果
解：（1）串联联结

$$\begin{aligned} W(s) = W_2(s)W_1(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+4} \\ \frac{1}{s+1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ 0 & \frac{s+1}{s+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+3)} & \frac{s^2+5s+7}{(s+2)(s+3)(s+4)} \\ \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

（2）并联联结

$$W(s) = W_1(s) \pm W_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ 0 & \frac{s+1}{s+2} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+4} \\ \frac{1}{s+1} & 0 \end{bmatrix}$$

1-11 （第3版教材）已知如图 1-22 所示的系统，其中子系统 1、2 的传递函数阵分别为

$$W_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \quad W_2(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求系统的闭环传递函数
解：

$$W_1(s)W_{21}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$I + W_1(s)W_2(s) = I + \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+1} & -\frac{1}{s} \\ 0 & \frac{s+3}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$[I + W_1(s)W_2(s)]^{-1} = \frac{s+1}{s+3} \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s+2} & \frac{1}{s} \\ 0 & \frac{s+2}{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s+2} & \frac{s+1}{s(s+3)} \\ 0 & \frac{s+2}{s+3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} W(s) &= [I + W_1(s)W_2(s)]^{-1}W_1(s) = \frac{s+1}{s+3} \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s+2} & \frac{1}{s} \\ 0 & \frac{s+2}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s} \\ s & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{s+1}{s+3} \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+2)(s+1)} & -\frac{1}{s} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & -\frac{s+1}{s(s+3)} \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1-11 (第2版教材) 已知如图 1-22 所示的系统, 其中子系统 1、2 的传递函数阵分别为

$$W_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s} \\ 2 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \quad W_2(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求系统的闭环传递函数

解:

$$W_1(s)W_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s} \\ 2 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s} \\ 2 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$I + W_1(s)W_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s} \\ 2 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+1} & -\frac{1}{s} \\ 2 & \frac{s+3}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$[I + W_1(s)W_1(s)]^{-1} = \frac{s(s+1)}{s^2+5s+2} \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s+2} & \frac{1}{s} \\ -2 & \frac{s+2}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 W(s) &= [I + W_1(s)W_1(s)]^{-1}W_1(s) = \frac{s(s+1)}{s^2+5s+2} \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s+2} & \frac{1}{s} \\ -2 & \frac{s+2}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & -\frac{1}{s} \\ s & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{s(s+1)}{s^2+5s+2} \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+2)^2} + \frac{2}{s} & -\frac{s+3}{s(s+2)} + \frac{1}{s(s+2)} \\ -\frac{2}{s+2} + \frac{2(s+2)}{s+1} & -\frac{2}{s} + \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{(s+1)^2(3s+8)}{(s+2)^2(s^2+5s+2)} & -\frac{s+1}{s^2+5s+2} \\ \frac{s^3+6s^2+6s}{(s+2)(s^2+5s+2)} & -\frac{s+2}{s^2+5s+2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

1-12 已知差分方程为

$$y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 2u(k+1) + 3u(k)$$

试将其用离散状态空间表达式表示，并使驱动函数 **u** 的系数 **b**(即控制列阵)为

$$(1) \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解法 1:

$$W(z) = \frac{2z+3}{z^2+3z+2} = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2}$$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

解法 2:

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = -2x_1(k) - 3x_2(k) + u$$

$$y(k) = 3x_1(k) + 2x_2(k)$$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} x(k)$$

$$\text{求 } T, \text{ 使得 } T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{得 } T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{所以} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$CT = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$$

所以，状态空间表达式为

$$z(k+1) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} z(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} z(k)$$

第二章习题答案

2-1、证明：由

$$\begin{aligned}
 e^{(A+B)t} &= I + (A+B)t + \frac{1}{2!}(A+B)^2 t^2 + \frac{1}{3!}(A+B)^3 t^3 + \dots \\
 &= I + (A+B)t + \frac{1}{2!}(A^2 + AB + BA + B^2)t^2 + \dots \\
 &\quad + \frac{1}{3!}(A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3)t^3 + \dots \\
 e^{At} \cdot e^{Bt} &= (I + At + \frac{1}{2!}A^2 t^2 + \frac{1}{3!}A^3 t^3 + \dots) (I + Bt + \frac{1}{2!}B^2 t^2 + \frac{1}{3!}B^3 t^3 + \dots) \\
 &= I + (A+B)t + \frac{1}{2!}(A^2 + 2AB + B^2)t^2 + \dots \\
 &\quad + (\frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{2!}A^2B + \frac{1}{2!}AB^2 + \frac{1}{3!}B^3)t^3 + \dots
 \end{aligned}$$

将以上二式相减，得

$$e^{(A+B)t} - e^{At} \cdot e^{Bt} = \frac{1}{2}(BA - AB)t^2 + \frac{1}{3}(BA^2 + ABA + B^2A + BAB - 2A^2B - 2AB^2)t^3 + \dots$$

显然，只有 $AB = BA$ ，才有

$$e^{(A+B)t} - e^{At} \cdot e^{Bt} = 0;$$

$$\text{即 } e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt} \quad \#$$

2-2、证明：(2-17)

$$\text{由 } e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2 t^2 + \frac{1}{3!}A^3 t^3 + \dots$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 t & & & \\ & \lambda_2 t & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2!}\lambda_1 t^2 & & & \\ & \frac{1}{2!}\lambda_2 t^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2!}\lambda_n t^2 \end{bmatrix} + \dots \\
 &= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_1^k t^k & & & \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_2^k t^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_n^k t^k \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad \#
 \end{aligned}$$

证明: (2-18)

$$\text{由 } e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots;$$

知 $\exists$ 可逆阵 p , 使 $p^{-1}Ap = \Lambda$, 则 $A = p\Lambda p^{-1}$, 且 $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ 是特征根,
可知

$$e^{At} = p \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_1^k t^k & & & \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_2^k t^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_n^k t^k \end{bmatrix} p^{-1}$$

$$= p \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} p^{-1} \quad \#$$

另证: 由 $\dot{x} = Ax$

若 A 可对角化, 则 $\exists$ 一变换阵 p , 定义

$$x = p\hat{x}, \text{ 则}$$

$$\dot{\hat{x}} = p^{-1}Ap\hat{x} = \Lambda\hat{x}$$

$$\text{其中 } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix};$$

其解为:

$$\hat{x}(t) = e^{\Lambda t} \hat{x}(0);$$

$$x(t) = p\hat{x}(t) = pe^{\Lambda t} p^{-1}x(0);$$

又由 $x(t) = e^{At}x(0)$;

$$\text{故 } e^{At} = pe^{\Lambda t} p^{-1} \quad \#$$

注意到

$$e^{A_1 t} = I + A_1 t + \frac{1}{2!} A_1^2 t^2 + \frac{1}{3!} A_1^3 t^3 + \dots \quad (1) \text{ 将}$$

由

$$A_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_1 \end{bmatrix},$$

于是有

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 2\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1^2 \end{bmatrix};$$

$$A_1^3 = \begin{bmatrix} \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & 3\lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & 3\lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1^3 \end{bmatrix}$$

将以上求得的 A_1 及其 A_1 诸次方的表达式代入 (1) 式, 令 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_1^k t^k = \Psi$ 有

$$e^{A_1 t} = \begin{bmatrix} \Psi & \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 \Psi}{2! \partial \lambda_1^2} & \dots & \frac{\partial^{m-1} \Psi}{(m-1)! \partial \lambda_1^{m-1}} \\ 0 & \Psi & \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} & \dots & \frac{\partial^{m-2} \Psi}{(m-2)! \partial \lambda_1^{m-2}} \\ 0 & 0 & \Psi & \dots & \frac{\partial^{m-3} \Psi}{(m-3)! \partial \lambda_1^{m-3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Psi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda_1 t} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} & \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} e^{\lambda_1 t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & \dots & \frac{t^{m-3}}{(m-3)!} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} = e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{m-3}}{(m-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

