

第6章 最优控制

最优控制是控制系统设计的一种方法。它所研究的中心问题是如何选择控制信号，才能保证控制系统的性能在某种意义下最优。本章内容为：

1. 引言
2. 用变分法求解最优控制问题
3. 极小值原理及其在快速控制中的应用
4. 用动态规划法求解最优控制问题
5. 线性状态调节器
6. 线性伺服机问题

6.1 引言

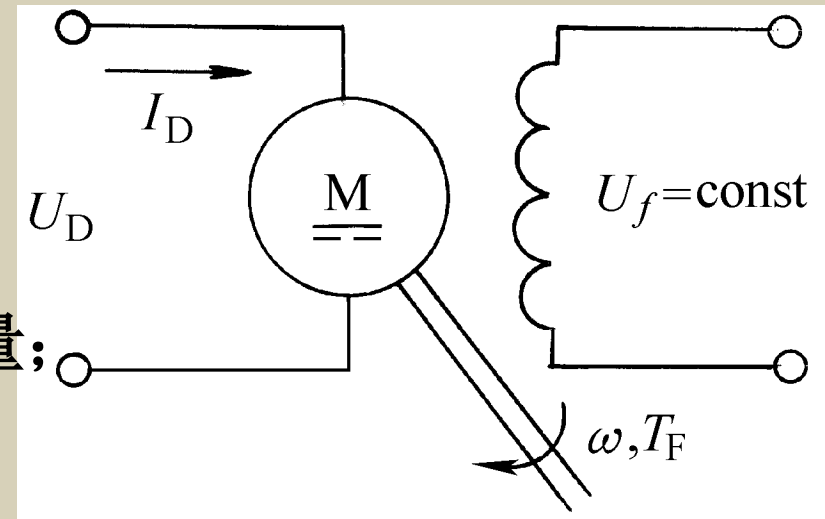
什么是最优控制？以下通过直流他励电机的控制问题来说明

问题6-1 电动机的运动方程为

$$K_m I_D - T_F = J_D \frac{d\omega}{dt} \quad (1)$$

其中， K_m 为转矩系数； J_D 为转动惯量； T_F 为恒定的负载转矩；

$$\int_0^{t_f} \omega(t) dt = \theta = const \quad (2)$$



希望：在时间区间 $[0, t_f]$ 内，电动机从静止起动，转过一定角度 θ 后停止，使电枢电阻 R_D 上的损耗 $E = \int_0^{t_f} R_D I_D^2(t) dt$ 最小，求 $I_D(t)$

因为 I_D 是时间的函数， E 又是 I_D 的函数， E 是函数的函数，称为泛函。

采用状态方程表示，令

$$x_1 = \theta \quad x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\theta} = \omega \quad \dot{x}_2 = \dot{\omega} = \frac{K_m}{J_D} I_D - \frac{T_F}{J_D}$$

于是

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m}{J_D} \end{bmatrix} I_D + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_D} \end{bmatrix} T_F \quad (3)$$

初始状态 $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 末值状态 $\begin{bmatrix} x_1(t_f) \\ x_2(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ 0 \end{bmatrix}$ 控制 I_D 不受限制

性能指标
$$E = \int_0^{t_f} R_D I_D^2(t) dt \quad (4)$$

本问题的最优控制问题是：在数学模型（3）的约束下，寻求一个控制 $I_D(t)$ ，使电动机从初始状态转移到末值状态，性能指标 E 为最小。

问题6-2 对于问题6-1中的直流他励电动机，如果电动机从初始时刻 $t_0 = 0$ 的静止状态转过一个角度 θ 又停下，求控制 $I_D(t)$ ($I_D(t)$ 是受到限制的)，使得所需时间最短。

这也是一个最优控制问题：

系统方程为
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m}{J_D} \end{bmatrix} I_D + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_D} \end{bmatrix} T_F$$

初始状态 $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 末值状态 $\begin{bmatrix} x_1(t_f) \\ x_2(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ 0 \end{bmatrix}$

$$I_D(t) \leq I_{D\max} \quad (5)$$

性能指标 $J = \int_0^{t_f} dt = t_f \quad (6)$

最优控制问题为：在状态方程的约束下，寻求最优控制 $I_D(t) \leq I_{D\max}$ ，将 $x(t_f)$ 转移到 $x(0)$ ，使 J 为极小。

最优控制问题的一般性提法为

系统状态方程为 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ 初始状态为 $\mathbf{x}(t_0)$

其中， $\mathbf{x}$ 为 n 维状态向量； $\mathbf{u}$ 为 r 维控制向量； $\mathbf{f}$ 为 n 维向量函数，它是 $\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{u}$ 和 t 的连续函数，并且对 $\mathbf{x}$ 、 t 连续可微。

寻求在 $[t_0, t_f]$ 上的最优控制 $\mathbf{u} \in R^r$ 或 $\mathbf{u} \in U \subset R^r$ ，以将系统状态从 $\mathbf{x}(t_0)$ 转移到 $\mathbf{x}(t_f)$ 或 $\mathbf{x}(t_f)$ 的一个集合，并使性能指标

$$J = \phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt$$

最优。其中 $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ 是 $\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{u}$ 和 t 的连续函数

最优控制问题就是求解一类带有约束条件的条件泛函极值问题。

补充：泛函与变分法

一、泛函与变分

1、泛函的基本定义：

如果对于某个函数集合 $\{x(t)\}$ 中的每一个函数 $x(t)$ ，变量 J 都有一个值与之对应，则称变量 J 为依赖于函数 $x(t)$ 的泛函，记作 $J[x(t)]$

可见，泛函为标量，可以理解为“函数的函数”

例如： $J[x] = \int_0^3 x(t) dt$ （其中， $x(t)$ 为在 $[0,3]$ 上连续可积函数）

当 $x(t) = t$ 时，有 $J = 4.5$ ；当 $x(t) = e^t$ 时，有 $J = e^3 - 1$ 。

泛函 $J[\mathbf{x}(t)]$ 如果满足以下条件时，称为线性泛函：

1) $J[c\mathbf{x}(t)] = cJ[\mathbf{x}(t)]$ ，其中 c 为任意常数；

2) $J[\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t)] = J[\mathbf{x}_1(t)] + J[\mathbf{x}_2(t)]$

对于一个任意小正数 ε ，总是可以找到 δ ，当 $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)| < \delta$ 时，有 $|J[\mathbf{x}(t)] - J[\mathbf{x}_0(t)]| < \varepsilon$ 就称泛函 $J[\mathbf{x}(t)]$ 在 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t)$ 处是连续的。

2、泛函的变分

所谓泛函 $J[\mathbf{x}(t)]$ 的宗量 $\mathbf{x}(t)$ 的变分是指两个函数间的差。

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t) \quad \forall \mathbf{x}(t), \mathbf{x}_0(t) \in R^n$$

定义：设 $J[\mathbf{x}]$ 是线性赋泛空间 R^n 上的连续泛函，其增量可表示为

$$\Delta J[\mathbf{x}] = J[\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}] - J[\mathbf{x}] = L[\mathbf{x}, \delta \mathbf{x}] + r[\mathbf{x}, \delta \mathbf{x}]$$

其中， $L[\mathbf{x}, \delta \mathbf{x}]$ 是关于 $\delta \mathbf{x}$ 的线性连续泛函， $r[\mathbf{x}, \delta \mathbf{x}]$ 是关于 $\delta \mathbf{x}$ 的高阶无穷小。则 $\delta J = L[\mathbf{x}, \delta \mathbf{x}]$ 称为泛函 $J[\mathbf{x}]$ 的变分。

泛函的变分等于 $\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} J[x(t) + \alpha \delta x] \right|_{\alpha=0}$

3、泛函变分的规则

$$1) \quad \delta(L_1 + L_2) = \delta L_1 + \delta L_2$$

$$2) \quad \delta(L_1 L_2) = L_1 \delta L_2 + L_2 \delta L_1$$

$$3) \quad \delta \int_a^b L[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t] dt = \int_a^b \delta L[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t] dt$$

$$4) \quad \delta \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}$$

4、泛函的极值

设 $J[x]$ 是在线性赋范空间 R^n 上某个子集 D 中的线性连续泛函， $x_0 \in D$ ，若在 x_0 的某领域内 $U(x_0, \sigma) = \{x \mid \|x - x_0\| < \sigma, x \in R^n\}$

在 $x \in U(x_0, \sigma) \subset D$ 时，均有

$$\Delta J[x] = J[x] - J[x_0] \leq 0 \quad \text{或} \quad \Delta J[x] = J[x] - J[x_0] \geq 0$$

则称 $J(x)$ 在 $x = x_0$ 处达到极大值或极小值。

定理：设 $J[x]$ 是在线性赋范空间 R^n 上某个开子集 D 中定义的可微泛函，且在 $x = x_0$ 处达到极值，则泛函 $J[x]$ 在 $x = x_0$ 处必有

$$\delta J[x_0, \delta x] = 0$$

欧拉方程：

定理：设有如下泛函极值问题： $\min_{\mathbf{x}(t)} J[\mathbf{x}] = \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dt$

其中， $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ 及 $\mathbf{x}(t)$ 在 $[t_0, t_f]$ 上连续可微， t_0 和 t_f 给定，

已知 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ ， $\mathbf{x}(t) \in R^n$ ，则极值轨线 $\mathbf{x}^*(t)$ 满足如下欧拉方程

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = 0$$

及横截条件

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)^T \bigg|_{t_f} \delta \mathbf{x}(t_f) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)^T \bigg|_{t_0} \delta \mathbf{x}(t_0) = 0$$

注意：满足欧拉方程是必要条件，不是充分条件。

6.2 用变分法求解最优控制问题

6.2.1 末值时刻固定、末值状态自由情况下的最优控制

非线性时变系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (6)$$

初始状态

$$\mathbf{x}(t) \Big|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0) \quad (7)$$

其中， $\mathbf{x}$ 为 n 维状态向量； $\mathbf{u}$ 为 r 维控制向量； $\mathbf{f}$ 为 n 维向量函数。

要求在控制空间中寻求一个最优控制向量 $\mathbf{u}(t)$ ，使以下性能指标

$$J = \phi[\mathbf{x}(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \quad (8)$$

沿最优轨线 $\mathbf{x}(t)$ 取极小值。

（性能指标如（8）式所示的最优控制问题，是变分法中的波尔扎问题）

引入拉格朗日乘子 $\lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{bmatrix}$ (9)

由 (6) 式可知 $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}}$ 为零

将性能指标 (8) 式改写为其等价形式

$$J = \phi[\mathbf{x}(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} \{L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \lambda^T(t)[f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}}]\} dt$$

定义哈密顿函数

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda, t) = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \lambda^T(t)f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (10)$$

则

$$\begin{aligned} J &= \phi[\mathbf{x}(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} [H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda, t) - \lambda^T(t)\dot{\mathbf{x}}] dt \\ &= \phi[\mathbf{x}(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda, t) dt - \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T(t)\dot{\mathbf{x}} dt \end{aligned} \quad (11)$$

对 (11) 式中的第三项进行分部积分, 得

$$J = \phi[\mathbf{x}(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) \mathrm{d} t - \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{x} \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t) \mathbf{x} \mathrm{d} t \quad (12)$$

当泛函 J 取极值时, 其一次变分等于零。 即

$$\delta J = 0$$

可以变分的量: $\mathbf{u}(t) \rightarrow \mathbf{u}(t) + \delta \mathbf{u}$ $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t) + \delta \mathbf{x}$

$$\mathbf{x}(t_f) \rightarrow \mathbf{x}(t_f) + \delta \mathbf{x}(t_f)$$

不可以变分的量: t_0 t_f $\mathbf{x}(t_0)$ $\boldsymbol{\lambda}(t)$

求出 J 的一次变分并令其为零

$$\delta J = \left[\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \right]^T \delta \mathbf{x}(t_f) - \boldsymbol{\lambda}^T(t_f) \delta \mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \delta \mathbf{x} + \left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right]^T \delta \mathbf{u} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \delta \mathbf{x} \right\} \mathrm{d} t = 0$$

将上式改写成

$$\delta J = \left[\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}(t_f)} - \lambda(t_f) \right]^T \delta \mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\lambda} \right]^T \delta \mathbf{x} + \left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right]^T \delta \mathbf{u} \right\} dt = 0 \quad (13)$$

