

第5章 线性定常系统的综合

本章内容为:

1. 引言
2. 状态反馈和输出反馈
3. 状态反馈系统的能控性和能观测性
4. 极点配置
5. 镇定问题
6. 状态重构和状态观测器
7. 降阶观测器
8. 带状态观测器的状态反馈系统
9. 渐近跟踪和干扰抑制问题
10. 解耦问题
11. **MATLAB**的应用

5.1 引言

线性定常系统综合：给定被控对象，通过设计控制器的结构和参数，使系统满足性能指标要求。

5.2 状态反馈和输出反馈

5.2.1 状态反馈

线性定常系统方程为：

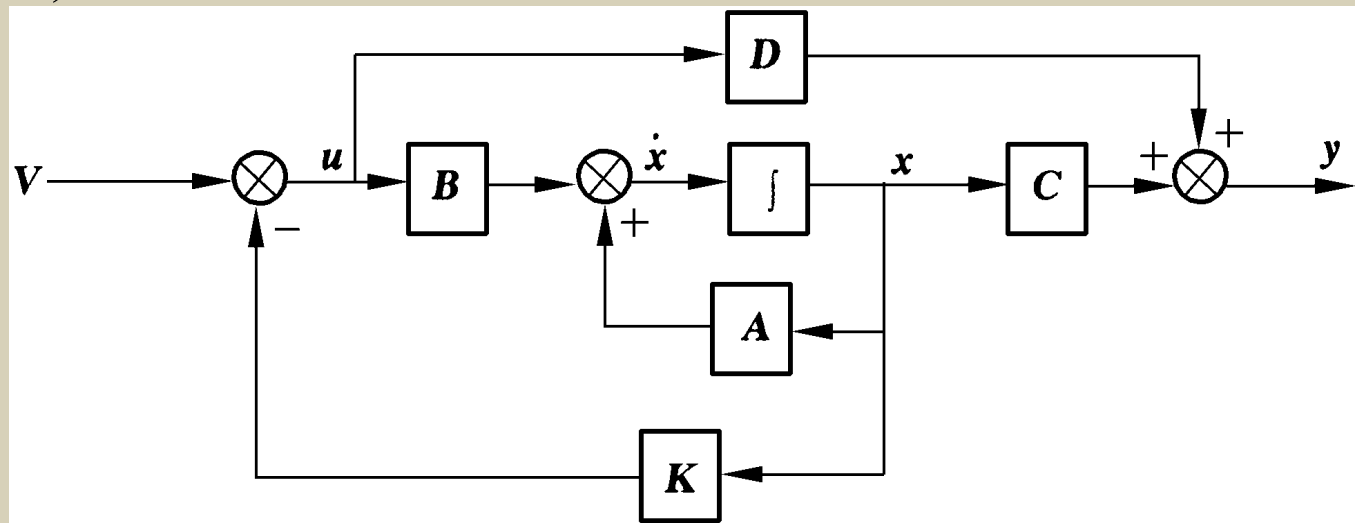
$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

假定有 n 个传感器，使全部状态变量均可以用于反馈。

$$\mathbf{u} = \mathbf{V} - \mathbf{K}\mathbf{x} \quad (2)$$

其中， $\mathbf{K}$ 为 $r \times n$ 反馈增益矩阵； $\mathbf{V}$ 为 r 维输入向量。

则有
$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(V - Kx) = (A - BK)x + BV \\ y &= (C - DK)x + DV \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