这是第 i 个小块的情况, 其余小块类似, 得证。#

证明: (2-20)

采用拉氏变换法:

$$e^{At} = L^{-1}((sI - A)^{-1})$$

而

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s - \sigma & \omega \\ -\omega & s - \sigma \end{bmatrix} / ((s - \sigma)^2 + \omega^2)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - \sigma + j\omega} + \frac{1}{s - \sigma - j\omega} \right) & \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - \sigma - j\omega} - \frac{1}{s - \sigma + j\omega} \right) \\ -\frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - \sigma - j\omega} - \frac{1}{s - \sigma + j\omega} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - \sigma + j\omega} + \frac{1}{s - \sigma - j\omega} \right) \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = L^{-1}((sI - A)^{-1})$$

$$= e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) & \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \\ -\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) & \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \end{bmatrix}$$

由 Euler 公式, 有

$$e^{At} = e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \quad \#$$

2-4 用三种方法计算以下矩阵指数函数 e^{At} 。

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

解: 第一种方法: 令 $|\lambda I - A| = 0$

$$\text{则} \quad \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{即} \quad (\lambda - 1)^2 - 4 = 0.$$

求解得到 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$

$$\text{当 } \lambda_1 = 3 \text{ 时, 特征矢量 } p_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix}$$

$$\text{由 } Ap_1 = \lambda_1 p_1, \text{ 得 } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3p_{11} \\ 3p_{21} \end{bmatrix}$$

$$\text{即 } \begin{cases} p_{11} + p_{21} = 3p_{11} \\ 4p_{11} + p_{21} = 3p_{21} \end{cases}, \text{ 可令 } p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

当 $\lambda_2 = -1$ 时, 特征矢量 $p_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix}$

$$\text{由 } Ap_2 = \lambda_2 p_2, \text{ 得 } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_{12} \\ -p_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{即 } \begin{cases} p_{12} + p_{22} = -p_{12} \\ 4p_{12} + p_{22} = -p_{22} \end{cases}, \text{ 可令 } p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{则 } T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} \\ e^{3t} + e^{-t} & \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}$$

第二种方法, 即拉氏反变换法:

$$sI - A = \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ -4 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A]^{-1} = \frac{1}{(s-3)(s+1)} \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 4 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s-1}{(s-3)(s+1)} & \frac{1}{(s-3)(s+1)} \\ \frac{4}{(s-3)(s+1)} & \frac{s-1}{(s-3)(s+1)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-3} + \frac{1}{s+1} \right) & \frac{1}{4} \left(\frac{1}{s-3} + \frac{1}{s+1} \right) \\ \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s+1} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-3} + \frac{1}{s+1} \right) \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}$$

第三种方法, 即凯莱—哈密顿定理

由第一种方法可知 $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} \partial_0 \\ \partial_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{3t} + \frac{3}{4}e^{-t} \\ \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \left(\frac{1}{4}e^{3t} + \frac{3}{4}e^{-t} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{4}e^{3t} + \frac{3}{4}e^{-t} \right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}$$

2-5 下列矩阵是否满足状态转移矩阵的条件, 如果满足, 试求与之对应的 A 阵。

$$(3) \quad \Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - 2e^{-t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix} \quad (4) \quad \Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{3t}) & \frac{1}{4}(-e^{-t} + e^{3t}) \\ -e^{-t} + e^{3t} & \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{3t}) \end{bmatrix}$$

解: (3) 因为 $\Phi(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$, 所以该矩阵满足状态转移矩阵的条件

$$A = \dot{\Phi}(t) \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -4e^{-2t} + 2e^{-t} \\ -e^{-t} + 2e^{-2t} & -4e^{-2t} + e^{-t} \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

(4) 因为 $\Phi(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$, 所以该矩阵满足状态转移矩阵的条件

$$A = \dot{\Phi}(t) \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{3t} & \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{3t} \\ e^{-t} + 3e^{3t} & -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{3t} \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

2-6 求下列状态空间表达式的解:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = (1, 0)x$$

初始状态 $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 输入 $u(t)$ 时单位阶跃函数。

$$\text{解: } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}[(sI-A)^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{因为 } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u(t) = I(t)$$

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} t+1 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} t-\tau \\ 1 \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} t+1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 + t + 1 \\ t + 1 \end{bmatrix}$$

$$y = [1 \quad 0]x = \frac{1}{2}t^2 + t + 1$$

2-7 考虑如下式给出的系统：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

证明：(1) 脉冲响应： $u(t) = K\delta(t)$ ， $x(0_-) = x_0$ 时，

由状态方程解为：

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

把 $t_0 = 0_-$ 带入，有

$$x(t) = e^{At} x(0_-) + \int_{0_-}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

带入 $u(t) = K\delta(t)$ ，有

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x(0_-) + \int_{0_-}^t e^{A(t-\tau)} BK\delta(\tau) d\tau \quad (\text{考虑到 } \delta \text{ 函数的特点}) \\ &= e^{At} x_0 + e^{At} BK \end{aligned}$$

(2) 阶跃响应：

由状态方程解为：

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

把 $t_0 = 0_-$ 带入，有

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x(0_-) + \int_{0_-}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \\ &= e^{At} x_0 + e^{At} \int_{0_-}^t (I - A\tau + \frac{A^2\tau^2}{2!} - \dots) d\tau BK, \text{ 积分, 有} \end{aligned}$$

$$\text{上式得} = e^{At}x_0 + e^{At}\left(It - \frac{At^2}{2!} + \frac{A^2t^3}{3!} - \dots\right)BK$$

$$= e^{At}x_0 + e^{At}[-(A^{-1})(e^{-At} - I)]BK$$

$$= e^{At}x_0 + A^{-1}(e^{At} - I)BK$$

(3) 斜坡响应:

由状态方程解为:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

把 $t_0 = 0_-$, $u(t) = kt \times 1(t)$ 带入, 有

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(0_-) + \int_{0_-}^t e^{A(t-\tau)}k\tau BK \\ &= e^{At}x_0 + e^{At} \int_{0_-}^t \left(I - A\tau + \frac{A^2\tau^2}{2!} - \dots\right)k\tau BK \\ &= e^{At}x_0 + e^{At} \left(\frac{k}{2}t^2 - \frac{2A}{3!}t^3 + \frac{3A^2t^4}{4!} - \dots\right)BK \\ &= e^{At}x_0 + A^{-2}(e^{At} - I - At)BK \\ &= e^{At}x_0 + [A^{-2}(e^{At} - I) - A^{-1}t]BK \end{aligned}$$

2-8 (略)