由于 $\lambda(t)$ 未加限制，可以选择 $\lambda(t)$ 使上式中 $\delta \mathbf{x}$ 和 $\delta \mathbf{x}(t_f)$ 的系数等于零。于是有

$$\dot{\lambda} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (14)$$

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \quad (15)$$

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right]^T \delta \mathbf{u} dt = 0 \quad (16)$$

由于 $\delta \mathbf{u}$ 是任意的变分，根据变分法中的辅助引理，由（16）式得

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (17)$$

（14）式称为伴随方程， $\lambda(t)$ 为伴随变量，（17）式为控制方程。

几点说明:

1) 实际上, (14) 式和 (17) 式就是欧拉方程。

因为

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \lambda \quad (18)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \lambda = 0 \quad (19)$$

如果令

$$\bar{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda, t) = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda, t) + \lambda^T(t)[f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}}]$$

简记成

$$\bar{H} = L + \lambda^T[f - \dot{\mathbf{x}}] \quad (20)$$

由欧拉方程得到

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \lambda - (-\dot{\lambda}) = 0$$

即

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \lambda \quad (21)$$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \lambda = 0 \quad (22)$$

可见 (21) 式和 (18) 式相同, (22) 式和 (19) 式相同。因此, (14) 式和 (17) 就是欧拉方程, 而 (7) 式和 (15) 就是横截条件。

2) $\delta J = 0$ 是泛函取极值的必要条件是否为极小值还需要二次变分 $\delta^2 J$ 来判断, $\delta^2 J > 0$ 则泛函 J 取极小值。

3) 哈密顿函数沿最优轨线随时间的变化率

$$\frac{dH}{dt} = \left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \dot{\mathbf{x}} + \left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right]^T \dot{\mathbf{u}} + \left[\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right]^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} + \frac{\partial H}{\partial t} \tag{23}$$

在最优控制 $\mathbf{u}^*$ 、最优轨线 $\mathbf{x}^*$ 下，有 $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0$ 和

$$\left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \dot{\mathbf{x}} + \left[\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right]^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} - \left[\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right]^T \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = 0$$

(10) 式的哈密顿函数对 $\boldsymbol{\lambda}$ 求偏导，结果为 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \dot{\mathbf{x}}$

由 (14) 式可得

因为减号两边是相等标量
(行向量与列向量相乘)

这两个等于零的式子代入 (23) 式，于是

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{24}$$

即哈密顿函数 H 沿最优轨线对时间的全导数等于它对时间的偏导数。记为 $H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \lambda, t) = H^*(t)$ 则

$$\mathrm{d} H = \frac{\partial H}{\partial t} \mathrm{d} t \quad (25)$$

对上式积分，得到

$$H^*(t_0) = H^*(t_f) - \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial H^*}{\partial \tau} d\tau \quad (26)$$

当哈密顿函数不显含 t 时，由 (25) 式得

$$H^*(t) = H^*(t_f) = \text{const}$$

例6-1 系统状态方程为 $\dot{x} = u$ 初始条件 $x(t_0)$

性能指标 $J = \frac{1}{2}cx^2(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^2 dt$ $c > 0$

试求最优控制 u^* ，使 J 取极小值。

解 哈密顿函数 $H(x, u, \lambda, t) = \frac{1}{2}u^2 + \lambda u$

由伴随方程 $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0$ $\lambda = const$

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial}{\partial x(t_f)} \left[\frac{1}{2}cx^2(t_f) \right] = cx(t_f)$$

因为 $\lambda = const$ $\lambda(t) = \lambda(t_f) = cx(t_f)$

由控制方程 $\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda = 0$ 即 $u^* = -\lambda(t) = -cx(t_f)$

将 u^* 代入状态方程 $\dot{x} = u = -cx(t_f)$

解为 $x(t) = -cx(t_f)(t - t_0) + c_1$

当 $t = t_0$ 时，代入上式，求得 $c_1 = x(t_0)$ ，所以

$$x(t) = -cx(t_f)(t - t_0) + x(t_0)$$

当 $t = t_f$ 时， $x(t_f) = \frac{x(t_0)}{1 + (t_f - t_0)}$

最优性能指标为 $J^* = \frac{1}{2}cx^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} u^2 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{cx^2(t_0)}{1 + c(t_f - t_0)}$

6.2.2 末值时刻固定，末端状态固定情况下的最优控制

非线性时变系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (27)$$

初始状态 $\mathbf{x}(t) \big|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0)$ (28)

末值状态 $\mathbf{x}(t) \big|_{t=t_f} = \mathbf{x}(t_f)$ (29)

性能指标 $J = \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt$ (30)

寻求最优控制 $\mathbf{u}^*$ ，在 $[t_0, t_f]$ 内，将系统从 $\mathbf{x}(t_0)$ 转移到 $\mathbf{x}(t_f)$ ，同时使性能指标 J 取极小值。

（性能指标如（30）式所示的最优控制问题，是变分法中的拉格朗日问题）

引入哈密顿函数

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

$$\text{其中 } \boldsymbol{\lambda}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) &= H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) - \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ &= H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) - \boldsymbol{\lambda}^T(t) \dot{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

$$\text{于是 } J = \int_{t_0}^{t_f} [H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) - \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}}] dt$$

对上式右边第**2**项进行分部积分，可以得到

$$J = \boldsymbol{\lambda}^T(t_0) \mathbf{x}(t_0) - \boldsymbol{\lambda}^T(t_f) \mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{x}] dt$$

上式中可以变分的量： $\mathbf{u}(t) \rightarrow \mathbf{u}(t) + \delta \mathbf{u}$ $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t) + \delta \mathbf{x}$

不可以变分的量： t_0 t_f $\mathbf{x}(t_0)$ $\mathbf{x}(t_f)$ $\boldsymbol{\lambda}(t)$

令性能指标 J 的一次变分等于零，得

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} \right]^T \delta \mathbf{x} + \left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right]^T \delta \mathbf{u} \right\} dt = 0 \quad (31)$$

选择 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ ，使其满足 $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$ (32)

则
$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right]^T \delta \mathbf{u} dt = 0 \quad (33)$$

在末端状态固定情况下， $\delta \mathbf{u}$ 不是任意的。只有在系统能控的情况下，才有控制方程
$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0$$

例6-2 问题6-1的系统状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m}{J_D} \end{bmatrix} I_D + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_D} \end{bmatrix} T_F$$

初始状态 $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 末值状态 $\begin{bmatrix} x_1(t_f) \\ x_2(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ 0 \end{bmatrix}$

性能指标 $J = E = \int_0^{t_f} R_D I_D^2(t) dt$ 设 $R_D = 1 \Omega$

$$J = E = \int_0^{t_f} I_D^2(t) dt$$

最优控制问题就是在状态方程的约束下，寻求 $I_D(t)$ ，使 $x(0)$ 转移到 $x(t_f)$ ，并使 J 取极小值。

解 根据能控性判据知, 该系统是能控的

$$\text{rank } \mathbf{Q}_c = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & \frac{K_m}{J_D} \\ \frac{K_m}{J_D} & 0 \end{bmatrix} = 2$$

1) 哈密顿函数为

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) = I_D^2 + \boldsymbol{\lambda}^T \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m}{J_D} \end{bmatrix} I_D - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_D} \end{bmatrix} T_F \right\}$$

2) 由控制方程得到 $\frac{\partial H}{\partial I_D} = 2I_D + [\lambda_1 \quad \lambda_2] \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m}{J_D} \end{bmatrix} = 0$

即 $2I_D + \frac{K_m}{J_D} \lambda_2 = 0 \quad I_D = -\frac{1}{2} \frac{K_m}{J_D} \lambda_2$

3) 由伴随方程 $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$, 得到

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \qquad \lambda_1 = c_1 = \text{const}$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 = -c_1 \qquad \lambda_2 = -c_1 t + c_2 \quad (c_1, c_2 \text{ 为积分常数})$$

$$I_D = \frac{1}{2} \frac{K_m}{J_D} (-c_1 t + c_2)$$

4) 由状态方程得

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{K_m}{J_D} I_D - \frac{1}{J_D} T_F = \frac{1}{2} \frac{K_m^2}{J_D^2} c_1 t - \frac{1}{2} \frac{K_m^2}{J_D^2} c_2 - \frac{1}{J_D} T_F$$

$$x_2 = \frac{1}{4} \frac{K_m^2}{J_D^2} c_1 t^2 - \left(\frac{1}{2} \frac{K_m^2}{J_D^2} c_2 + \frac{1}{J_D} T_F \right) t + c_3$$

$$x_1 = \frac{1}{12} \frac{K_m^2}{J_D^2} c_1 t^3 - \frac{1}{4} \frac{K_m^2}{J_D^2} c_2 t^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{J_D} T_F t^2 + c_3 t + c_4$$

(c_3, c_4 为积分常数)

根据边界条件，确定积分常数，得

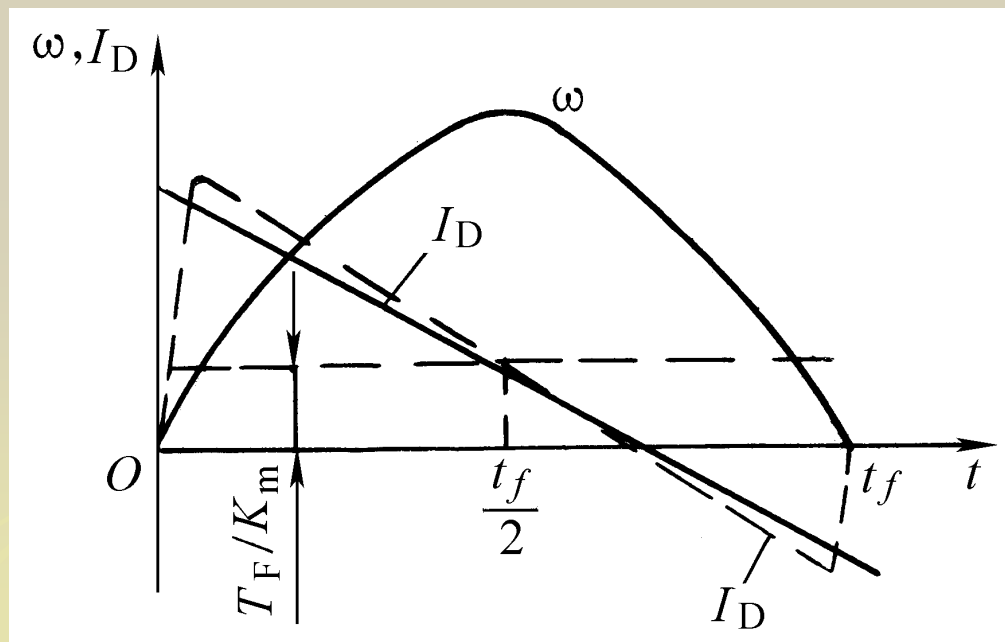
$$c_3 = c_4 = 0 \quad c_1 = \frac{-24\theta}{t_f^3} \frac{J_D^2}{K_m^2} \quad c_2 = \frac{-12\theta}{t_f^2} \frac{J_D^2}{K_m^2} - \frac{2J_D}{K_m^2} T_F$$

代入 $x_2(t) = \omega(t)$ 和 $I_D(t)$

$$\omega(t) = x_2 = \frac{6\theta}{t_f^2} \left[t - \frac{t^2}{t_f} \right] \quad I_D(t) = \frac{1}{K_m} \left[\left(\frac{6\theta J_D}{t_f^2} + T_F \right) t - \frac{12\theta J_D}{t_f^3} t^2 \right]$$

它们的曲线如图所示

(图中 $I_D(t)$ ，实线是理论上的变化，虚线是实际的轨线。)



6.2.3 末值时刻自由情况下的最优控制

非线性时变系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

初始状态 $\mathbf{x}(t) \Big|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0)$

初始时刻 t_0 固定，末值时刻 t_f 是自由的。 $\mathbf{x}(t_f)$ 自由，性能指标

$$J = \phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \tag{34}$$

寻求最优控制 $\mathbf{u}^*$ 以及 t_f^* ，使性能指标 J 取极小值。为了求出最优控制，引入哈密顿函数

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad \text{其中} \quad \boldsymbol{\lambda}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{bmatrix}$$