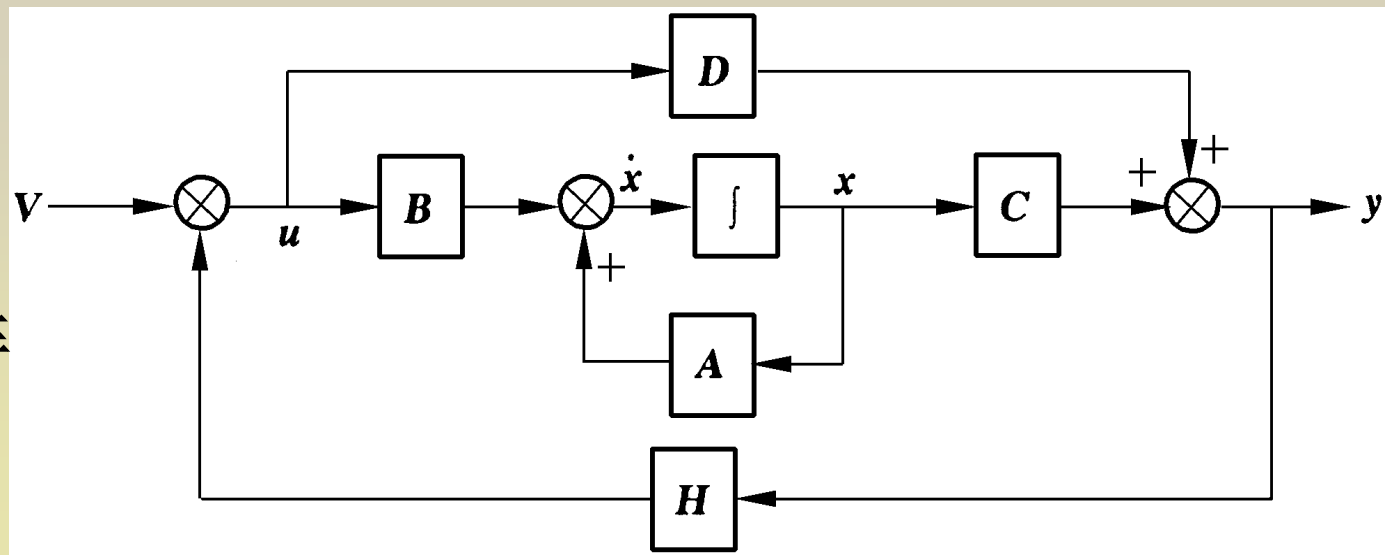


5.2.2 输出反馈

采用

$$u = V - Hy \quad (4)$$

H 为 $r \times m$ 常数矩阵



$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{V} - \mathbf{H}\mathbf{y}) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{H}(\mathbf{I} + \mathbf{D}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{C}]\mathbf{x} + [\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{H}(\mathbf{I} + \mathbf{D}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{D}]\mathbf{V} \\ \mathbf{y} &= (\mathbf{I} + \mathbf{D}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{x} + (\mathbf{I} + \mathbf{D}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{V}\end{aligned}\quad (5)$$

两者比较：状态反馈效果较好；

输出反馈实现较方便。

5.3 状态反馈的能控性和能观测性

线性定常系统方程为

$$\left. \begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

引入状态反馈

$$\mathbf{u} = \mathbf{V} - \mathbf{K}\mathbf{x} \quad (7)$$

则有

$$\left. \begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{V} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

定理5-1 线性定常系统 (6) 引入状态反馈后, 成为系统 (8), 不改变系统的能控性。

证明 对任意的 K 矩阵, 均有

$$\begin{aligned} & [\lambda I - (A - BK) \quad \vdots \quad B] = [\lambda I - A \quad \vdots \quad B] \begin{bmatrix} I & 0 \\ K & I \end{bmatrix} \\ \text{因为} & \begin{bmatrix} I & 0 \\ K & I \end{bmatrix} \text{ 满秩, 所以对任意常值矩阵 } K \text{ 和 } \lambda, \text{ 均有} \\ & \text{rank}[\lambda I - (A - BK) \quad \vdots \quad B] = \text{rank}[\lambda I - A \quad \vdots \quad B] \quad (9) \end{aligned}$$

(9) 式说明, 引入状态反馈不改变系统的能控性。但是, 状态反馈可以改变系统的能观测性, 见例5-1。

5.4 极点配置

定理 线性定常系统可以通过状态反馈进行极点配置的充分必要条件是：系统状态完全能控。

线性定常系统

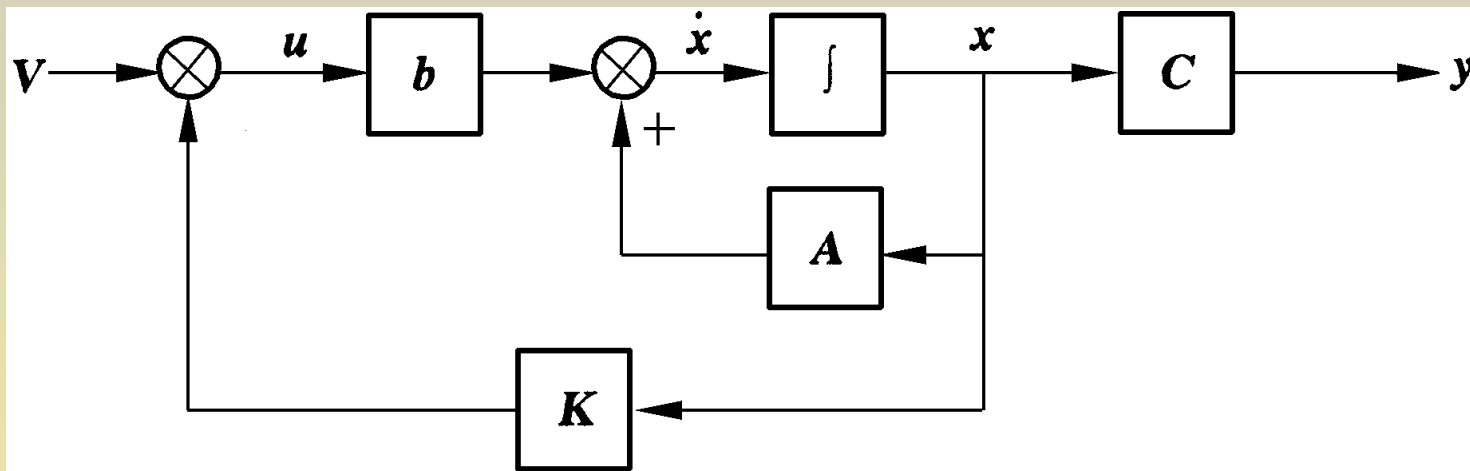
$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