2-9 有系统如图 2.2 所示, 试求离散化的状态空间表达式。设采样周期分别为 $T=0.1s$ 和 $1s$, 而 u_1 和 u_2 为分段常数。

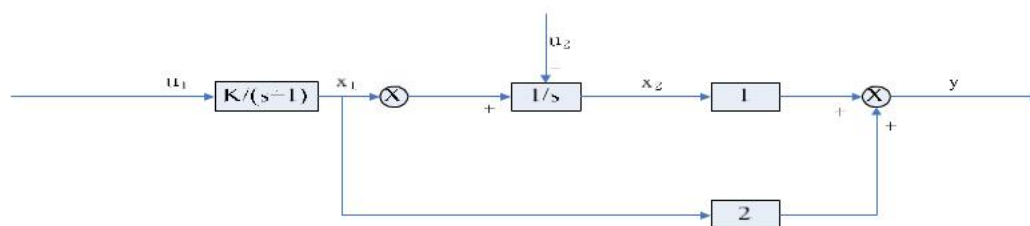
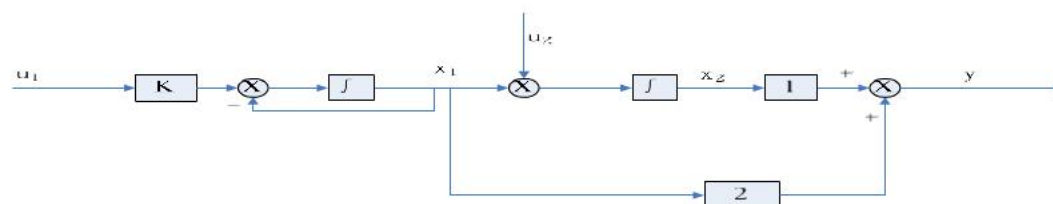


图 2.2 系统结构图

解: 将此图化成模拟结构图



列出状态方程

$$\dot{x}_1 = ku_1 - x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - u_2$$

$$y = x_2 + 2x_1$$

$$x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

则离散时间状态空间表达式为

$$x(k+1) = G(T)x(k) + H(T)u(k)$$

$$y(k) = cx(k) + Du(k)$$

由 $G(T) = e^{At}$ 和 $H(T) = \int_0^T e^{At} dt B$ 得:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad C^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = L^{-1} \left[(sI - A)^{-1} \right] = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 1-e^{-t} & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \int_0^T e^{At} dt = \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 1-e^{-t} & 1 \end{bmatrix} dt \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-e^{-T} & 0 \\ T-1+e^{-T} & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k(1-e^{-T}) & 0 \\ k(T-1+e^{-T}) & -T \end{bmatrix}$$

当 $T=1$ 时

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 1-e^{-1} & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} k(1-e^{-1}) & 0 \\ ke^{-1} & -1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

当 $T=0.1$ 时

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} e^{-0.1} & 0 \\ 1-e^{-0.1} & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} k(1-e^{-0.1}) & 0 \\ k(e^{-0.1}-0.9) & -0.1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

2-10 解: G 的特征根为 $3/8$, $5/8$; 对应的 P 为

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad p^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= G^k = p \Lambda^k p^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\frac{3}{8})^k & 0 \\ 0 & (\frac{5}{8})^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\frac{3}{8})^k + \frac{1}{2}(\frac{5}{8})^k & -\frac{1}{2}(\frac{3}{8})^k + \frac{1}{2}(\frac{5}{8})^k \\ -\frac{1}{2}(\frac{3}{8})^k + \frac{1}{2}(\frac{5}{8})^k & \frac{1}{2}(\frac{3}{8})^k + \frac{1}{2}(\frac{5}{8})^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{由 } x(k) = \Phi(k)x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(j)Hu(k-j-1)$$

由初值和输入可递推计算, 得结果如下: $x(1) = \Phi(1)x(0) + \Phi(0)Hu(0)$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/8 \\ 1/8 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/8 \\ 19/8 \end{bmatrix}$$

$$x(2) = \Phi(2)x(0) + \Phi(0)Hu(1) + \Phi(1)Hu(0)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\frac{3}{8})^2 + \frac{1}{2}(\frac{5}{8})^2 & -\frac{1}{2}(\frac{3}{8})^2 + \frac{1}{2}(\frac{5}{8})^2 \\ -\frac{1}{2}(\frac{3}{8})^2 + \frac{1}{2}(\frac{5}{8})^2 & \frac{1}{2}(\frac{3}{8})^2 + \frac{1}{2}(\frac{5}{8})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T \\ e^{-T} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 & 1/8 \\ 1/8 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T+0.2344 \\ e^{-T}+1.1719 \end{bmatrix}$$

2-11.

首先写出 $G_0(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ 的状态空间表达式

$$G_0(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_0 = [1 \quad -1]$$

求其状态转移矩阵 $e^{A_0 t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$

对 (A_0, B_0, C_0) 进行离散化, 包括零阶保持器,

$$G_0 = e^{A_0 T} = \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}$$

$$H_0 = \int_0^T e^{A_0 t} B_0 dt = \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 1 - e^{-T} \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \end{bmatrix}$$

(1) 系统的状态空间表达式

$$x_1(k+1) = e^{-T} x_1(k) + (1 - e^{-T}) u(k)$$

$$x_2(k+1) = e^{-2T} x_2(k) + \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) u(k)$$

$$u(k) = r(k) - y(k) = r(k) - (x_1(k) - x_2(k))$$

代入得:

$$x_1(k+1) = (2e^{-T} - 1)x_1(k) + (1 - e^{-T})x_2(k) + (1 - e^{-T})r(k)$$

$$x_2(k+1) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2T})x_1(k) + \frac{1}{2}(1 + e^{-2T})x_2(k) + \frac{1}{2}(1 - e^{-2T})r(k)$$

控制理论与方法答案

$$G(T) = \begin{bmatrix} 2e^{-T} - 1 & 1 - e^{-T} \\ -\frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) & \frac{1}{2}(1 + e^{-2T}) \end{bmatrix}$$

$$H(T) = \begin{bmatrix} 1 - e^{-T} \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \end{bmatrix}$$

<2> 当 $T=0.15$ 时

$$G = \begin{bmatrix} 0.8097 & 0.0952 \\ -0.0906 & 0.9094 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0.0952 \\ 0.0906 \end{bmatrix}$$

<3> $k=0 \quad x_1=0 \quad x_2=0 \quad y(0)=0$

$$k=1 \quad x_1=0.0952 \quad x_2=0.0906 \quad y(1)=0.0045$$

$$k=2 \quad x_1=0.1808 \quad x_2=0.1644 \quad y(2)=0.0164$$

$$k=3 \quad x_1=0.2572 \quad x_2=0.2238 \quad y(3)=0.0335$$

$$k=4 \quad x_1=0.3247 \quad x_2=0.2708 \quad y(4)=0.0539$$

$$k=5 \quad x_1=0.3839 \quad x_2=0.3075 \quad y(5)=0.0764$$

$$\dots \dots \dots k=100 \quad x_1=0.6667 \quad x_2=0.3333 \quad y(100)=0.3333$$

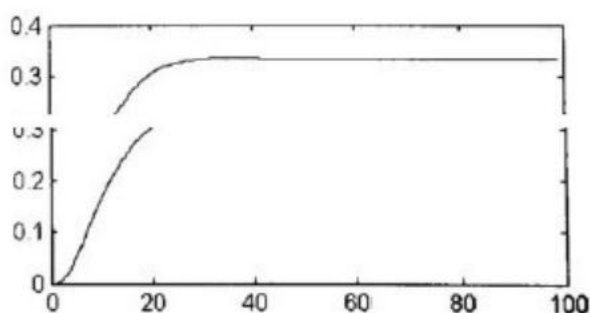
$\dots \dots \dots$

<2> 当 $T=0.15$ 时

$$G = \begin{bmatrix} 0.8097 & 0.0952 \\ -0.0906 & 0.9094 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0.0952 \\ 0.0906 \end{bmatrix}$$

<3>

$k=0$	$x_1=0$	$x_2=0$	$y(0)=0$
$k=1$	$x_1=0.0952$	$x_2=0.0906$	$y(1)=0.0045$
$k=2$	$x_1=0.1808$	$x_2=0.1644$	$y(2)=0.0164$
$k=3$	$x_1=0.2572$	$x_2=0.2238$	$y(3)=0.0335$
$k=4$	$x_1=0.3247$	$x_2=0.2708$	$y(4)=0.0539$
$k=5$	$x_1=0.3839$	$x_2=0.3075$	$y(5)=0.0764$
$k=100$	$x_1=0.6667$	$x_2=0.3333$	$y(100)=0.3333$



<4> 在采样间隔内, $G_0(s)$ 的输入 u 不变.