于是 $J = \phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} [H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) - \boldsymbol{\lambda}^T(t) \dot{\mathbf{x}}] dt$

可以变分的量 $\mathbf{u} \quad \mathbf{x} \quad \mathbf{x}(t_f) \quad t_f$

不能变分的量 $\mathbf{x}(t_0) \quad t_0 \quad \boldsymbol{\lambda}(t)$

$$\delta J = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \right)^T \delta \mathbf{x}(t_f) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t_f} \right) \delta t_f + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \delta \mathbf{x} + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \delta \mathbf{u} - \boldsymbol{\lambda}^T \delta \dot{\mathbf{x}} \right] dt$$

$$+ [H - \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}}]_{t=t_f} \delta t_f$$

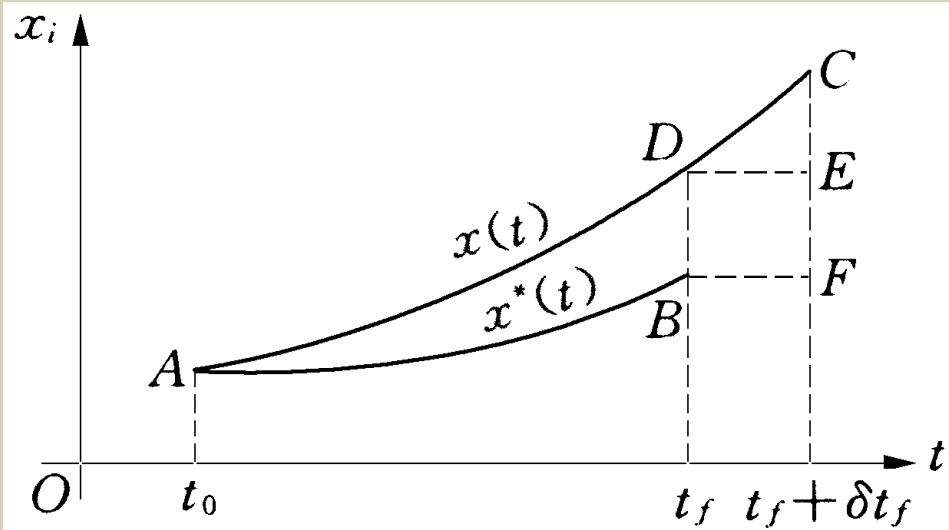
上式中 H 为 $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t)$ 的简化表示

对上式中 $\int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{\lambda}^T \delta \dot{\mathbf{x}} dt$ 进行分部积分, δJ 成为

$$\delta J = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \delta \mathbf{x}(t_f) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t_f} \right) \delta t_f + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \delta \mathbf{x} + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \delta \mathbf{u} \right] dt$$

$$- [\boldsymbol{\lambda}^T \delta \mathbf{x}]_{t=t_f} + [H - \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}}]_{t=t_f} \delta t_f \quad (35)$$

应当注意，末值时刻 t_f 自由时， $\delta \mathbf{x}|_{t=t_f}$ 不等于 $\delta \mathbf{x}(t_f)$



$$\delta \mathbf{x}(t_f) \approx \delta \mathbf{x}|_{t=t_f} + \dot{\mathbf{x}}(t_f) \delta t_f \quad \text{或} \quad \delta \mathbf{x}|_{t=t_f} \approx \delta \mathbf{x}(t_f) - \dot{\mathbf{x}}(t_f) \delta t_f$$

上式代入 (35) 式

$$\delta J = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}(t_f)} - \lambda(t_f) \right)^T \delta \mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\lambda} \right)^T \delta \mathbf{x} + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \delta \mathbf{u} \right] dt$$

$$+ \left[\frac{\partial \phi}{\partial t_f} + H(t_f) \right] \delta t_f$$

性能指标取极值时，必有 $\delta J = 0$

$$\begin{aligned} \delta J = & \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}(t_f)} - \lambda(t_f) \right)^T \delta \mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\lambda} \right)^T \delta \mathbf{x} + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \delta \mathbf{u} \right] dt \\ & + \left[\frac{\partial \phi}{\partial t_f} + H(t_f) \right] \delta t_f = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

选择 $\lambda(t)$ 使其满足 $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$ (37)

$$\lambda(t_f) = -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \quad (38)$$

由于 $\delta \mathbf{u}$ 、 δt_f 是任意的，可得

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (39)$$

$$H(t_f) = -\frac{\partial \phi}{\partial t_f} \quad (40)$$

而

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (41)$$

例6-3 系统的状态方程为 $\dot{x} = u$

$$x(0) = 1 \quad x(t_f) = 0$$

性能指标 $J = t_f^2 + \int_0^{t_f} u^2 dt$

求最优控制 $u^*(t)$ 和末值时刻 t_f ，使性能指标泛函取极小值。

解 经判断系统是能控的

1) 构造哈密顿函数 $H(x, u, t) = u^2 + \lambda u$

2) 由控制方程 $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, 得

$$2u^* + \lambda = 0 \quad \text{或} \quad u^* = -\frac{1}{2}\lambda$$

3) 由伴随方程

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad \lambda = \text{const} = c_1 \quad u^* = -\frac{1}{2}c_1$$

4) 将 u^* 代入状态方程

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}c_1 \quad \text{解为} \quad x = -\frac{1}{2}c_1 t + c_2$$

其中, c_1 、 c_2 为积分常数, 由 $x(0)$, $x(t_f)$ 确定, 得

$$c_1 = \frac{2}{t_f} \quad c_2 = x(0) = 1$$

5) 由于 t_f 自由, $H(t_f) = -\frac{\partial \phi}{\partial t_f} = 0$, 得到

$$u^2(t_f) + \lambda u(t_f) = -2t_f \quad \text{或} \quad u^2(t_f) + \lambda u(t_f) + 2t_f = 0$$

解得

$$c_1 = \sqrt[3]{16}$$

$$t_f = 2^{-\frac{1}{3}}$$

$$u^* = -2^{\frac{1}{3}}$$

$$x^* = -2^{\frac{1}{3}}t + 1$$

6.3 极小值原理及其在快速控制中的应用

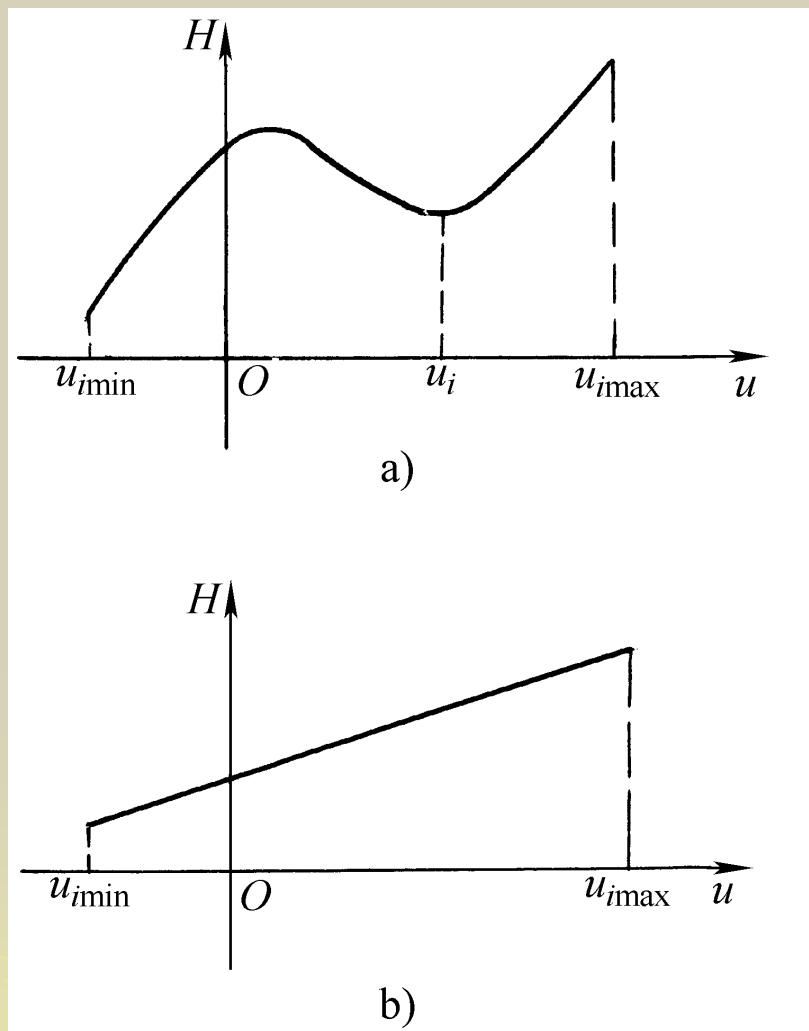
6.3.1 问题的提出

用变分法求解最优控制时，认为控制向量 $u(t)$ 不受限制。但是实际的系统，控制信号都是受到某种限制的。 $u(t) \in U \subset R^r$

因此，应用控制方程 $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ 来确定最优控制，可能出错。

a) 图中所示， H 最小值出现在左侧，不满足控制方程。

b) 图中不存在 $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$



6.3.2 极小值原理

非线性定常系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (42)$$

初始时刻 t_0 , 初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$, 末值时刻 t_f , 末端状态 $\mathbf{x}(t_f)$ 自由

$$\mathbf{u}(t) \in U \quad (43)$$

性能指标为末值型性能指标

$$J = \phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] \quad (44)$$

要求在状态方程约束下, 寻求最优控制 $\mathbf{u}^* \in U$ 及 t_f 使系统从 $\mathbf{x}(t_0)$ 转移到 $\mathbf{x}(t_f)$, 并使 J 取极小值。

以下就是用极小值原理解前面的问题：

设 $u(t)$ 为容许控制， $x(t)$ 为对应的状态轨线。为了使它们分别成为最优控制 $u^*(t)$ 和最优轨线 $x^*(t)$ ，存在一个向量函数 $\lambda^*(t)$ ，使得

$$\dot{x}^* = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (45)$$

$$\dot{\lambda}^* = \frac{\partial H}{\partial x} \quad (46)$$

其中哈密顿函数：

$$H(x, u, \lambda, t) = \lambda^T f(x, u) \quad (47)$$

$x^*(t)$ 和 $\lambda^*(t)$ 满足边界条件

$$x^*(t) \Big|_{t=t_0} = x(t_0) \quad (48)$$

$$\lambda^*(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial x(t_f)} \quad (49)$$

则哈密顿函数 H 相对最优控制取极小值，即

$$H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \lambda^*, t) = \min_{\mathbf{u} \in U} H[\mathbf{x}^*, \mathbf{u}, \lambda^*, t] \quad (50)$$

或者

$$H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \lambda^*, t) \leq H[\mathbf{x}^*, \mathbf{u}, \lambda^*, t] \quad (51)$$

哈密顿函数沿最优轨线随时间的变化规律：

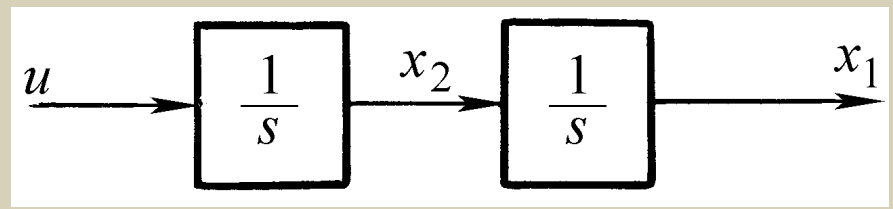
在末值时刻 t_f 是固定的情况 $H^*(t) = H^*(t_f) = \text{const}$ (52)

在末值时刻 t_f 是自由的情况 $H^*(t) = H^*(t_f) = 0$ (53)

几点说明：

- 1) 极小值原理给出的只是最优控制应该满足的必要条件。
- 2) 极小值原理的结果与用变分法求解最优问题的结果相比，差别仅在于极值条件。
- 3) 这里给出了极小值原理，而在庞德里亚金著作论述的是极大值原理。因为求性能指标 J 的极小值与求 $-J$ 的极大值等价。
- 4) 非线性时变系统也有极小值原理。