状态反馈

$$u = V - \mathbf{K}\mathbf{x} \quad (11)$$

状态反馈系统方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{b}V \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$



因为 A 和 b 一定，确定 K 的就可以配置系统的极点。

经过线性变换 $x = P^{-1}\bar{x}$ ，可以使系统具有能控标准形。

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}] \bar{x} \end{aligned} \tag{13}$$

系统传递函数：

$$\begin{aligned} g(s) &= C[sI - A]^{-1}b = \bar{C}[sI - \bar{A}]^{-1}\bar{b} = \\ &= \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} \end{aligned} \tag{14}$$

引入状态反馈

$$u = V - \mathbf{K}\mathbf{x} = V - \mathbf{K}\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{x}} = V - \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{x}} \tag{15}$$

令

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{k}_0 & \bar{k}_1 & \cdots & \bar{k}_{n-1} \end{bmatrix} \tag{16}$$

其中 $\bar{k}_0, \bar{k}_1, \cdots, \bar{k}_{n-1}$ 为待定常数

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{K}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{k}_0 & \bar{k}_1 & \cdots & \bar{k}_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -(a_0 + \bar{k}_0) & -(a_1 + \bar{k}_1) & \cdots & -(a_{n-1} + \bar{k}_{n-1}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

状态反馈系统特征多项式为

$$\begin{aligned}\Delta_K(s) &= \det[sI - (\bar{A} - \bar{b}\bar{K})] = \\ &= s^n + (a_{n-1} + \bar{k}_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_1 + \bar{k}_1)s + (a_0 + \bar{k}_0)\end{aligned}\quad (17)$$

设状态反馈系统希望的极点为 $s_1, s_2, \cdots, s_n$

其特征多项式为

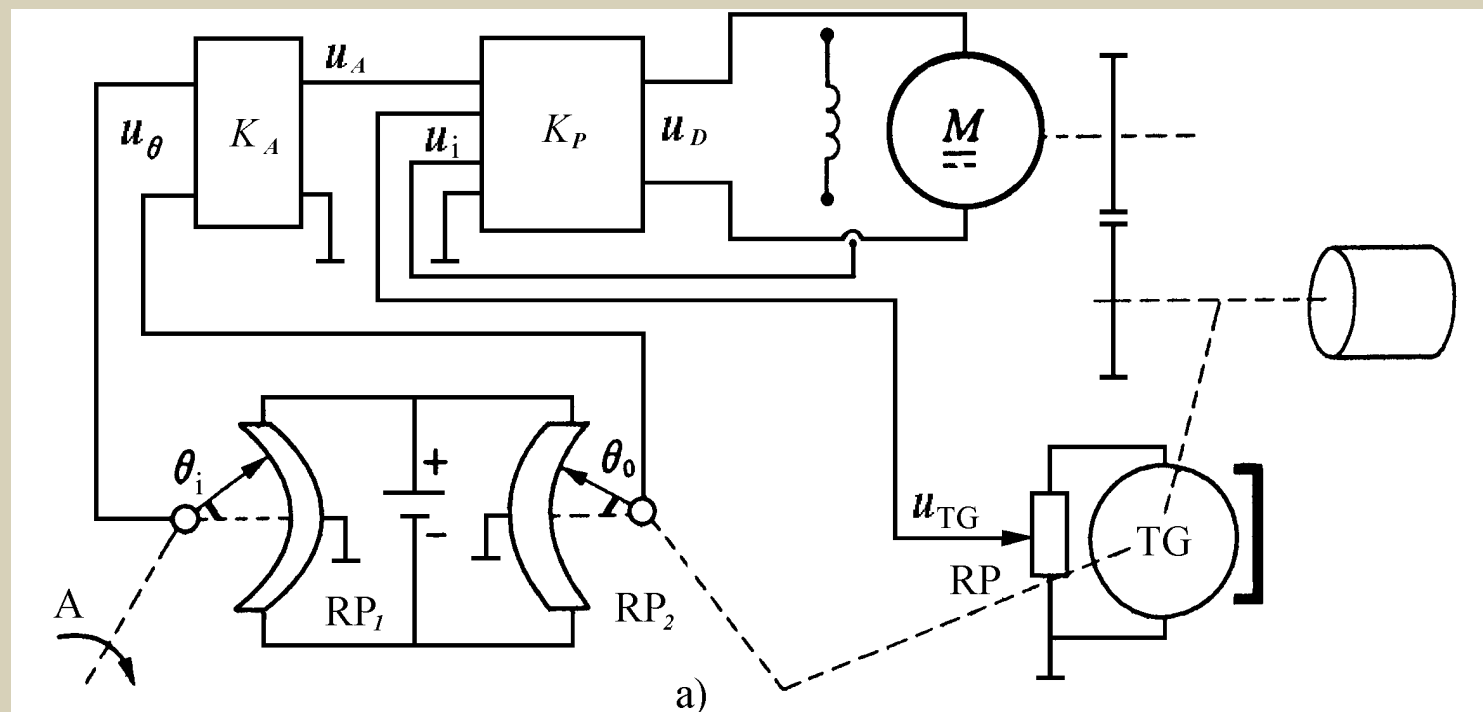
$$\Delta_K^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i) = s^n + a_{n-1}^* s^{n-1} + \cdots + a_1^* s + a_0^* \quad (18)$$