所以在 $[0.2 \ 0.3]$ 时间区间内 (A, B, C)

的初始状态为 $x(2T) = \begin{bmatrix} 0.1808 \\ 0.1644 \end{bmatrix} = x_0$

输入信号为 $u_0 = r - y(2T) = 0.9836$

以 $t_0 = 0.25$ 为初始时刻, 在 $t = 0.25s$ 时

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A_0(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A_0(t-\tau)} B_0 u_0 d\tau \\ &= \begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t-t_0)} \end{bmatrix} x_0 \\ &\quad + \begin{bmatrix} 1 - e^{-(t-t_0)} \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2(t-t_0)}) \end{bmatrix} u_0 \end{aligned}$$

$$x(0.25) = \begin{bmatrix} 0.2200 \\ 0.1956 \end{bmatrix}$$

$$y(0.25) = C_0 x(0.25) = 0.0244$$

第三章习题答案

3-1 判断下列系统的状态能控性和能观测性。系统中 **a,b,c,d** 的取值对能控性和能观性是否有关，若有关，其取值条件如何？

(1) 系统如图 3.16 所示：

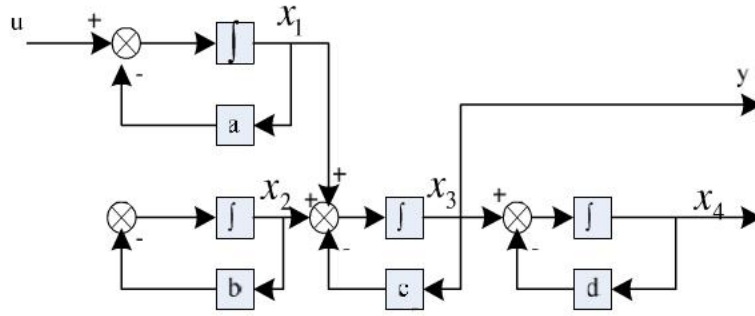


图3.16 系统模拟结构图

解：由图可得：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -ax_1 + u \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 \\ \dot{x}_3 &= -cx_3 + x_2 + x_1 = x_1 + x_2 - cx_3 \\ \dot{x}_4 &= x_3 - dx_4 \\ y &= x_3\end{aligned}$$

状态空间表达式为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]x$$

由于 $\dot{x}_2$ 、 $\dot{x}_3$ 、 $\dot{x}_4$ 与 u 无关，因而状态不能完全能控，为不能控系统。由于 y 只与 x_3 有关，因而系统为不完全能观的，为不能观系统。

(3) 系统如下式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

解：如状态方程与输出方程所示， A 为约旦标准形。要使系统能控，控制矩阵 b 中相对于约旦块的最后一行元素不能为 0，故有 $a \neq 0, b \neq 0$ 。

要使系统能观，则 C 中对应于约旦块的第一列元素不全为 0，故有 $c \neq 0, d \neq 0$ 。

3-2 时不变系统

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X$$

试用两种方法判别其能控性和能观性。

解：方法一：

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$\text{rank} M = 1 < 2$, 系统不能控。

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -2 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$\text{rank} N = 2$, 系统能观。

方法二：将系统化为约旦标准形。

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -1 \\ -1 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 3)^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -4$$

$$\text{则状态矢量: } A_1 P_1 = \lambda_1 P_1 \Rightarrow P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 P_2 = \lambda_2 P_2 \Rightarrow P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CT = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$T^{-1}B$ 中有全为零的行，系统不可控。 CT 中没有全为0的列，系统可观。

3-3 确定使下列系统为状态完全能控和状态完全能观的待定常数 α_i 和 β_i

$$(1) A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad -1]$$

解：构造能控阵：

$$M = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 + 1 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

要使系统完全能控，则 $\alpha_1 + 1 \neq \alpha_2$ ，即 $\alpha_1 - \alpha_2 + 1 \neq 0$

构造能观阵：

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \alpha_1 & 1 - \alpha_2 \end{bmatrix}$$

要使系统完全能观，则 $1 - \alpha_2 \neq -\alpha_1$ ，即 $\alpha_1 - \alpha_2 + 1 \neq 0$

3-4 设系统的传递函数是

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s+a}{s^3 + 10s^2 + 27s + 18}$$

(1) 当a取何值时，系统将是不完全能控或不完全能观的？

(2) 当 a 取上述值时, 求使系统的完全能控的状态空间表达式。

(3) 当 a 取上述值时, 求使系统的完全能观的状态空间表达式。

解: (1) 方法 1 : $W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s+a}{(s+1)(s+3)(s+6)}$

系统能控且能观的条件为 $W(s)$ 没有零极点对消。因此当 $a=1$, 或 $a=3$ 或 $a=6$ 时, 系统为不能控或不能观。

方法 2:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s+a}{(s+1)(s+3)(s+6)} = \frac{\frac{a-1}{10}}{s+1} - \frac{\frac{a-3}{6}}{s+3} + \frac{\frac{a-6}{15}}{s+6}$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -6$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{a-1}{10} & -\frac{a-3}{6} & \frac{a-6}{15} \end{bmatrix} X$$

系统能控且能观的条件为矩阵 C 不存在全为 0 的列。因此当 $a=1$, 或 $a=3$ 或 $a=6$ 时, 系统为不能控或不能观。

(2) 当 $a=1$, $a=3$ 或 $a=6$ 时, 系统可化为能控标准 I 型

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -18 & -27 & -10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [a \quad 1 \quad 0] x$$

(3) 根据对偶原理, 当 $a=1$, $a=2$ 或 $a=4$ 时, 系统的能观标准 II 型为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -18 \\ 1 & 0 & -27 \\ 0 & 1 & -10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1] x$$

3-6 已知系统的微分方程为: $\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 6u$

试写出其对偶系统的状态空间表达式及其传递函数。

解: $a_0 = 6, a_1 = 11, a_2 = 6, a_3 = 3, b_0 = 6$

系统的状态空间表达式为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [6 \ 0 \ 0]x$$

传递函数为

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = [6 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 11 & s+6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

其对偶系统的状态空间表达式为：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \ 0 \ 1]x$$

传递函数为 $W(s) = \frac{6}{s^3 - 6s^2 - 11s + 6}$

3-7. 能控标准型为：

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}; \quad b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3-8. 能观标准型为：

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad b_o = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$C_o = [0 \ 1];$$

3-9 已知系统的传递函数为

$$W(s) = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4s + 3}$$

试求其能控标准型和能观标准型。

$$\text{解: } W(s) = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4s + 3} = 1 + \frac{2s + 5}{s^2 + 4s + 3}$$

系统的能控标准 I 型为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [5 \ 2]x + u$$

能观标准 II 型为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \quad 1]x + u\end{aligned}$$

3-10 给定下列状态空间方程，试判别其是否变换为能控和能观标准型。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \quad 0 \quad 1]x\end{aligned}$$

解： $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $C = [0 \quad 0 \quad 1]$

$$M = [b \quad Ab \quad A^2b] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 7 \\ 2 & -5 & 11 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}M = 2 < 3$ ，系统为不能控系统，不能变换为能控标准型。