6.3.3 二次积分模型的快速控制



在问题**6-2**中，若 $T_F = 0$, $K_m / J_D = 1$, 令 $I_D(t) = u(t)$ 。就是二次积分模型。

其状态方程模型

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \right\}$$

(54)

$$|u| \leq 1$$

(55)

系统的初始状态为

$$x_1(0) \qquad x_2(0)$$

(56)

末值状态为

$$x_1(t_f) = 0 \qquad x_2(t_f) = 0$$

(57)

性能指标为

$$J = \int_0^{t_f} dt = t_f$$

(58)

要求在状态方程约束下，寻求满足（55）式的最优控制 $u^*(t)$ ，使系统从 $x(0)$ 转移到 $x(t_f)$ ，同时使 J 取极小值。

因为在这个最优控制问题中，控制信号 $u(t)$ 受限制，因此用极小值原理来求解。系统是能控的，其解存在且唯一。

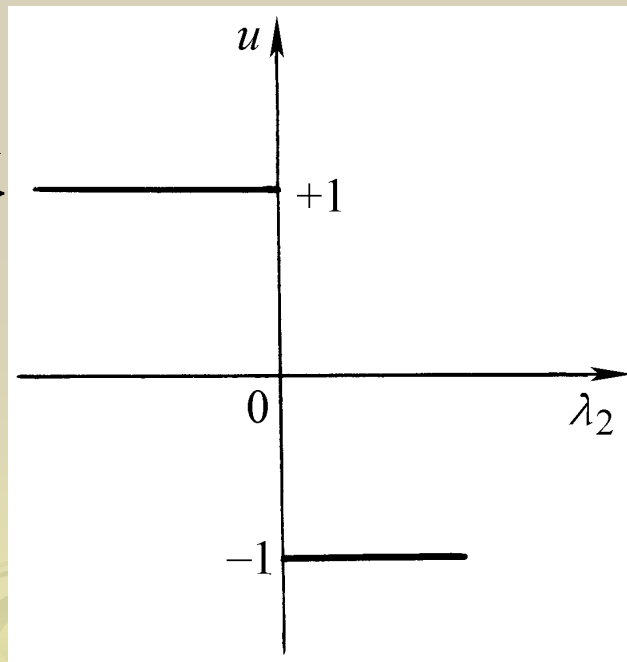
1) 哈密顿函数为
$$H(x, u, \lambda, t) = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u \quad (59)$$

2) 根据极值条件（50），来确定最优控制。

只能用分析的方法确定 $u(t)$ ，使哈密顿函数取极小值。显然，在 u 的限制条件下，选择 u 使 H 取得极小。有

$$u^* = \begin{cases} 1 & \lambda_2(t) < 0 \\ -1 & \lambda_2(t) > 0 \end{cases} \quad (60)$$

或
$$u^* = -\text{sign } \lambda_2(t) \quad (61)$$



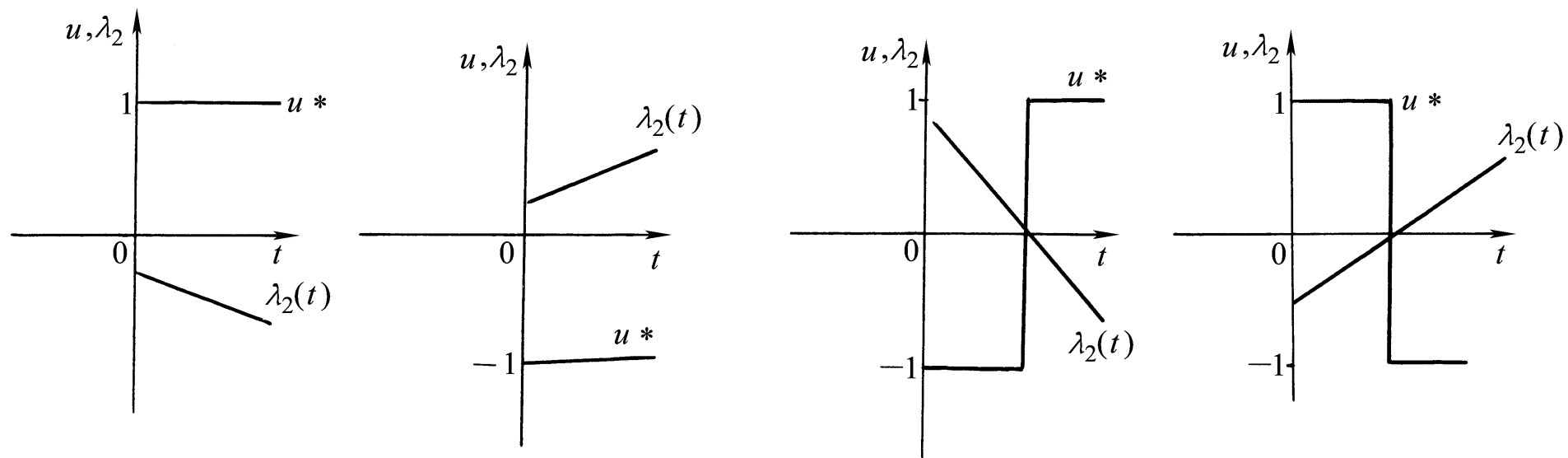
3) 伴随方程为

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \quad \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1 \quad (62)$$

如果 $\lambda(t)$ 的初始值为 $\lambda_1(0) = d_1$, $\lambda_2(0) = d_2$, 则

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= d_1 \\ \lambda_2 &= d_2 - d_1 t \end{aligned} \quad (63)$$

$\lambda_2(t)$ 在 $[0, t_f]$ 内最多变号一次, 最优控制函数有以下可能的4种情况



4) 由状态方程可知, 当 $u^* = \pm 1$ 时, 求得 $x_2(t) = x_2(0) \pm t$

$$x_1(t) = x_1(0) + x_2(0)t \pm \frac{1}{2}t^2$$

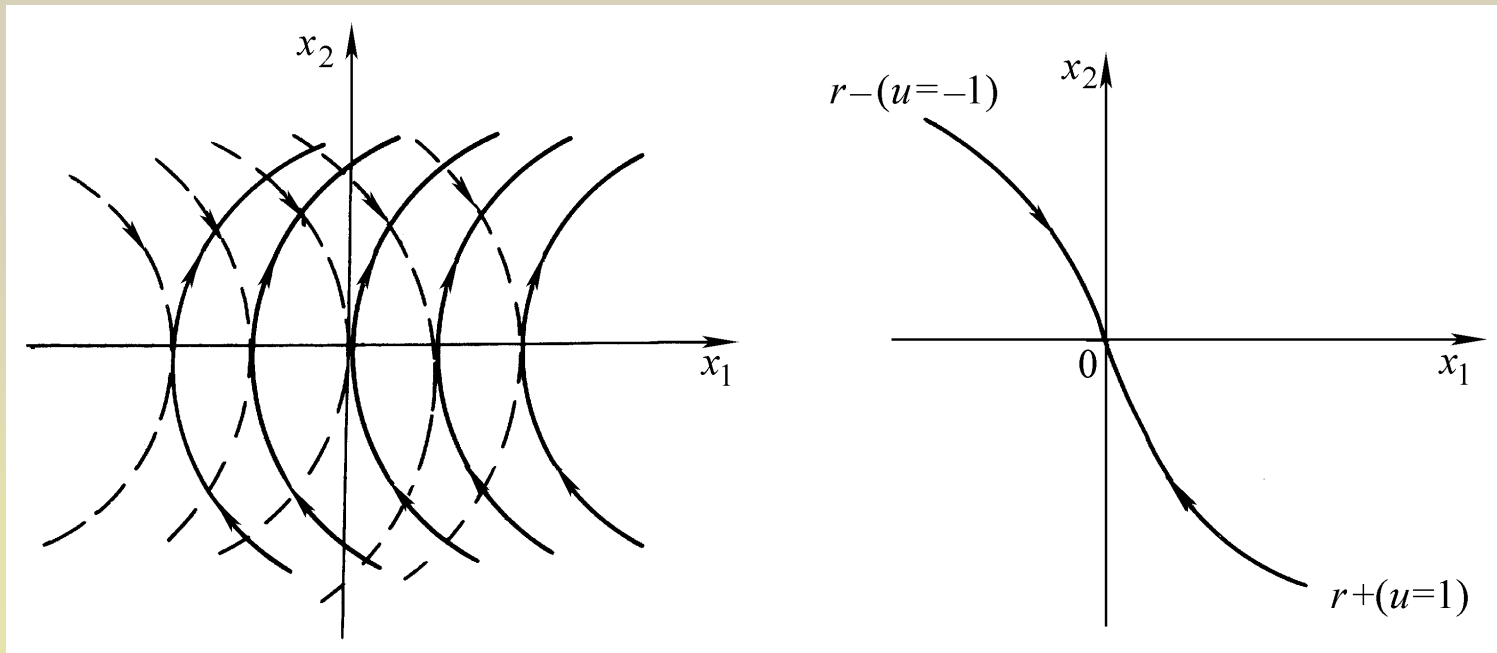
消去 t 得

$$x_1(t) = [x_1(0) \mp \frac{1}{2}x_2^2(0)] \pm \frac{1}{2}x_2^2(t)$$

或写成

$$x_1 = [x_1(0) \mp \frac{1}{2}x_2^2(0)] \pm \frac{1}{2}x_2^2$$

为了形象地表示系统的运动形态, 引用相平面方法, 画出相轨迹如下图所示。相轨迹为两族抛物线。



从 $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$ 到达 $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$ 的相轨迹只有两条 r_+ 、 r_- 。

$$u^* = +1 \quad r_+ = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 \quad x_2 \leq 0\}$$

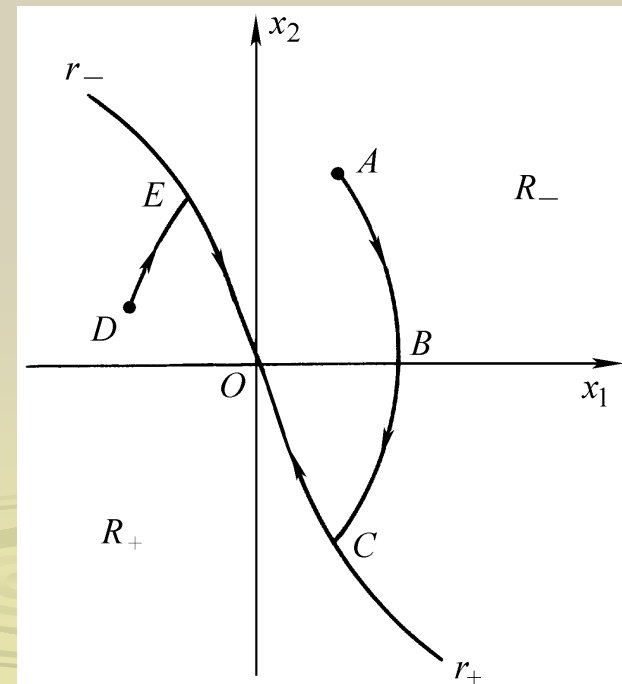
$$u^* = -1 \quad r_- = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 \quad x_2 \geq 0\}$$

将 r_+ 和 r_- 合起来, $r = r_+ \cup r_- = \left\{ (x_1, x_2) \mid x_1 = -\frac{1}{2}x_2|x_2| \right\}$

曲线 r 将相平面分成两个区域 R_+ 和 R_-

$$R_- = \left\{ (x_1, x_2) \mid x_1 > -\frac{1}{2}x_2|x_2| \right\}$$

$$R_+ = \left\{ (x_1, x_2) \mid x_1 < -\frac{1}{2}x_2|x_2| \right\}$$



最优轨线：当初始状态 $x(0)$ 位于 R_- : u^* 为 $(-1, +1)$ $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$