比较 (17) 式和 (18) 式, 选择 $\bar{k}_i$ 使同次幂系数相同。有

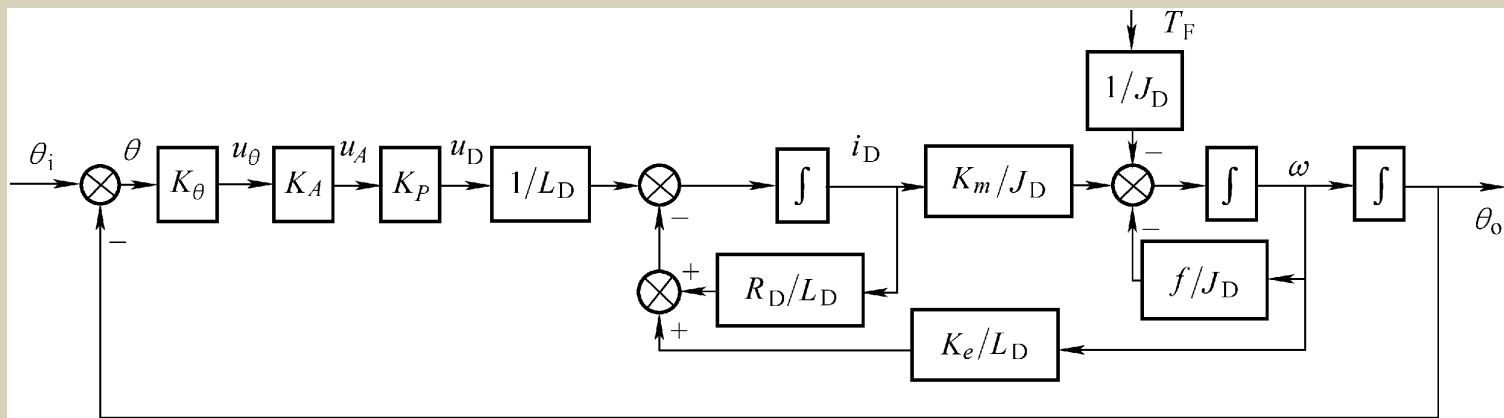
$$\bar{K} = \begin{bmatrix} a_0^* - a_0 & a_1^* - a_1 & \cdots & a_{n-1}^* - a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

而状态反馈矩阵 $K = \bar{K}P = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 & \cdots & k_{n-1} \end{bmatrix}$