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & -7 & 9 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}N = 3$ ，系统为能观系统，可以变换为能观标准型。

3-11 试将下列系统按能控性进行分解

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [1 \quad -1 \quad 1]$

解：

$$M = [b \quad Ab \quad A^2b] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{rank}M=2<3, \text{ 系统不是完全能控的。}$$

构造奇异变换阵 R_c ： $R_1 = b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $R_2 = Ab = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $R_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，其中 R_3 是任意的，只要满足

R_c 满秩。

$$\text{即 } R_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{得 } R_c^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = R_c^{-1} A R_c = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = R_c^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{c} = c R_c = [1 \quad 2 \quad -1]$$

3-12 试将下列系统按能观性进行结构分解

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad -1 \quad 1]$$

$$\text{解: 由已知得 } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad -1 \quad 1]$$

$$\text{则有 } N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

rank N=2<3, 该系统不能观

$$\text{构造非奇异变换矩阵 } R_0^{-1}, \text{ 有 } R_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{则 } R_0 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\tilde{x}} = R_0^{-1} A R_0 \tilde{x} + R_0^{-1} b u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = c R_0 \tilde{x} = [1 \quad 0 \quad 0] \tilde{x}$$

3-13 试将下列系统按能控性和能观性进行结构分解

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 1 \quad 2]$$

$$\text{解: 由已知得 } M = \begin{bmatrix} A & Ab & Ab^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 12 & 26 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

rank M=3, 则系统能控

$$N = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ -7 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

rank N=3, 则系统能观

所以此系统为能控并且能观系统

$$\text{取 } T_{c2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 12 & 26 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \text{ 则 } T_{c2}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 7 & -\frac{1}{2} & -3 \\ -3 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{则 } \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = T_{c2}^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = cT_{c2} = [7 \quad 13 \quad 23]$$

3-14 求下列传递函数阵的最小实现。

$$(1) \quad w(s) = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{解: } \alpha_0 = 1, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_c = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

系统能控不能观

$$\text{取 } R_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } R_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{所以 } \hat{A} = R_0^{-1}AR_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = R_0^{-1}B_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = C_cR_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{所以最小实现为 } \hat{A}_m = 1, \quad \hat{B}_m = [1 \quad 1], \quad \hat{C}_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{D}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{验证: } \hat{C}_m (sI - \hat{A}_m)^{-1} \hat{B}_m = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = w(s)$$

3-15 设 Σ_1 和 Σ_2 是两个能控且能观的系统

$$\Sigma_1: A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_1 = [2 \quad 1]$$

$$\Sigma_2: A_2 = -2, b_2 = 1, C_2 = 1$$

(1) 试分析由 Σ_1 和 Σ_2 所组成的串联系统的能控性和能观性，并写出其传递函数；

(2) 试分析由 Σ_1 和 Σ_2 所组成的并联系统的能控性和能观性，并写出其传递函数。

解：

(1) Σ_1 和 Σ_2 串联

当 Σ_1 的输出 y_1 是 Σ_2 的输入 u_2 时， $\dot{x}_3 = -2x_3 + 2x_1 + x_2$

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \quad 0 \quad 1] \bar{x}$$

$$M = [b \quad Ab \quad A^2b] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 13 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

则 $\text{rank } M = 2 < 3$ ，所以系统不完全能控。

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s+2}{(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{1}{s^2 + 7s + 12}$$

当 Σ_2 得输出 y_2 是 Σ_1 的输入 u_1 时

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [2 \quad 1 \quad 0] x$$

$$\text{因为 } M = [b \quad Ab \quad A^2b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$\text{rank } M = 3$ 则系统能控

$$\text{因为 } N = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$\text{rank } N = 2 < 3$ 则系统不能观

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2 + 7s + 12}$$

(2) Σ_1 和 Σ_2 并联

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$M = \begin{bmatrix} A & Ab & Ab^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 13 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

因为 $\text{rank } M=3$, 所以系统完全能控

$$N = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

因为 $\text{rank } N=3$, 所以系统完全能观

$$w(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{2\left(s+2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(s+2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

3-16. 设 $W_0(s) = \frac{K_0 \prod_{i=1}^m (s-z_i)}{\prod_{j=1}^n (s-p_j)} \quad (m \leq n)$

若系统不能控或(和)不能观, 则 $W_0(s)$ 有零极点相消,

即 $\prod_{i=1}^m (s-z_i)$ 与 $\prod_{j=1}^n (s-p_j)$ 有公因子。

若系统能控且能观, 则无零极点相消。

闭环系统的传递函数为

$$W_f(s) = \frac{K_0 \prod_{i=1}^m (s-z_i)}{\prod_{j=1}^n (s-p_j) - K_0 \prod_{i=1}^m (s-z_i)}$$

显然 $W_f(s)$ 与 $W_0(s)$ 能相消的零极点是相同的。所以

所以图中开环及闭环系统为能控、能观性一致。

第四章习题答案

4-1 判断下列二次型函数的符号性质:

$$(1) Q(x) = -x_1^2 - 3x_2^2 - 11x_3^2 + 2x_1x_2 - x_2x_3 - 2x_1x_3$$

$$(2) v(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_2x_3 - 2x_1x_3$$

解: (1) 由已知得

$$\begin{aligned} Q(x) &= \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 - x_3 & x_1 - 3x_2 - \frac{1}{2}x_3 & -x_1 - \frac{1}{2}x_2 - 11x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ \Delta_1 &= -1 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -11 \end{vmatrix} = -\frac{71}{4} < 0 \end{aligned}$$

因此 $Q(x)$ 是负定的

(2) 由已知得

$$\begin{aligned} Q(x) &= \begin{bmatrix} x_1 - x_2 - x_3 & -x_1 + 4x_2 - 3x_3 & -x_1 - 3x_2 + x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ \Delta_1 &= 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -16 < 0 \end{aligned}$$

因此 $Q(x)$ 不是正定的

4-2 已知二阶系统的状态方程:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} x$$

试确定系统在平衡状态处大范围渐进稳定的条件。

解：方法（1）：要使系统在平衡状态处大范围渐进稳定，则要求满足 A 的特征值均具有负实部。

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} \\ \text{即：} &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= 0 \end{aligned}$$

有解，且解具有负实部。

$$\text{即： } a_{11} + a_{22} < 0 \text{ 且 } a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21}$$

方法（2）：系统的原点平衡状态 $x_e = 0$ 为大范围渐近稳定，等价于 $A^T P + PA = -Q$ 。

取 $Q = I$ ，令 $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}$ ，则带入 $A^T P + PA = -Q$ ，得到

$$\begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11} + a_{22} & a_{21} \\ 0 & 2a_{12} & 2a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

若 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11} + a_{22} & a_{21} \\ 0 & 2a_{12} & 2a_{22} \end{vmatrix} = 4(a_{11} + a_{22})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \neq 0$ ，则此方程组有唯一解。即

$$P = -\frac{1}{2(a_{11} + a_{22})|A|} \begin{bmatrix} |A| + a_{21}^2 + a_{22}^2 & -(a_{12}a_{22} + a_{21}a_{11}) \\ -(a_{12}a_{22} + a_{21}a_{11}) & |A| + a_{11}^2 + a_{12}^2 \end{bmatrix}$$

其中 $\det A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

要求 P 正定，则要求

$$\begin{aligned} \Delta_1 = P_{11} &= \frac{|A| + a_{21}^2 + a_{22}^2}{-2(a_{11} + a_{22})|A|} > 0 \\ \Delta_2 = |P| &= \frac{(a_{11} + a_{22})^2 + (a_{12} - a_{21})^2}{-4(a_{11} + a_{22})} > 0 \end{aligned}$$