当初始状态 $x(0)$ 位于 R_+ : u^* 为 $(+1, -1)$ $D \rightarrow E \rightarrow 0$

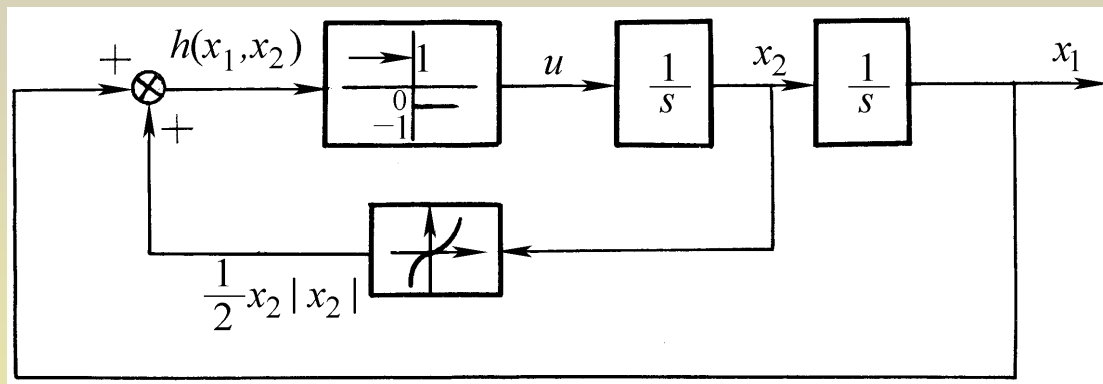
曲线 r 常称为转移曲线或开关曲线。

开关曲线方程式为
$$h(x_1, x_2) = x_1 + \frac{1}{2} x_2 |x_2| = 0$$

$h(x_1, x_2)$ 也称为开关函数。最优控制为

$$u^*(t) = \begin{cases} +1 & \text{当 } h(x_1, x_2) < 0 \text{ 及 } h(x_1, x_2) = 0, x_2 \leq 0 \\ -1 & \text{当 } h(x_1, x_2) > 0 \text{ 及 } h(x_1, x_2) = 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

最优控制系统的结构图，如下图所示



5) 最优性能指标

初始状态在**A**点: $t_f^* = t_{AC} + t_{CO}$

$$t_{AC} = x_2(0) + \sqrt{x_1(0) + \frac{1}{2}x_2^2(0)} \quad t_{CO} = \sqrt{x_1(0) + \frac{1}{2}x_2^2(0)}$$

$$t_f^* = t_{AC} + t_{CO} = x_2(0) + \sqrt{4x_1(0) + 2x_2^2(0)}$$

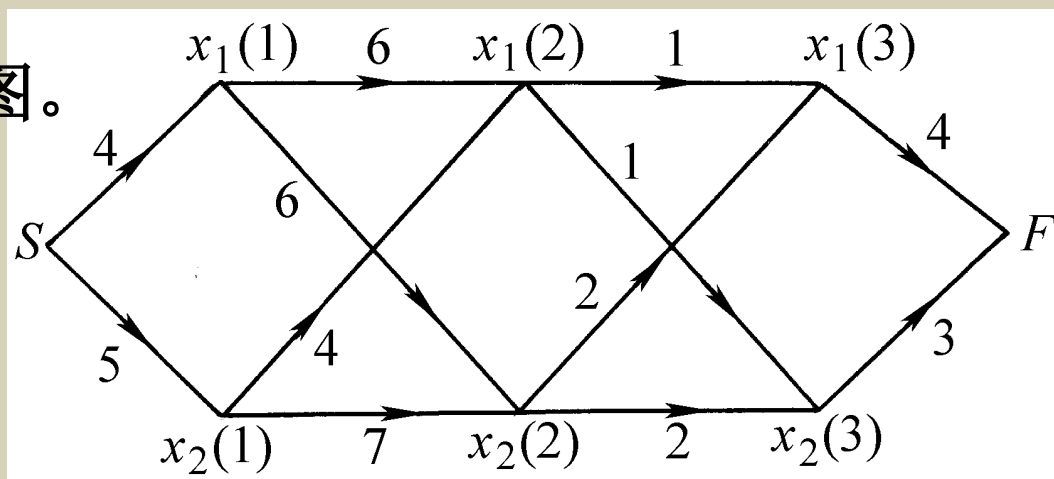
说明：通过这个最优控制问题的求解发现，最优控制与问题**6-1**不同。在问题**6-1**中， $u^*(t) = I_D(t)$ 为时间的三角函数。而在这里， $u^*(t) = I_D(t)$ 为时间方波函数。原因在于性能指标不同，因此 $u^*(t)$ 也不同。因此，在说到最优控制问题时，一定要指明性能指标，即求解在什么性能指标下的最优。

6.4 用动态规划法求解最优控制问题

6.4.1 动态规划法的基本思想

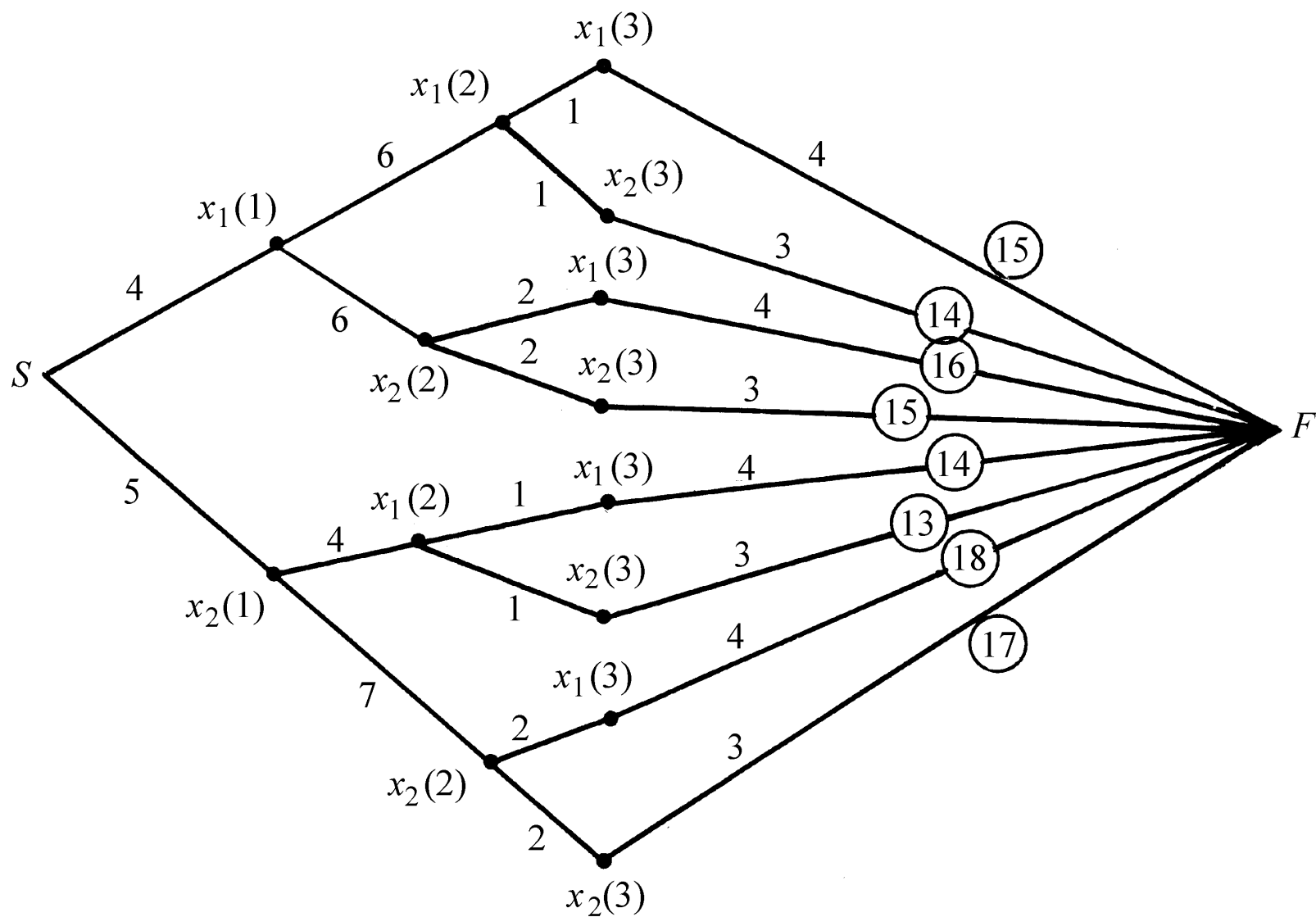
右图为某小城镇交通路线图。
起点站为 S ，终点站为 F ，

$x_1(1)$	$x_1(2)$	$x_1(3)$
$x_2(1)$	$x_2(2)$	$x_2(3)$

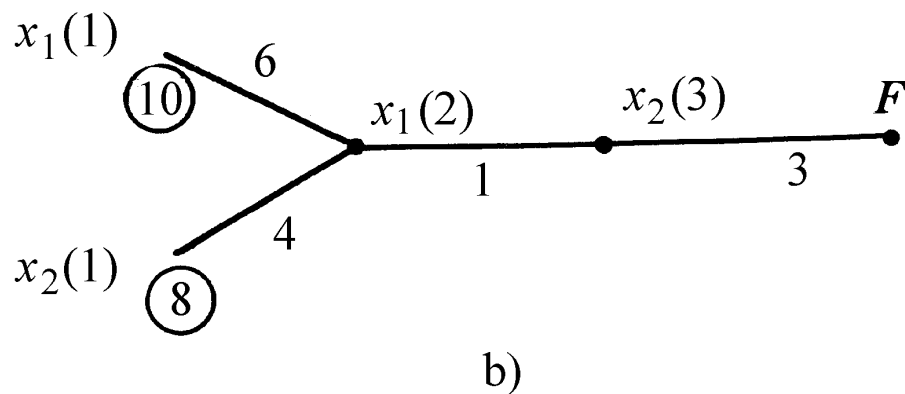
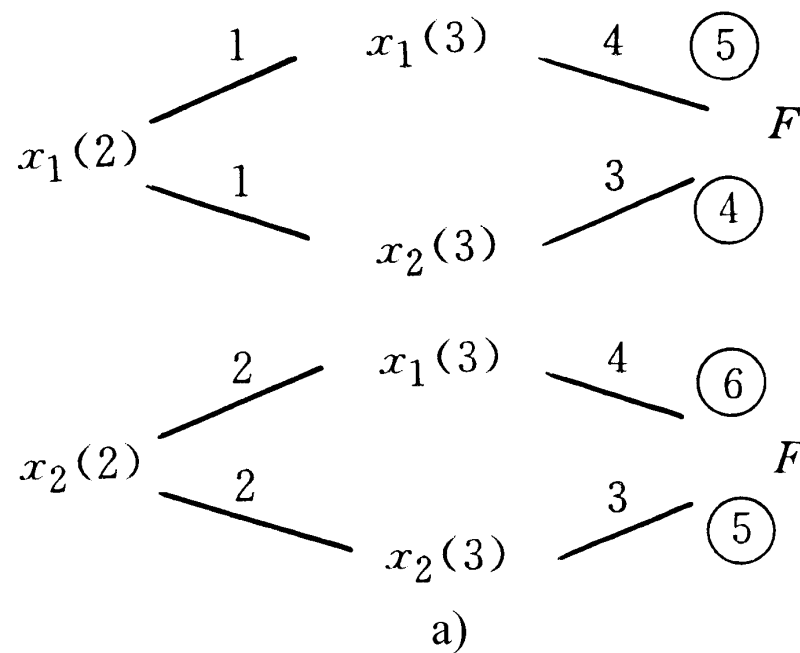


站与站之间的里程标在图上，要求选择一条路线走法，使里程最短。这是一个最优控制问题。

一种办法是将从 S 到 F 所有可能走法都列出来，并且把每种走法的里程标在各条路线上，找出最短的。



第二个办法：从最后一段开始，向前倒推。当倒推到某一站时，计算该站到终点站的总里程，并选择里程最少的走法。



从该例看出，这种解法有两个特点：第一，它把一个复杂的问题（即：决定一条路线的选择问题）变成许多个简单的问题（即：每次只决定向上走（ p ）还是向下走（ q ）的问题），因此问题的求解变得简单容易了。

不变嵌入原理的含义是：为了解决一个特定的最优控制问题，而把原问题嵌入到一系列相似的但易于求解的问题中去。对于一个多级最优控制过程来说，就是把原来的多级最优控制问题代换成一系列单级最优控制问题。