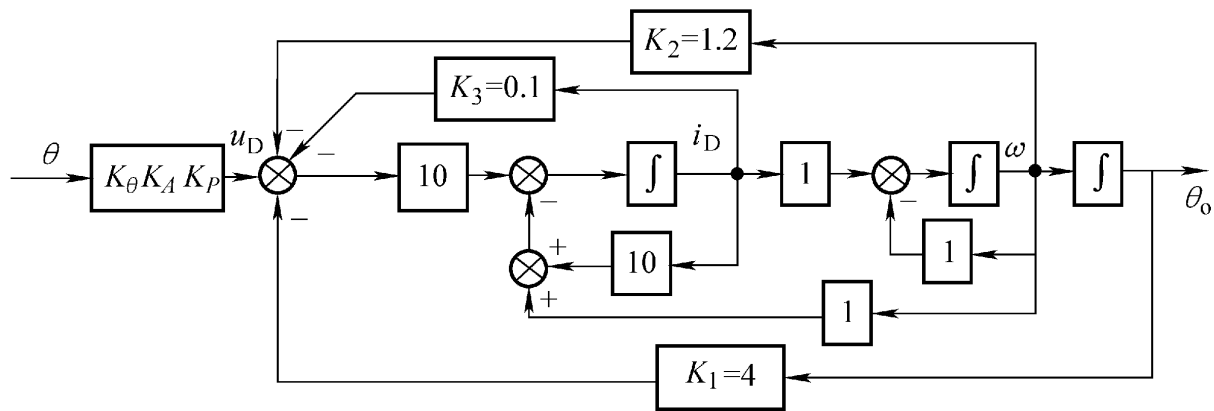
例5-3 某位置控制系统（伺服系统）简化线路如下



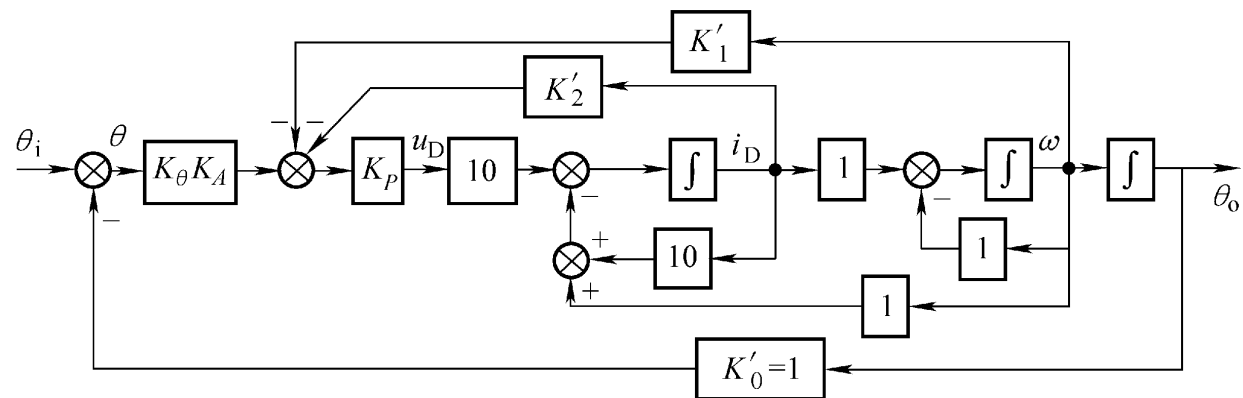
为了实现全状态反馈，电动机轴上安装了测速发电机TG， $u_{TG} = K_{TG}\omega$ 通过霍尔电流传感器测得电枢电流 i_D ，即 $u_i = K_i i_D$ 。已知折算到电动机轴上的粘性摩擦系数 $f = 1 \text{ N}\cdot\text{m}/(\text{rad}/\text{s})$ 、转动惯量 $J_D = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ；电动机电枢回路电阻 $R_D = 1 \Omega$ ；电枢回路电感 $L_D = 0.1 \text{ H}$ ；电动势系数为 $K_e = 0.1 \text{ V}/(\text{rad}/\text{s})$ 、电动机转矩系数为 $K_m = 1 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{A}$ 。选择 θ_o 、 ω 、 i_D 作为状态变量。将系统极点配置到 $-1 \pm j\sqrt{3}$ 和 -10 ，求 K 阵。



b)



(c)



d)

解 1. 建立系统状态空间模型

$$u_{\theta} = K_{\theta}(\theta_i - \theta_o)$$

$$u_A = K_A u_o$$

$$u_D = K_P u_A$$

$$u_D - K_e \omega = L_D \frac{di_D}{dt} + R_D i_D$$

$$J_D \frac{d\omega}{dt} + f\omega = K_m i_D - T_F$$

$$\theta_o = \int \omega dt$$

T_F 为恒定的负载转矩

$$\dot{x}_1 = \frac{d\theta_o}{dt} = \omega = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{f}{J_D} \omega + \frac{K_m}{J_D} i_D - \frac{T_F}{J_D}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{di_D}{dt} = -\frac{R_D}{L_D} i_D + \frac{1}{L_D} u_D - \frac{K_e}{L_D} \omega$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_o \\ \omega \\ i_D \end{bmatrix}$$

将主反馈断开，系统不可变部分，代入参数后，系统方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u_D + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} T_F \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

2. 计算状态反馈矩阵

$$\mathbf{Q}_C = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & -110 \\ 10 & -100 & 990 \end{bmatrix}$$

$\text{rank } \mathbf{Q}_C = 3$ 所以系统能控

计算出状态反馈矩阵 $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_0 \quad \mathbf{K}_1 \quad \mathbf{K}_2] = [4 \quad 1.2 \quad 0.1]$

状态反馈系统的状态图如图 (c) 所示 (没有画出 T_F)。

经过结构变换成 (d) 图所示的状态图

因为位置主反馈 $K'_0 = 1$ ，其他参数的选择应该满足：

$$K_\theta K_A K_P = \frac{4}{K'_0} = 4 \qquad K'_1 = \frac{1.2}{K_P} \qquad K'_2 = \frac{0.1}{K_P}$$

验证：求图 (d) 系统的传递函数，其极点确实为希望配置的极点位置。

5.5 镇定问题

镇定问题——非渐近稳定系统通过引入状态反馈，实现渐近稳定
显然，能控系统可以通过状态反馈实现镇定。

那么，如果系统不能控，还能不能镇定呢？请见定理**5-2**。

定理5-2 **SISO**线性定常系统方程为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\tag{23}$$

如果系统不能控，引入状态反馈能镇定的充要条件为：不能控的状态分量是渐近稳定的。

（证明请参见教材**163**页）

当系统满足可镇定的条件时，状态反馈阵的计算步骤为

- 1) 将系统按能控性进行结构分解，确定变换矩阵 P_1
- 2) 确定 P_2 ，化 $\bar{A}_C$ 为约当形式 $\tilde{A}_C$
- 3) 利用状态反馈配置 $\tilde{A}_1$ 的特征值，计算 $\tilde{K}_1$
- 4) 所求镇定系统的反馈阵 $K = [\tilde{K}_1 \quad 0]P_2P_1$