因此 $a_{11} + a_{22} < 0$ ，且 $\det A > 0$

4-3 试用 lyapunov 第二法确定下列系统原点的稳定性。

$$(1) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} x$$

$$(2) \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x$$

解：(1) 系统唯一的平衡状态是 $x_e = 0$ 。选取 Lyapunov 函数为 $V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$ ，则

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1(-x_1 + 2x_2) + 2x_2(2x_1 - 3x_2) \\ &= -2x_1^2 + 6x_1x_2 - 6x_2^2 \\ &= -2(x_1 - \frac{3}{2}x_2)^2 - \frac{3}{2}x_2^2 < 0 \end{aligned}$$

$\dot{V}(x)$ 是负定的。 $\|x\| \rightarrow \infty$ ，有 $V(x) \rightarrow \infty$ 。即系统在原点处大范围渐近稳定。

(2) 系统唯一的平衡状态是 $x_e = 0$ 。选取 Lyapunov 函数为 $V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$ ，则

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1(-x_1 + x_2) + 2x_2(-x_1 - x_2) \\ &= -2x_1^2 - 2x_2^2 < 0 \end{aligned}$$

$\dot{V}(x)$ 是负定的。 $\|x\| \rightarrow \infty$ ，有 $V(x) \rightarrow \infty$ 。即系统在原点处大范围渐近稳定。

4-6 设非线性系统状态方程为：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a(1+x_2)^2 x_2 - x_1, a > 0 \end{aligned}$$

试确定平衡状态的稳定性。

解：若采用克拉索夫斯基法，则依题意有：

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{bmatrix} x_2 \\ -a(1+x_2)^2 x_2 - x_1 \end{bmatrix} \\ J(x) &= \frac{\partial f(x)}{\partial x^T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a-4ax_2-3ax_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

取 $P = I$

$$\begin{aligned} -Q(x) &= J^T(x) + J(x) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -a-4ax_2-3ax_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a-4ax_2-3ax_2^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2a-8ax_2-6ax_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

很明显， $Q(x)$ 的符号无法确定，故改用李雅普诺夫第二法。选取 Lyapunov 函数为

$V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$ ，则

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1x_2 + 2x_2(-x_1 - a(1+x_2)^2x_2) \\ &= -2a(1+x_2^2)x_2^2 < 0\end{aligned}$$

$\dot{V}(x)$ 是负定的。 $\|x\| \rightarrow \infty$ ，有 $V(x) \rightarrow \infty$ 。即系统在原点处大范围渐近稳定。

4-7. 4

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 系统平衡状态为 } x_e = [0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\text{由方程 } G^T P G - P = -I \text{ 解出 } P = \begin{bmatrix} -19/78 & -10/39 & -1/2 \\ -10/39 & -49/78 & -19/13 \\ -1/2 & -19/13 & -121/26 \end{bmatrix}, \text{ 不定号, 因此系统不渐近稳定。}$$

实际上，该系统的特征值为 $0.1173 + 2.6974i$ ， $0.1173 - 2.6974i$ ， -1.2346 都在单位圆外，系统是不稳定的。

4-9 设非线性方程：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - x_2\end{aligned}$$

试用克拉索夫斯基法确定系统原点的稳定性。

解：（1）采用克拉索夫斯基法，依题意有：

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1^3 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$J(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x^T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3x_1^2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$V(x) = f^T(x)f(x) = \begin{bmatrix} x_2 & -x_1^3 - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1^3 - x_2 \end{bmatrix} = x_2^2 + (-x_1^3 - x_2)^2$$

$\|x\| \rightarrow \infty$ ，有 $V(x) \rightarrow \infty$ 。

取 $P = I$

$$\begin{aligned}-Q(x) &= J^T(x) + J(x) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -3x_1^2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3x_1^2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1-3x_1^2 \\ 1-3x_1^2 & -2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

则 $Q(x) = \begin{bmatrix} 0 & -1+3x_1^2 \\ -1+3x_1^2 & 2 \end{bmatrix}$ ，根据希尔维斯特判据，有：

$$\Delta_1 = 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 3x_1^2-1 \\ -1+3x_1^2 & 2 \end{vmatrix} = (3x_1^2-1)^2 > 0, Q(x) \text{ 的符号无法判断。}$$

(2) 李雅普诺夫方法：选取 Lyapunov 函数为 $V(x) = \frac{3}{4}x_1^4 + \frac{3}{2}x_2^2 > 0$ ，则

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 3x_1^3\dot{x}_1 + 3x_2\dot{x}_2 \\ &= 3x_1^3x_2 + 3x_2(-x_1^3 - x_2) \\ &= -3x_2^2 < 0 \end{aligned}$$

$\dot{V}(x)$ 是负定的。 $\|x\| \rightarrow \infty$ ，有 $V(x) \rightarrow \infty$ 。即系统在原点处大范围渐近稳定。

4-10. 系统的平衡状态在坐标原点，由于 $a_1 > 0$ ，可取李雅普诺夫函数为 $V(x) = a_1x_1^2 + x_2^4 > 0$

$$\dot{V}(x) = 2a_1x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2a_1x_1x_2 - 2x_2(a_1x_1 + a_2x_1^2x_2) = -2a_2x_1^2x_2^2 \leq 0, (\text{由于 } a_2 > 0), \text{ 非正定。}$$

并且 $x_1 = 0$ 时， $x_2 \rightarrow 0$ ； $x_2 = 0$ 时， $x_1 \rightarrow 0$ 。即对于 $x = \begin{bmatrix} 0 & x_2 \end{bmatrix}^T \neq 0$ 或 $x = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \end{bmatrix}^T \neq 0$

$\dot{V}(x)$ 不恒为零，所以坐标原点是渐近稳定的；由于 $\|x\| \rightarrow \infty$ ， $V(x) \rightarrow \infty$ ，是大范围渐近稳定。

4-11. 用克拉索夫斯基法，取 $P = I$ 。

$$J(x) = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & -1+5bx_2^4 \end{bmatrix}, J^T(x) = J(x), Q = -J^T(x) - J(x) = \begin{bmatrix} -2a & -2 \\ -2 & 2-10bx_2^4 \end{bmatrix}.$$

$$V(x) = \dot{x}^T \dot{x} = (ax_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2 + bx_2^5)^2 > 0$$

$\|x\| \rightarrow \infty$ ， $V(x) \rightarrow \infty$ ，因此只要系统在坐标原点渐近稳定即是大范围渐近稳定的，只要 $Q(x) > 0$ 即满

足渐近稳定的条件。满足要求的 a 和 b 的取值范围： $a < -1, b < 0$ 。

4-12 试用变量梯度法构造下列系统的李雅普诺夫函数

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

解：假设 $V(x)$ 的梯度为：

$$\nabla V = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla V_1 \\ \nabla V_2 \end{pmatrix}$$

计算 $V(x)$ 的导数为：

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= (\nabla V)^T \dot{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_1^2x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} \\ &= -a_{11}x_1^2 - (a_{12} + a_{21})x_1x_2 - a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1^2x_2^2 + 2a_{11}x_1^3x_2\end{aligned}$$

选择参数，试选 $a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = a_{21} = 0$ ，于是得：

$\nabla V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ，显然满足旋度方程 $\frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1}$ ，即 $\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = 0$ ，表明上述选择的参数是允许的。