6.4.2 最优性原理

最优性原理——在一个多级决策问题中的最优决策具有这样的性质，不管初始级、初始状态和初始决策是什么，当把其中任何一级和这一级的状态再作为初始级和初始状态时，余下的决策对此必定构成一个最优决策。

将最优性原理应用到离散系统中去，系统状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)]$$

初始状态为 $\mathbf{x}(k) \Big|_{k=0} = \mathbf{x}(0)$

性能指标为 $J = \sum_{k=0}^N L[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)]$

要求确定 $\mathbf{u}(k)$ ，使性能指标最优，即 $J = \text{opt}$

一般认为，第 k 级决策 $\mathbf{u}(k)$ 与第 k 级以及 k 以前各级状态 $\mathbf{x}(k-i)$ 和决策 $\mathbf{u}(k-i)$ 有关 ($i=1,2,\dots$)

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k-1), \dots, \mathbf{u}(k), \mathbf{u}(k-1), \dots] \quad (64)$$

以上函数称为策略函数

$$\begin{aligned} J^*[\mathbf{x}(0), 0] &= \underset{u(0), u(1), \dots, u(N)}{\text{opt}} \{L[\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0)] + L[\mathbf{x}(1), \mathbf{u}(1)] + \dots + L[\mathbf{x}(N), \mathbf{u}(N)]\} \\ &= \underset{u(0)}{\text{opt}} \{L[\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0)]\} + \underset{u(1), u(2), \dots, u(N)}{\text{opt}} \{L[\mathbf{x}(1), \mathbf{u}(1)] + \dots + L[\mathbf{x}(N), \mathbf{u}(N)]\} \end{aligned}$$

如果记 $J^*[\mathbf{x}(1), 1] = \underset{u(1), u(2), \dots, u(N)}{\text{opt}} \{L[\mathbf{x}(1), \mathbf{u}(1)] + \dots + L[\mathbf{x}(N), \mathbf{u}(N)]\}$

则 $J^*[\mathbf{x}(0), 0] = \underset{u(0)}{\text{opt}} \{L[\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0)] + J^*[\mathbf{x}(1), 1]\}$

对于任意级 k ，有

$$J^*[\mathbf{x}(k), k] = \underset{u(k)}{\text{opt}} \{L[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)] + J^*[\mathbf{x}(k+1), k+1]\} \quad (65)$$

应该指出，最优性原理所肯定的是余下的决策为最优决策。对以前的决策没有明确的要求。

6.4.3 用动态规划法求解离散系统最优控制问题

系统状态方程为 $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$ (66)

$$\mathbf{x}(k) \Big|_{k=0} = \mathbf{x}(0) \quad (67)$$

$$J = \sum_{k=0}^N L(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \quad (68)$$

要求在状态方程约束下，寻求 $\mathbf{u}(k)$ 使 $J = \min$

$\mathbf{u}(k)$ 可以受限制，也可以不受限制。

$$J^*[\mathbf{x}(k), k] = \min_{\mathbf{u}(k)} \{L[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)] + J^*[\mathbf{x}(k+1), k+1]\}$$

例6-4 线性定常离散系统的状态方程为

$$x(k+1) = x(k) + u(k)$$

初始状态为 $x(0)$ ，性能指标为

$$J = \frac{1}{2}cx^2(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} u^2(k)$$

寻求最优控制序列 $u(k)$ ，使 $J = \min$ （为了简单起见，设 $N = 2$ ）

解 运用动态规划法来求解

1) 从最后一级开始，即 $k = 2$

$$J^* = [x(2), 2] = \frac{1}{2}cx^2(2)$$

2) 向前倒推一级, 即 $k = 1$

$$\begin{aligned} J^*[x(1), 1] &= \min_{u(1)} \left\{ \frac{1}{2} u^2(1) + J^*[x(2), 2] \right\} = \min_{u(1)} \left\{ \frac{1}{2} u^2(1) + \frac{1}{2} c x^2(2) \right\} \\ &= \min_{u(1)} \left\{ \frac{1}{2} u^2(1) + \frac{1}{2} c [x(1) + u(1)]^2 \right\} \end{aligned}$$

因为 $u(k)$ 不受限制, 故 $u^*(1)$ 可以通过下式求得

$$\frac{\partial J^*[x(1), 1]}{\partial u(1)} = u(1) + cx(1) + cu(1) = 0$$

$$u^*(1) = -\frac{cx(1)}{1+c} \quad J^*[x(1), 1] = \frac{cx^2(1)}{2(1+c)}$$

$$x^*(2) = x(1) + u^*(1) = \frac{x(1)}{1+c}$$

3) 再向前倒推一级, 即 $k = 0$

$$\begin{aligned} J^*[x(0), 0] &= \min_{u(0)} \left\{ \frac{1}{2} u^2(0) + J^*[x(1), 1] \right\} = \min_{u(0)} \left\{ \frac{1}{2} u^2(0) + \frac{cx^2(1)}{2(1+c)} \right\} \\ &= \min_{u(0)} \left\{ \frac{1}{2} u^2(0) + \frac{c[x(0) + u(0)]^2}{2(1+c)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{由 } \frac{\partial J^*[x(0), 0]}{\partial u(0)} = 0, \text{ 解得 } \quad u^*(0) &= -\frac{cx(0)}{1+c} \quad J^*[x(0), 0] = \frac{cx^2(0)}{2(1+c)} \\ x^*(1) &= \frac{1+c}{1+2c} x(0) \quad x^*(2) = \frac{1}{1+2c} x(0) \end{aligned}$$

注意: 1、 对一个多级决策过程来说, 最优性原理保证了全过程性能指标最小, 并不保证每一级性能指标最小。但是在每考虑一级时, 都不是孤立地只把这一级的性能指标最小的决策作为最优决策, 而总是把这一级放到全过程中去考虑, 取全过程的性能指标最优的决策作为最优决策。

2、 动态规划法给出的是最优控制的充分条件, 不是必要条件。这和极小值原理是不同的。

6.4.4 用动态规划法求解连续系统最优控制问题

非线性时变系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (69)$$

初始条件

$$\mathbf{x}(t) \Big|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0) \quad (70)$$

性能指标

$$J = \phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \quad (71)$$

要寻求最优控制，在满足状态方程（69）的条件下，使 J 取极小值

$$J^*(t_0, \mathbf{x}(t_0)) = \min_{\mathbf{u} \in U} \left\{ \phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{L}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, t) dt \right\} \quad (72)$$

满足条件

$$J^*(\mathbf{x}(t_f), t_f) = \phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] \quad (73)$$

求解时，用到连续系统的最优性原理。

如果对于初始时刻 t_0 和初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 来说, $\mathbf{u}^*(t)$ 和 $\mathbf{x}^*(t)$ 是系统的最优控制和最优轨线。那么, 对于 $t + \Delta t \in [t_0, t_f]$ 和状态 $\mathbf{x}(t + \Delta t)$, 它们仍是所研究的系统往后的最优控制和最优轨线。

假定 $J^*[\mathbf{x}(t), t]$ 是存在的且是连续的并且有连续的一阶、二阶偏导数, 由最优性原理可以写出

$$\begin{aligned} J^*[\mathbf{x}(t), t] &= \min_{u[t, t_f] \in U} \int_t^{t_f} L[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau] d\tau \\ &= \min_{u[t, t_f] \in U} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} L[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau] d\tau + \int_{t+\Delta t}^{t_f} L[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau] d\tau \right\} \\ &= \min_{u[t, t+\Delta t] \in U} \left\{ \min_{u[t+\Delta t, t_f] \in U} \left[\int_t^{t+\Delta t} L[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau] d\tau + \int_{t+\Delta t}^{t_f} L[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau] d\tau \right] \right\} \end{aligned} \quad (74)$$

用类似**6.4.2**中的处理方法，令

$$J^*[\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t] = \min_{u[t + \Delta t, t_f] \in U} \int_{t + \Delta t}^{t_f} L[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau] d\tau \quad (75)$$

则（74）式可以写成

$$J^*[\mathbf{x}(t), t] = \min_{u[t, t + \Delta t] \in U} \left\{ \int_t^{t + \Delta t} L[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau] d\tau + J^*[\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t] \right\} \quad (76)$$

由于 $J^*[\mathbf{x}(t), t]$ 对于 $\mathbf{x}$ 、 t 是连续可微的，故式（76）右边第二项可以展开成台劳级数，取一阶近似

$$J^*[\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t] = J^*[\mathbf{x}(t), t] + \left(\frac{\partial J^*[\mathbf{x}(t), t]}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \Delta t + \frac{\partial J^*[\mathbf{x}(t), t]}{\partial t} \cdot \Delta t \quad (77)$$

而由中值定理，（76）式右边第一项可以写成

$$\int_t^{t+\Delta t} L[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau] d\tau = L[\mathbf{x}(t + \alpha \Delta t), \mathbf{u}(t + \alpha \Delta t), t + \alpha \Delta t] \cdot \Delta t \quad (78)$$

其中， α 是介于0和1之间的某一常数。

将（77）、（78）式代入（76）式

$$J^*[\mathbf{x}(t), t] = \min_{\mathbf{u}[t, t+\Delta t] \in U} \left\{ L[\mathbf{x}(t + \alpha \Delta t), \mathbf{u}(t + \alpha \Delta t), t + \alpha \Delta t] \cdot \Delta t + J^*[\mathbf{x}(t), t] + \left(\frac{\partial J^*[\mathbf{x}(t), t]}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \Delta t + \frac{\partial J^*[\mathbf{x}(t), t]}{\partial t} \cdot \Delta t \right\} \quad (79)$$

对（79）式简化，并且令 $\Delta t \rightarrow 0$

$$-\frac{\partial J^*[\mathbf{x}(t), t]}{\partial t} = \min_{\mathbf{u}[t, t+\Delta t] \in U} \left\{ L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] + \left(\frac{\partial J^*[\mathbf{x}(t), t]}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right\} \quad (80)$$

（80）式称为哈密顿—贝尔曼方程，是用动态规划法求解最优控制问题的基本方程。

显然有

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{u}^* \left[\mathbf{x}(t), \frac{\partial J^*[\mathbf{x}(t), t]}{\partial \mathbf{x}}, t \right] \quad (81)$$

方程 (80) 的边界条件

$$J^*(\mathbf{x}(t_f), t_f) = \phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] \quad (82)$$

如果性能指标泛函中无末值项，则

$$J^*(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0 \quad (83)$$

注意：哈密顿—贝尔曼方程是求解最优控制问题的充分条件，不是必要条件。

用动态规划法求解连续系统最优控制问题的步骤:

1) 求满足

$$\min_{u[t, t+\Delta t] \in U} \left\{ L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] + \left(\frac{\partial J^*[\mathbf{x}(t), t]}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right\}$$

的解 $\mathbf{u}^*(t)$ (84)

在求解方程 (84) 时, 若 $\mathbf{u}(t)$ 不受限制, 则在引入哈密顿时, 有

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0$$

如果 $\mathbf{u}(t)$ 受限, 即 $\mathbf{u} \in U \in R^r$, 在确定 $\mathbf{u}^*(t)$ 时, 只能用分析方法, 使

$$H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \lambda, t) \leq H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}, \lambda, t)$$

2) 将 $\mathbf{u}^*(t)$ 代入 (80)、(82) 和 (83) 式, 解出 $J^*[\mathbf{x}(t), t]$

3) 将 $J^*[\mathbf{x}(t), t]$ 再代入 (84) 就得到最优控制 $\mathbf{u}^*(t)$

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{u}^* \left[\mathbf{x}(t), \frac{\partial J^*[\mathbf{x}(t), t]}{\partial \mathbf{x}}, t \right] \quad (85)$$

4) 将 (85) 式代入系统状态方程

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}^*(t), t) \\ \mathbf{x}(t) \Big|_{t=t_0} &= \mathbf{x}(t_0)\end{aligned}\tag{86}$$

可以求出最优轨线 $\mathbf{x}^*(t)$ 。把 $\mathbf{x}^*(t)$ 代入 (85) 式得到最优控制 $\mathbf{u}^*(t)$