例5-5 系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

试用状态反馈来镇定系统。

解 矩阵 $\mathbf{A}$ 为对角阵，显然系统不能控。不能控的子系统特征值为-5，因此，系统可以镇定。

能控子系统方程为

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_C = \bar{\mathbf{A}}_C \bar{\mathbf{x}}_C + \bar{\mathbf{b}}_C u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_C + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

引入状态反馈 $u = V - \tilde{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{x}}_C$ 其中 $\tilde{\mathbf{K}} = [\tilde{k}_1 \quad \tilde{k}_2]$

为了保证系统是渐近稳定的, 设希望极点为 $s_{1, 2} = -2 \pm j2$

$$\Delta_K^*(s) = s^2 + 4s + 8$$

$$\begin{aligned} \Delta_K(s) &= \det[s\mathbf{I} - (\tilde{\mathbf{A}}_1 - \tilde{\mathbf{b}}_C \tilde{\mathbf{K}})] = \\ &= \det \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [\tilde{k}_1 \quad \tilde{k}_2] \right) \right\} = \\ &= s^2 + (\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 - 3)s + 2 - 2\tilde{k}_1 - \tilde{k}_2 \end{aligned}$$

同次幂系数相等, 得 $\tilde{k}_1 = -13$ $\tilde{k}_2 = 20$

5.6 状态重构和状态观测器

问题的提出：状态反馈可以改善系统性能，但有时不便于检测。
如何解决这个问题？

答案是：重构一个系统，用这个系统的状态来实现状态反馈。

系统方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ x(t_0) &= x(0) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

重构一个系统，该系统的各参数与原系统相同

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

(24) 式减去 (25) 式

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= A(x - \hat{x}) \\ y - \hat{y} &= C(x - \hat{x}) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

当两个系统的初始状态完全一致，参数也完全一致，则 $x = \hat{x}$ 。但是实际系统总会有一些差别，因此实际上 $x \neq \hat{x}$ 。

当 $x \neq \hat{x}$ 时， $y - \hat{y}$ 也不为零，可以引入信号 $(y - \hat{y})$ 来校正系统 (25)，它就成为了状态观测器。

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + G(y - \hat{y}) = A\hat{x} + Bu + GC(x - \hat{x}) \\ &= (A - GC)\hat{x} + Bu + Gy\end{aligned}\quad (27)$$