则有：

$$\dot{V}(x) = -(1 - 2x_1x_2)x_1^2 - x_2^2$$

如果 $1 - 2x_1x_2 > 0$ 或 $x_1x_2 < \frac{1}{2}$ ，则 $\dot{V}(x)$ 是负定的，因此， $x_1x_2 < \frac{1}{2}$ 是 x_1 和 x_2 的约束条件。

计算得到 $V(x)$ 为：

$$\begin{aligned}V(x) &= \int_0^{x_1(x_2=0)} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2(x_1=x_1)} x_2 dx_2 \\ &= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

$V(x)$ 是正定的，因此在 $1 - 2x_1x_2 > 0$ 即 $x_1x_2 < \frac{1}{2}$ 范围内， $x_e = 0$ 是渐进稳定的。

第五章习题答案

5-1 已知系统状态方程为：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

试设计一状态反馈阵使闭环系统极点配置为-1, -2, -3。

解：依题意有：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M = [b \quad Ab \quad A^2b] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{rank} M = 3, \text{ 系统能控。}$$

系统 $\sum_0 = (A, b, C)$ 的特征多项式为：

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 1)^3 - (\lambda - 1) + 1 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$\text{则将系统写成能控标准 I 型, 则有 } \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u。$$

引入状态反馈后, 系统的状态方程为: $\dot{x} = (A + bK)x + bu$, 其中 K 为 1×3 矩阵, 设

$K = [k_0 \quad k_1 \quad k_2]$, 则系统 $\sum_K = (A, bK, C)$ 的特征多项式为:

$$f(\lambda) = \det[\lambda I - (A + bK)] = \lambda^3 + (-3 - k_2)\lambda^2 + (2 - k_1)\lambda + (1 - k_0)$$

根据给定的极点值, 得到期望特征多项式为:

$$f^*(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

比较 $f(\lambda)$ 与 $f^*(\lambda)$ 各对应项系数, 可解得: $k_0 = -5 \quad k_1 = -9 \quad k_2 = -9$, 则有: $K = [-5 \quad -9 \quad -9]$ 。

5-1. 首先判断系统的可控性。

可以判定，此系统完全可控。

状态反馈控制律为： $u = Kx + v$

$$K = [k_0 \ k_1 \ k_2]$$

$$f_K(s) = \det[sI - (A + BK)] = s^3 - (3 + k_2)s^2 + (2 + 2k_2 - k_1)s + 1 - k_2 + k_1 + 2k_0$$

由给定的闭环极点 $-1, -2, -3$ 得

$$f_K^*(s) = (s+1)(s+2)(s+3) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

比较系数得 $k_0 = 23, k_1 = -50, k_2 = -9$

$$K = [23 \ -50 \ -9]$$

5-2. 判断系统的可控性，系统完全可控。

状态反馈控制律为 $u = Kx + v, K = [k_0 \ k_1 \ k_2]$

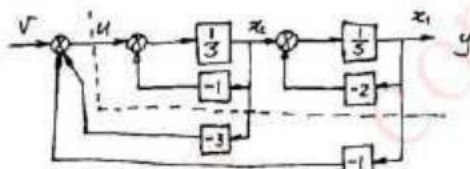
$$f_K(s) = \det[sI - (A + BK)] = s^3 + (11 - 10k_2)s^2 + (11 - 10k_2 - 10k_1)s - 10k_0$$

由给定的闭环极点 $-10, -1 \pm j\sqrt{3}$ 得

$$f_K^*(s) = (s+10)(s+1+j\sqrt{3})(s+1-j\sqrt{3}) = s^3 + 12s^2 + 22s + 40$$

比较系数得 $k_0 = -4, k_1 = -1.2, k_2 = -0.1$

5-3. <1>



<2> 系统完全可控，故可任意配置极点。

<3> 取状态反馈控制 $u = Kx + v = [k_0 \ k_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + v$

$$f_K(s) = |sI - (A + BK)| = s^2 + (3 - k_0)s + 2 - k_0 - 2k_1$$

$$f_K^*(s) = (s+3)^2 = s^2 + 6s + 9$$

比较系数得 $k_0 = -1, k_1 = -3; K = [-1, -3]$

5-3 有系统：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

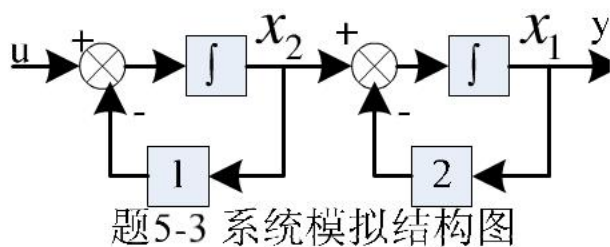
$$y = [1 \ 0] x$$

(1) 画出模拟结构图。

(2) 若动态性能不满足要求，可否任意配置极点？

(3) 若指定极点为-3, -3, 求状态反馈阵。

解 (1) 系统模拟结构图如下:



(2) 系统采用状态反馈任意配置极点的充要条件是系统 $\sum_0 = (A, b, C)$ 完全能控。

对于系统 $\sum_0 = (A, b, C)$ 有:

$$M = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{rank} M = 2, \text{ 系统能控, 故若系统动态性能不满足要求, 可}$$

任意配置极点。

(3) 系统 $\sum_0 = (A, b, C)$ 的特征多项式为:

$$|\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda + 1) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

则将系统写成能控标准 I 型, 则有 $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$ 。

引入状态反馈后, 系统的状态方程为: $\dot{x} = (A + bK)x + bu$, 设 $K = [k_0 \quad k_1]$, 则系统

$\sum_K = (A, bK, C)$ 的特征多项式为:

$$f(\lambda) = \det[\lambda I - (A + bK)] = \lambda^2 + (3 - k_1)\lambda + (2 - k_0)$$

根据给定的极点值, 得到期望特征多项式为:

$$f^*(\lambda) = (\lambda + 3)^2 = \lambda^2 + 6\lambda + 9$$

比较 $f(\lambda)$ 与 $f^*(\lambda)$ 各对应项系数, 可解得: $k_0 = -7 \quad k_1 = -3$, $K = [-7 \quad -3]$ 。

5-4 设系统传递函数为

$$\frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)}$$

试问能否利用状态反馈将传递函数变成

$$\frac{s-1}{(s+2)(s+3)}$$

若有可能，试求出状态反馈 K ，并画出系统结构图。

解：
$$W(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)} = \frac{s^2 + s - 2}{s^3 + 2s^2 - 5s - 6}$$

由于传递函数无零极点对消，因此系统为能控且能观。

能控标准 I 型为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [-2 \quad 1 \quad 1]x \end{aligned}$$

令 $K = [k_0 \quad k_1 \quad k_2]$ 为状态反馈阵，则闭环系统的特征多项式为

$$f(\lambda) = \det[\lambda I - (A + bK)] = \lambda^3 + (2 - k_2)\lambda^2 + (-5 - k_1)\lambda + (-6 + k_0)$$

由于状态反馈不改变系统的零点，根据题意，配置极点应为 -2, -2, -3，得期望特征多项式为

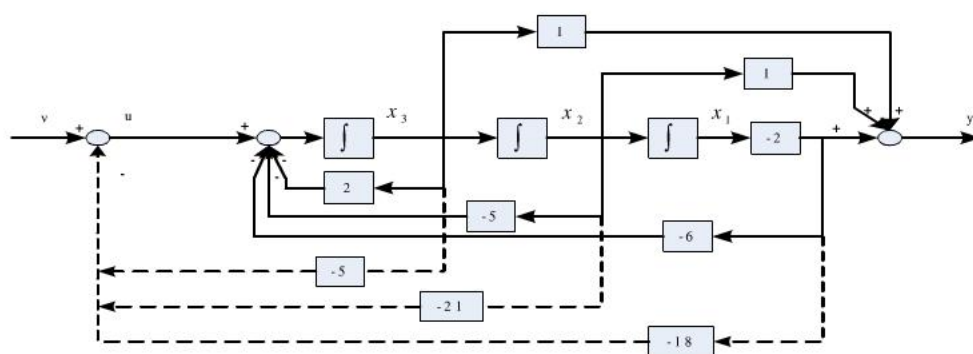
$$f^*(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda + 3)(\lambda + 2) = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 16\lambda + 12$$