例6-5 系统状态方程为 $\dot{x} = -x + u \quad x(0) = 1$

$|u| \leq 1$, 性能指标 $J = \int_0^\infty x^2 dt$ 。

寻求 u^* , 在状态方程约束下, J 取极小值。

解 1) 求 $\min_{|u| \leq 1} \left\{ x^2 + \left(\frac{\partial J^*}{\partial x} \right) (-x + u) \right\} = \min_{|u| \leq 1} \left\{ x^2 - \left(\frac{\partial J^*}{\partial x} \right) x + \left(\frac{\partial J^*}{\partial x} \right) u \right\}$

用分析方法, 可知 $u^* = -\text{sign} \left(\frac{\partial J^*}{\partial x} \right)$

2) 将 u^* 代入哈密顿-贝尔曼方程

$$x^2 - \frac{\partial J^*}{\partial x} \cdot x - \text{sign} \frac{\partial J^*}{\partial x} = 0 \quad \text{即} \quad x^2 - \frac{\partial J^*}{\partial x} \cdot x - \left| \frac{\partial J^*}{\partial x} \right| = 0$$

可以分析出 $\frac{\partial J^*}{\partial x}$ 是正函数，则哈密顿-贝尔曼方程可写成

$$x^2 - \frac{\partial J^*}{\partial x} \cdot x - \frac{\partial J^*}{\partial x} = 0$$

由于 J^* 与 t 无关，上式为一元微分方程，其通解为

$$J^* = \frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x) + c$$

其中， c 为积分常数，由边界条件确定为 $c=0$

$$J^* = \frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)$$

3) 将 J^* 代入 u^* 的表达式中

$$u^* = -\text{sign}\left(\frac{x^2}{1+x}\right) \quad \text{本例中} \quad u^*(t) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

4) 将 u^* 代入状态方程, 可解得

$$x^* = \begin{cases} 2e^{-t} - 1 & 0 \leq t < \ln 2 \\ 0 & t > \ln 2 \end{cases}$$

由此得

$$u^* = \begin{cases} -1 & 0 \leq t < \ln 2 \\ 0 & t > \ln 2 \end{cases}$$

最优性能指标 $J^*(1) = \ln 2 - \frac{1}{2} = 0.193$

6.5 线性状态调节器

6.5.1 引言

线性系统以二次型为性能指标的最优控制问题，已经在国内、外的工程实践中得到应用。原因如下：

- 1) 被控对象是线性的，最优控制问题容易求得解析解。
- 2) 线性系统最优控制的结果，可以在小信号条件下，应用于非线性系统。
- 3) 最优控制器是线性的，易于实现。
- 4) 线性、二次型性能指标的最优控制问题除了得到最优解外，还可以导出经典控制理论的一些特性。

6.5.2 有限时间状态调节器

线性时变系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \quad (87)$$

$$\mathbf{x}(t) \Big|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0) \quad (88)$$

其中， $\mathbf{x}$ 为 n 维状态向量； $\mathbf{u}$ 为 r 维控制向量，且 $\mathbf{u}$ 不受限制。

寻找一个最优控制 $\mathbf{u}^*$ ，使

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{F} \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q}(t) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u}] dt \quad (89)$$

为极小。

其中， $\mathbf{F}$ 为 $n \times n$ 对称半正定常数阵； $\mathbf{Q}(t)$ 为 $n \times n$ 对称半正定时变阵。 $\mathbf{R}(t)$ 为 $n \times n$ 对称正定时变阵。

求解这个最优控制问题，可以用极小值原理，也可以用动态规划法。这里用极小值原理来求解。

1) 哈密顿函数为

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q}(t) \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}^T [\mathbf{A}(t) \mathbf{x} + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}] \quad (90)$$

2) 伴随方程为 $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{Q}(t) \mathbf{x} - \mathbf{A}^T(t) \boldsymbol{\lambda}$ (91)

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{F} \mathbf{x}(t_f) \quad (92)$$

3) 控制方程为 $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{R}(t) \mathbf{u} + \mathbf{B}^T(t) \boldsymbol{\lambda} = 0$

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \boldsymbol{\lambda} \quad (93)$$
$$\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} = \mathbf{R}(t) > 0 \quad \text{故 } J \text{ 取极小值}$$

4) 将 u^* 代入状态方程得

$$\dot{x} = A(t)x - B(t)R^{-1}(t)B(t)\lambda \quad (94)$$

初始状态为 $x(t_0)$ (95)

将 (90) 式至 (95) 式联立，即可即可求解这个最优控制问题。

另外一种求解方式：

设 $\lambda(t) = P(t)x$ (96)

其中, $P(t)$ 为待定的 $n \times n$ 时变阵

(96) 式对 t 求导，并且将 (94) 式代入

$$\dot{\lambda} = [\dot{P}(t) + P(t)A(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)]x \quad (97)$$

(91) 式可改写成

$$\dot{\lambda} = -A^T(t)P(t)x - Q(t)x = [-A^T(t)P(t) - Q(t)]x \quad (98)$$

比较 (97) 和 (98)，可以得到

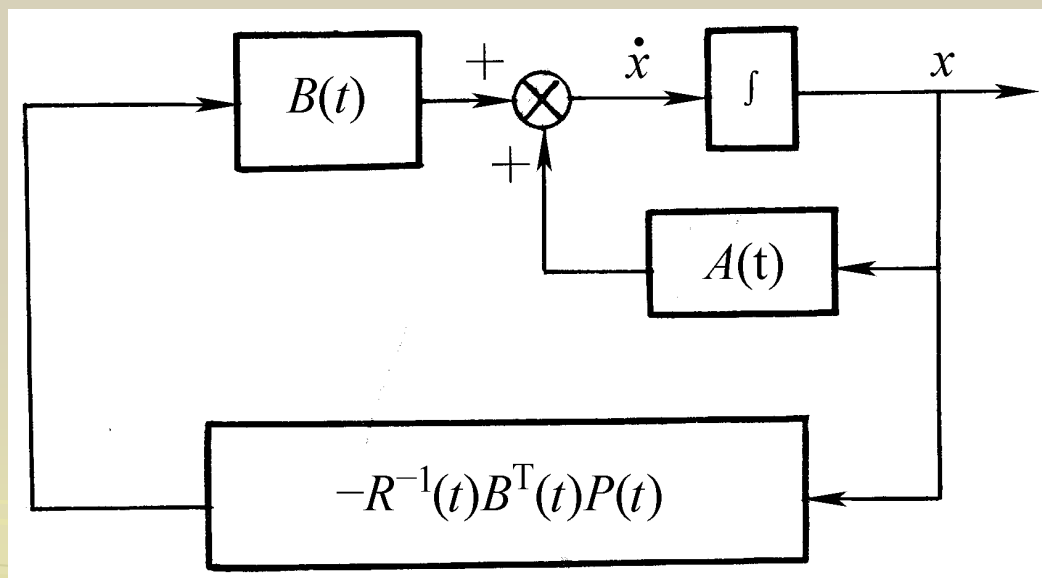
$$\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + Q(t) = 0 \quad (99)$$

(99) 式称为**Riccati**微分方程。其边界条件为

$$\lambda(t_f) = P(t_f)x(t_f) = Fx(t_f)$$

得到 $P(t_f) = F$ (100)

$$u^* = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x \quad (101)$$



状态反馈的闭环方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(t)\mathbf{x} \quad (102)$$

其中 $\mathbf{G}(t) = \mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)$ (103)

两点说明:

1) 由于矩阵黎卡提微分方程的解为对称

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}^T(t)$$

因此有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个独立的非线性标量微分方程。

2) 最优性能指标为

$$J^* = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{P}(t_0) \mathbf{x}(t_0) \quad (104)$$

(证明请见教材228页)

例6-6 系统状态方程为 $\dot{x} = ax + u$
 $x(t_0) = x(0)$

求最优控制 $u^*(t)$ ，使性能指标

$$J = \frac{1}{2}Fx^2(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} [x^2 + u^2]dt \quad \text{取极小值。}$$

解 矩阵的黎卡提方程为

$$\dot{P}(t) = P^2(t) - 2aP(t) - 1$$

求解上面的微分方程，有

$$\int_{P(t)}^{P(t_f)} \frac{dP(\tau)}{P^2(\tau) - 2aP(\tau) - 1} = \int_t^{t_f} d\tau$$

$$\int_{P(t)}^F \frac{dP(\tau)}{P^2(\tau) - 2aP(\tau) - 1} = \int_t^{t_f} d\tau$$

$$\int_{P(t)}^F \frac{dP(\tau)}{P^2(\tau) - 2aP(\tau) - 1} = -\frac{1}{2b} \ln \frac{P(t) - (a+b)[F - (a-b)]}{P(t) - (a-b)[F - (a+b)]} = t_f - t$$

$$\text{其中 } b = \sqrt{a^2 + 1}$$

即

$$P(t) = \frac{a + b + (b - a) \frac{F - a - b}{F - a + b} e^{-2b(t_f - t)}}{1 - \frac{F - a - b}{F - a + b} e^{-2b(t_f - t)}}$$

最优控制为

$$u^* = -P(t)x$$

由

$$\dot{x} = [a - P(t)]x$$

最优轨线为

$$x^* = e^{\int_0^t [a - P(t)] dt} x(0)$$

6.5.3 无限时间状态调节器

线性时变系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}$ (105)

$$\mathbf{x}(t) \Big|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0)$$

$$J = \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q}(t) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u}] dt \quad (106)$$

寻找一个最优控制 $\mathbf{u}^*$ ，使 J 取极小值

这里产生一个问题： $t_f \rightarrow \infty$ 时，性能指标是否收敛？

例如 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[\mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + u^2 \right] dt$$

寻找最优控制 u^* ，使 J 取极小值

根据分析，显然当 $u^* = 0$ 时， J 取极小值。

但是
$$\phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

$x_1(t) = e^t$ 是不能控的状态分量，而且是不稳定的。导致

$$J^* = \int_0^{\infty} e^{2t} dt \rightarrow \infty \quad \text{结论：该问题不存在有意义的解。}$$

如果线性时变系统（105）是能控的，无限时间状态调节器问题一定有解，并且可以通过有限时间状态调节器的解，取 $t_f \rightarrow \infty$ 来获得。其结果为

$$\text{最优控制} \quad u^* = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x \quad (107)$$

$$\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + Q(t) = 0 \quad (108)$$

$$P(t_f) = 0 \quad (109)$$

$$\text{最优性能指标} \quad J^* = \frac{1}{2} x^T(t_0)P(t_0)x(t_0) \quad (110)$$

可见，无限时间状态调节器与有限时间最优调节器类似，均可以用状态负反馈构成状态闭环控制。但是反馈增益矩阵是时变的，给工程实践带来不便。

卡尔曼研究了矩阵黎卡提微分方程解的各种性质，得出以下结果：

线性定常系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ (111)

$$\mathbf{x}(t) \Big|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0) \quad (112)$$

$$J = \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}] \mathrm{d} t \quad (113)$$

最优控制为 $\mathbf{u}^* = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{x}$ (114)

常数阵 $\bar{\mathbf{P}}$ 满足如下黎卡提矩阵代数方程

$$\bar{\mathbf{P}} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{P}} - \bar{\mathbf{P}} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} = 0 \quad (115)$$

(114) 式代入 (111) 式, 得

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^T\bar{P})x = Gx \quad (116)$$

最优轨线可以由 (116) 式和 (114) 式求出。

最优性能指标

$$J^* = \frac{1}{2} x^T(0) \bar{P}(0) x(0) \quad (117)$$

当这个无限时间状态调节器满足以下条件时, 状态反馈增益矩阵才为常数矩阵:

- 1) 系统为线性定常系统;
- 2) 系统为能控;
- 3) 末值时刻 $t_f \rightarrow \infty$;
- 4) J 中不含末值项, 即 $F = 0$;
- 5) Q, R 为正定阵。

例 6-7 线性定常系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \int_0^{\infty} \left\{ x^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} x + u^2 \right\} dt \quad \mu \geq 0$$

求最优控制 u^* ，使 J 取极小值。

解 检验系统能控性 $Q_c = \text{rank}[B \quad AB] = 2$ 能控。

设 $\bar{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$ 代入 (115) 式黎卡提方程，解得