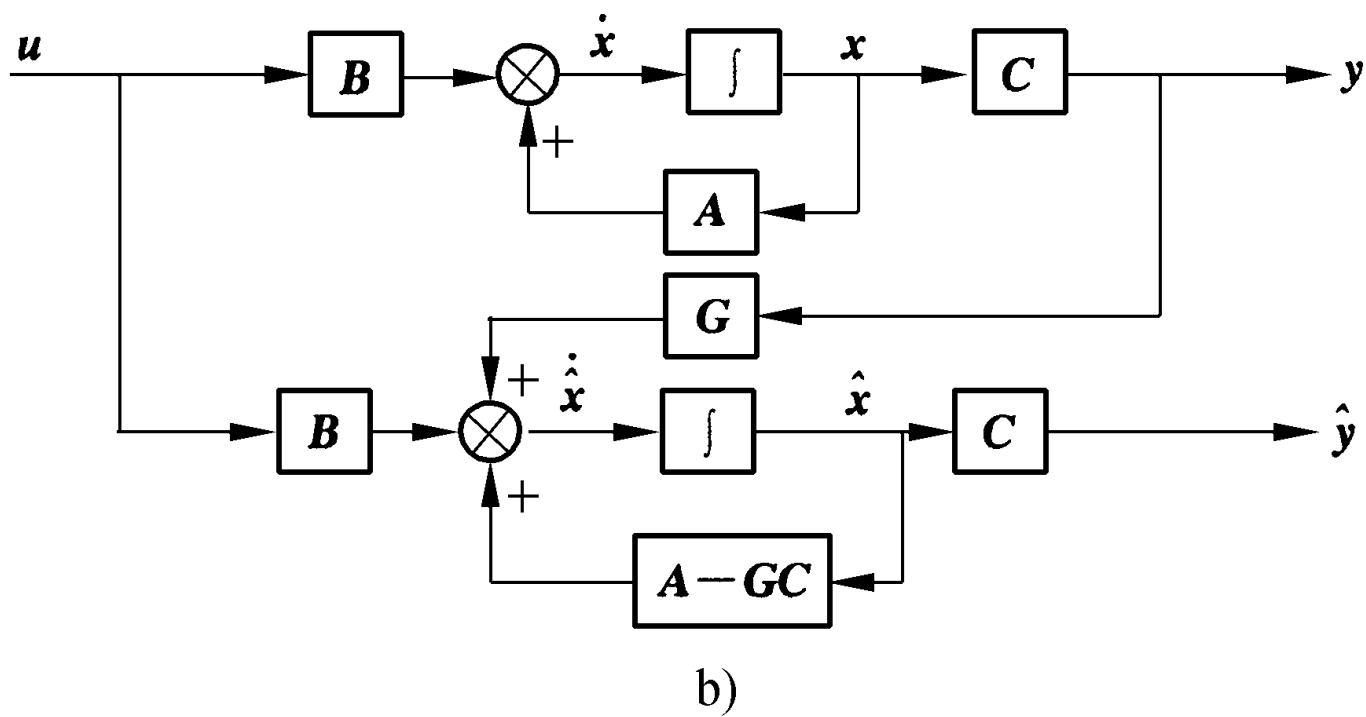
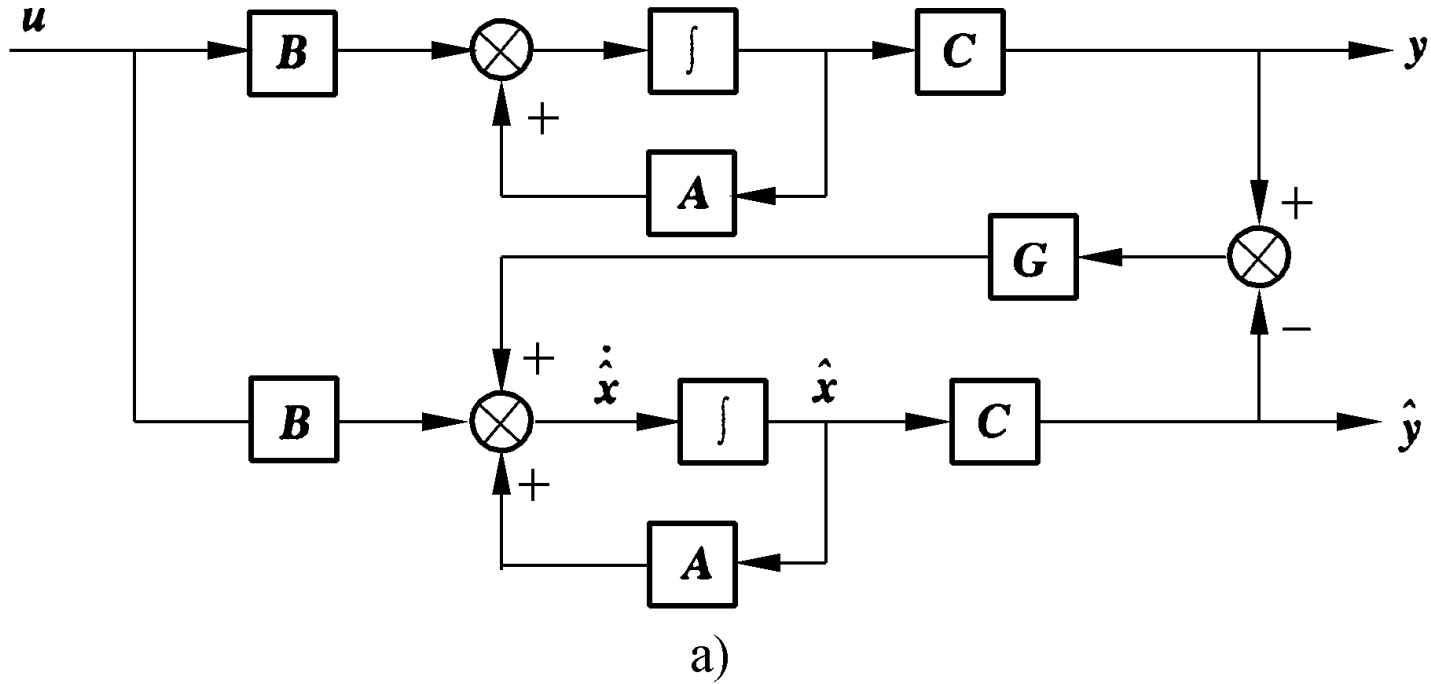
其中， G 为 $n \times n$ 矩阵

(24) 式减去 (27) 式

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - [(A - GC)\hat{x} + Bu + Gy] = (A - GC)(x - \hat{x}) \quad (28)$$

由 (28) 式可知，如果适当选择 G 矩阵，使 $(A - GC)$ 的所有特征值具有负实部，则 $\lim_{t \rightarrow \infty} (x - \hat{x}) = 0$

式 (27) 系统就是式 (24) 系统的状态观测器， $\hat{x}$ 就是重构的状态。



定理5-3 系统的状态观测器存在的充分必要条件是：系统能观测，或者系统虽然不能观测，但是其不能观测的子系统的特征值具有负实部。

（证明请参见教材167页）

定理5-4 线性定常系统
$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \right\}$$
 的观测器

$$\dot{\hat{x}} = (A - GC)\hat{x} + Bu + Gy \quad (30)$$

可任意配置极点的充分必要条件是系统能观测并且能控。

例5-6 系统方程为
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x}$$

要求设计系统的状态观测器，其特征值为**-3**、**-4**、**-5**。

解 首先判断系统的能观测性

$$\mathbf{Q}_C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{rank } \mathbf{Q}_C = 3 \quad \text{系统能观测，可设计观测器。}$$