比较 $f(\lambda)$ 与 $f^*(\lambda)$ 的对应项系数，可得

$$k_0 = -18 \quad k_1 = -21 \quad k_2 = -5$$

即 $K = [-18 \quad -21 \quad -5]$

系统结构图如下：



题 5-4 系统模拟结构图

5-5 使判断下列系统通过状态反馈能否镇定。

(1)
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解：系统的能控阵为：

$$M = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{rank} M = 3, \text{ 系统能控。}$$

由定理 5.2.1 可知，采用状态反馈对系统 $\sum_0 = (A, b, C)$ 任意配置极点的充要条件是 $\sum_0 = (A, b, C)$ 完全能控。又由于 $\text{rank} M = 3$ ，系统 $\sum_0 = (A, b, C)$ 能控，可以采用状态反馈将系统的极点配置在根平面的左侧，使闭环系统镇定。

5-6 (1) 系统的特征多项式为 $f(s) = s^2(s^2 - 11)$

为不稳定系统

(2) 系统是完全能控的，故是状态反馈可镇定的。

状态反馈阵设计略。

5-8 (1) $C_1 B = [1 \ 0]$ $d_1 = 0$

$C_2 B = [0 \ 0]$

$C_2 AB = [1 \ 0]$ $d_2 = 1$

$E = \begin{bmatrix} C_1 B \\ C_2 AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 不可逆，不能状态反馈解耦。

5-7 设计一个前馈补偿器，使系统

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

解耦，且解耦后的极点为 $-1, -1, -2, -2$ 。

解： $W(s) = W_0(s)W_d(s)$

$$W_d(s) = W_0(s)^{-1}W(s)$$

$$\begin{aligned}
 W_0(s)^{-1} &= \frac{1}{\frac{1}{s(s+1)} - \frac{1}{s(s+1)(s+2)}} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{-1}{s+2} \\ -1 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \\
 &= s(s+2) \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{-1}{s+2} \\ \frac{-1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 & -s \\ \frac{-(s+2)}{s+1} & \frac{s(s+2)}{s+1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_d(s) &= W_0(s)^{-1}W(s) \\
 &= \begin{bmatrix} s+2 & -s \\ \frac{-(s+2)}{s+1} & \frac{s(s+2)}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+2)^2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)^2} & \frac{-s}{(s+2)^2} \\ \frac{-(s+2)}{(s+1)^3} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

5-10 已知系统：

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
 y &= [1 \quad 0] x
 \end{aligned}$$

试设计一个状态观测器，使观测器的极点为 $-r, -2r(r>0)$ 。

解：因为 $N = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 满秩，系统能观，可构造观测器。

系统特征多项式为 $\det[\lambda I - A] = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2$ ，所以有 $a_1 = 0, a_0 = 0, L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$T^{-1} = LN = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

于是 $\bar{x} = T^{-1}AT\bar{x} + T^{-1}bu = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$

$$y = cT\bar{x} = (0, 1)\bar{x}$$

引入反馈阵 $\bar{G} = \begin{bmatrix} \bar{g}_1 \\ \bar{g}_2 \end{bmatrix}$, 使得观测器特征多项式:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \det[\lambda I - (\bar{A} - \bar{G}\bar{c})] \\ &= \det \begin{bmatrix} \lambda & \bar{g}_1 \\ -1 & \lambda + \bar{g}_2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 + \bar{g}_2\lambda + \bar{g}_1 \end{aligned}$$

根据期望极点得期望特征式:

$$f^*(\lambda) = (\lambda + r)(\lambda + 2r) = \lambda^2 + 3r\lambda + 2r^2$$

比较 $f(\lambda)$ 与 $f^*(\lambda)$ 各项系数得:

$$\bar{g}_2 = 3r, \bar{g}_1 = 2r^2$$

即 $\bar{G} = \begin{bmatrix} 2r^2 \\ 3r \end{bmatrix}$, 反变换到 x 状态下 $G = T\bar{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2r^2 \\ 3r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3r \\ 2r^2 \end{bmatrix}$

观测器方程为:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (A - Gc)\hat{x} + bu + Gy \\ &= \begin{bmatrix} -3r & 1 \\ -2r^2 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 3r \\ 2r^2 \end{bmatrix} y \end{aligned}$$

5-12. 系统完全可观, 可设计观测器 (任意配极点)

作线性变换 $x = T\bar{x}$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CT = [0 \ 0 \ 1]$$

$$\dot{\bar{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad z = [0 \ 1] \bar{x}_1 = \dot{y}$$

$$\dot{\bar{x}}_2 = [0 \ 1] \bar{x}_1 \quad y = \bar{x}_2$$

对 $\bar{x}$ 系统 1 设计全维观测器. $\bar{G} = \begin{bmatrix} \bar{g}_1 \\ \bar{g}_2 \end{bmatrix}$

$$\dot{\bar{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{g}_1 \\ 1 & -\bar{g}_2 \end{bmatrix} \bar{x}_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \bar{g}_1 \\ \bar{g}_2 \end{bmatrix} \dot{y}$$

$$f_{\bar{g}}(s) = s(s + \bar{g}_1) + \bar{g}_2 = s^2 + \bar{g}_1 s + \bar{g}_2$$

$$f_q^*(s) = (s+4)(s+5) = s^2 + 9s + 20$$

$$\Rightarrow \bar{g}_1 = 9, \bar{g}_2 = 20 \quad \bar{G} = \begin{bmatrix} 9 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\text{全 } \hat{w} = \hat{\bar{x}}_1 - \begin{bmatrix} 20 \\ 9 \end{bmatrix} y \quad \hat{\bar{x}}_1 = \hat{w} + \begin{bmatrix} 20 \\ 9 \end{bmatrix} y$$

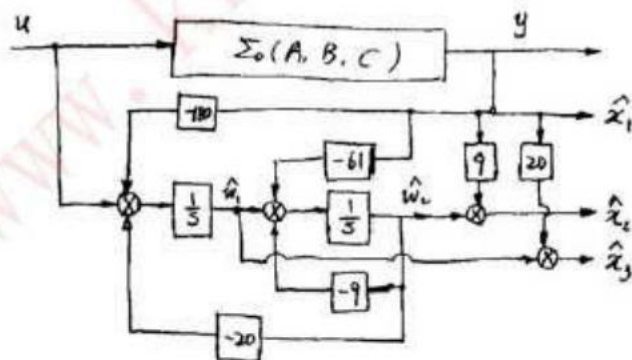
$$\dot{\hat{w}} = \begin{bmatrix} 0 & -20 \\ 1 & -9 \end{bmatrix} \hat{w} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -180 \\ -61 \end{bmatrix} y$$

$$\hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{w} + \bar{G}y \\ y \end{bmatrix} \quad \text{— 观测器方程.}$$

⑦

$$\hat{\bar{x}} = T \hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} y \\ \hat{w}_2 + 9y \\ \hat{w}_1 + 20y \end{bmatrix}$$

模拟结构图



5-13 类似于 5-12, 设计略。