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{3+\mu} & 1 \\ 1 & \sqrt{3+\mu}-1 \end{bmatrix}$$

$$J^* = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \bar{\mathbf{P}} \mathbf{x}(0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3+\mu} & 1 \\ 1 & \sqrt{3+\mu}-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sqrt{3+\mu}$$

当 $\mu=0$ 时, $J^* = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 当 $\mu=1$ 时, $J^* = 1$ 。

6.5.4 定常情况下状态调节器的稳定性

用李亚普诺夫第二法来研究其稳定性

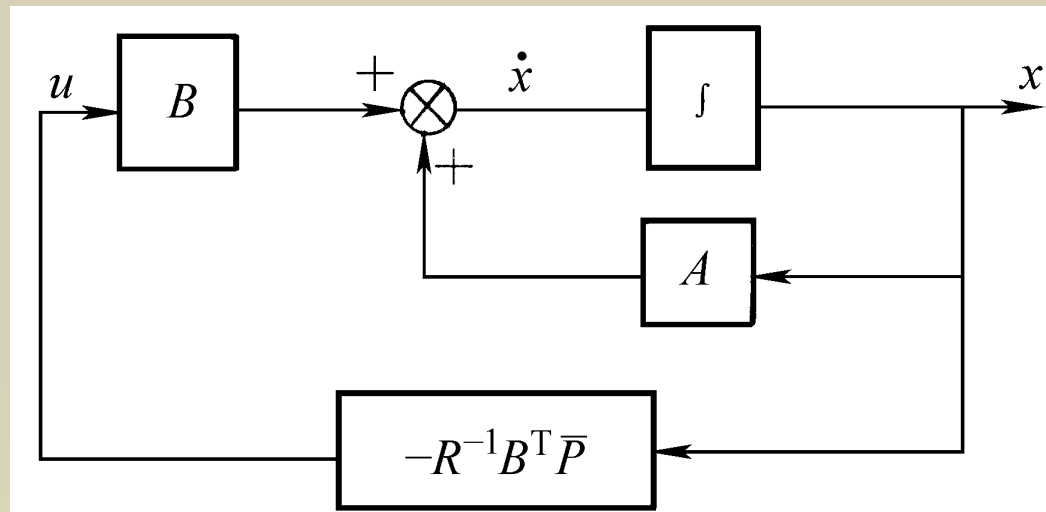
取Lyapunov函数

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{x} \quad (118)$$

假设 $\bar{\mathbf{P}}$ 正定, 所以 $V(\mathbf{x})$ 正定。

这里不加证明, 给出结论:

使 $\bar{\mathbf{P}}$ 为正定对称阵的充要条件是: $\{\mathbf{A}, \mathbf{D}\}$ 能观测。其中 $\mathbf{D}$ 是任意一个使 $\mathbf{D}\mathbf{D}^T = \mathbf{Q}$ 成立的矩阵。



$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{P}}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{P}}\dot{\mathbf{x}} \quad (119)$$

将 (116) 式代入 (119) 式，并且考虑 (115) 式，有

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \bar{\mathbf{P}}\mathbf{x} \quad (120)$$

由于 $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$ 为正定阵，而 $\bar{\mathbf{P}}$ 阵也为正定，则

$\dot{V}(\mathbf{x})$ 为负定

因此，定常情况下状态调节器平衡状态 $\mathbf{x}_e = 0$ 是渐近稳定的。

即使开环系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 是不稳定的，也不管 $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{R}$ 阵如何选取，只要 $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{R}$ 阵为正定的，则状态调节器总是渐近稳定的。

6.6 线性伺服机问题

要求系统输出跟踪某个指定的输入函数问题，称为伺服机问题。

6.6.1 有限时间伺服机问题

线性时变系统方程 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}$ (121)

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} \quad (122)$$

$$\mathbf{x}(t) \Big|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0) \quad (123)$$

要求系统的输出跟踪指定的输入函数 $\boldsymbol{\eta}(t)$ 。 $\boldsymbol{\eta}(t)$ 与输出向量 $\mathbf{y}$ 有相同维数。寻求最优控制 $\mathbf{u}^*(t)$ ，使以下性能指标取极小值。

$$J = \frac{1}{2} [\mathbf{y}(t_f) - \boldsymbol{\eta}(t_f)]^T \cdot \mathbf{F} \cdot [\mathbf{y}(t_f) - \boldsymbol{\eta}(t_f)] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ [\mathbf{y}(t_f) - \boldsymbol{\eta}(t_f)]^T \mathbf{Q}(t) [\mathbf{y}(t_f) - \boldsymbol{\eta}(t_f)] + \mathbf{u}^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u} \right\} dt \quad (124)$$

性能指标 J 中的加权阵 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{Q}(t)$ 为半正定， $\mathbf{R}(t)$ 为正定。

哈密顿函数为

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) = \frac{1}{2} \left\{ [\mathbf{C}(t)\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}(t)]^T \mathbf{Q}(t) [\mathbf{C}(t)\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}(t)] + \mathbf{u}^T \mathbf{R}(t)\mathbf{u} \right\} + \boldsymbol{\lambda}^T [\mathbf{A}(t)\mathbf{x} - \mathbf{B}(t)\mathbf{u}] \quad (125)$$

由控制方程

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{R}(t)\mathbf{u} + \mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\lambda} = 0$$

得到

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\lambda} \quad (126)$$

由伴随方程

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t)[\mathbf{C}(t)\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}(t)] - \mathbf{A}^T(t)\boldsymbol{\lambda} \quad (127)$$

边界条件为

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{C}^T(t_f)\mathbf{F}[\mathbf{C}(t_f)\mathbf{x}(t_f) - \boldsymbol{\eta}(t_f)] \quad (128)$$

将 (126) 式代入 (121) 式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t) \quad (129)$$

可见，伺服机问题变成两点边界值问题。

另外一种方法：这时不能像线性调节器那样，仅认为 $\lambda(t)$ 和 $x(t)$ 有关系。为此，设

$$\lambda(t) = P(t)x - \xi(t) \quad (130)$$

(130) 式对时间求导，得

$$\dot{\lambda}(t) = \dot{P}(t)x + P(t)\dot{x} - \dot{\xi}(t)$$

将 (129) 和 (130) 式，有

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) = & [\dot{P}(t) + P(t)A(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)]x + \\ & P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\xi(t) - \dot{\xi}(t) \end{aligned} \quad (131)$$

而将 (130) 式代入 (127) 式，得

$$\dot{\lambda}(t) = -[C^T(t)Q(t)C(t) + A^T(t)P(t)]x + A^T(t)\xi(t) + C^T(t)Q(t)\eta(t) \quad (132)$$

比较 (131) 和 (132) 两式, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) + P(t)A(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + \\ + C^T(t)Q(t)C(t) + A^T(t)P(t) = 0 \end{aligned} \quad (133)$$

$$P(t_f) = C^T(t_f)FC(t_f) \quad (134)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\xi(t) \\ + A^T(t)\xi(t) + C^T(t)Q(t)\eta(t) = 0 \end{aligned} \quad (135)$$

$$\xi(t_f) = C^T(t_f)F\eta(t_f) \quad (136)$$

解出 $P(t)$ 和 $\xi(t)$ 后, 代入 (130) 和 (126) 式, 就求得最优控制

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x + R^{-1}(t)B^T(t)\xi(t) \quad (137)$$

可见, u^* 包括两项: 一项是状态 x 反馈; 另一项代表跟踪 $\eta(t)$ 所必须的控制信号。

6.6.2 无限时间伺服机问题

线性时变系统方程 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}(t) \Big|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \left\{ [\mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\eta}(t)]^T \mathbf{Q}(t) [\mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\eta}(t)] + \mathbf{u}^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u} \right\} dt \quad (138)$$

系统能控的条件下，无限时间伺服机问题的最优控制解存在，并且可以通过有限时间伺服机问题的解取 $t_f \rightarrow \infty$ 的极限求得。于是

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) + \\ + \mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{C}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) = 0 \end{aligned} \quad (139)$$

$$\mathbf{P}(t_f) = 0 \quad (140)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{A}^T(t)\boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t)\boldsymbol{\eta}(t) = 0 \quad (141)$$

$$\boldsymbol{\xi}(t_f) = 0 \quad (142)$$

最优控制为

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\overline{\mathbf{P}}(t)\mathbf{x} + \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\overline{\boldsymbol{\xi}}(t) \tag{143}$$

其中, $\overline{\mathbf{P}}(t)$ 和 $\overline{\boldsymbol{\xi}}(t)$ 是 (139) 至 (142) 式的解。当 $t_f \rightarrow \infty$ 的极限, 即

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} \mathbf{P}(t_f) = \overline{\mathbf{P}}(t) \qquad \lim_{t_f \rightarrow \infty} \boldsymbol{\xi}(t_f) = \overline{\boldsymbol{\xi}}(t)$$

例6-9 线性定常系统方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

指定的输入函数为 $\eta(t)$ 。求 u^* ，使系统输出 $y(t)$ 跟踪 $\eta(t)$ 并使性能指标取极小值。

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [(x_1 - \eta)^2 + u^2] dt$$

解 可以判定系统能控, 且 $Q=1$, $R=1$

设
$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}(t) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

由 (139) 和 (140) 式, 可得
$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

由 (141) 和 (142) 式, 可得

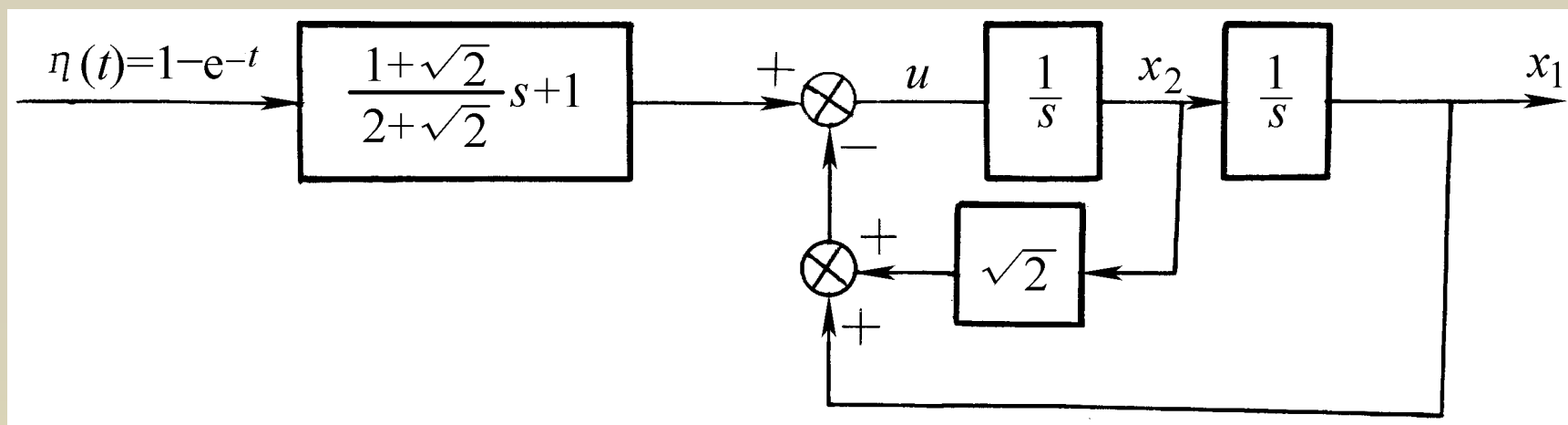
$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 - \eta(t) & \xi_1(t_f) &= 0 \\ \dot{\xi}_2 &= -\xi_1 + \sqrt{2}\xi_2 & \xi_2(t_f) &= 0 \end{aligned}$$

设 $\eta(t) = 1 - e^{-t}$, 解出 $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, 并且取 $t_f \rightarrow \infty$ 的极限, 得

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_1 &= \sqrt{2} - \frac{1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} e^{-t} \\ \bar{\xi}_2 &= 1 - \frac{1}{2 + \sqrt{2}} e^{-t} = \eta(t) + \frac{1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \dot{\eta}(t) \end{aligned}$$

最优控制为
$$u^* = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\xi}_2 \end{bmatrix}$$

$$= -x_1 - \sqrt{2}x_2 + \eta + \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\dot{\eta}$$



第6章 结束