设： $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$ 其中 $g_i, (i = 0, 1, 2)$ 待定

希望特征值对应的特征多项式

$$\Delta_G^*(s) = (s+3)(s+4)(s+5) = s^3 + 12s^2 + 47s + 60$$

而状态观测器的特征多项式

$$\begin{aligned} \Delta_G &= \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{GC})] \\ &= s^3 + (g_0 + g_1 - 5)s^2 + (-4g_0 - 3g_1 + g_2 + 8)s + (4g_0 + 2g_1 - g_2 - 4) \end{aligned}$$

同次幂系数分别相等，可以得出

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ -103 \\ 210 \end{bmatrix}$$

几点说明：

- 1) 希望的特征值一定要具有负实部，且要比原系统的特征值更负。这样重构的状态才可以尽快地趋近原系统状态。
- 2) 状态观测器的特征值与原系统的特征值相比，又不能太负，否则，抗干扰能力降低。
- 3) 选择观测器特征值时，应该考虑到不至于因为参数变化而会有较大的变化，从而可能使系统不稳定。

5.7 降阶观测器

1. 降阶观测器的维数

定理 5-5 若系统能观测，且 $\text{rank } C = m$ ，则系统的状态观测器的最小维数是 $(n-m)$ 。

(证明略)

$$C = [C_1 \quad \vdots \quad C_2] \quad \text{rank } C = m$$

因为有 m 维可以通过观测 y 得到，因此有 $(n-m)$ 维需要观测。

$$\left. \begin{array}{l} \text{对系统方程} \quad \dot{x} = Ax + Bu \\ \quad \quad \quad y = Cx \end{array} \right\} \text{采用变换矩阵 } P = \begin{bmatrix} 0 & I \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{进行线性变换,} \quad \bar{x} = Px \quad \bar{A} = PAP^{-1} \quad \bar{B} = PB \quad \bar{C} = CP^{-1}$$

得到如下形式的系统方程

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} u \quad (31)$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{x}}_2$$

可见 $\bar{\mathbf{x}}_2$ 可以通过 $\mathbf{y}$ 观测到，需要对 $(n-m)$ 维的 $\bar{\mathbf{x}}_1$ 进行估计。

因此，降阶观测器的维数为 $(n-m)$

2. 降阶观测器存在的条件及其构成

将 (31) 式改写成

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 = \bar{\mathbf{A}}_{11}\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_{12}\bar{\mathbf{x}}_2 + \bar{\mathbf{B}}_1 u = \bar{\mathbf{A}}_{11}\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_{12}\mathbf{y} + \bar{\mathbf{B}}_1 u \quad (32)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 = \mathbf{y} = \bar{\mathbf{A}}_{21}\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_{22}\mathbf{y} + \bar{\mathbf{B}}_2 u \quad (33)$$

$$\text{令 } \bar{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{A}}_{22}\mathbf{y} - \bar{\mathbf{B}}_2 u = \bar{\mathbf{A}}_{21}\bar{\mathbf{x}}_1 \quad (34)$$

于是有(n-m) 阶的子系统:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 &= \bar{\mathbf{A}}_{11}\bar{\mathbf{x}}_1 + (\bar{\mathbf{A}}_{12}\mathbf{y} + \bar{\mathbf{B}}_1\mathbf{u}) \\ \bar{\mathbf{y}} &= \bar{\mathbf{A}}_{21}\bar{\mathbf{x}}_1 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

以下构造这个子系统的状态观测器

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 &= (\bar{\mathbf{A}}_{11} - \mathbf{G}_1\bar{\mathbf{A}}_{21})\hat{\mathbf{x}}_1 + (\bar{\mathbf{A}}_{12}\mathbf{y} + \bar{\mathbf{B}}_1\mathbf{u}) + \mathbf{G}_1\bar{\mathbf{y}} \\ &= (\bar{\mathbf{A}}_{11} - \mathbf{G}_1\bar{\mathbf{A}}_{21})\hat{\mathbf{x}}_1 + (\bar{\mathbf{B}}_1 - \mathbf{G}_1\bar{\mathbf{B}}_2)\mathbf{u} + (\bar{\mathbf{A}}_{12} - \mathbf{G}_1\bar{\mathbf{A}}_{22})\mathbf{y} + \mathbf{G}_1\dot{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (36)$$

因为子系统能观测，所以，通过选择 $\mathbf{G}_1$ 的参数，可以配置 $(\bar{\mathbf{A}}_{11} - \mathbf{G}_1\bar{\mathbf{A}}_{21})$ 的特征值。

为了在观测器中不出现微分项，引入以下变换，

$$\left. \begin{aligned} z &= \hat{\bar{x}}_1 - G_1 y \\ \dot{z} &= \dot{\hat{\bar{x}}}_1 - G_1 \dot{y} \end{aligned} \right\} \quad \text{即} \quad \left. \begin{aligned} \hat{\bar{x}}_1 &= z + G_1 y \\ \dot{\hat{\bar{x}}}_1 &= \dot{z} + G_1 \dot{y} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

(37) 式代入 (36)，得

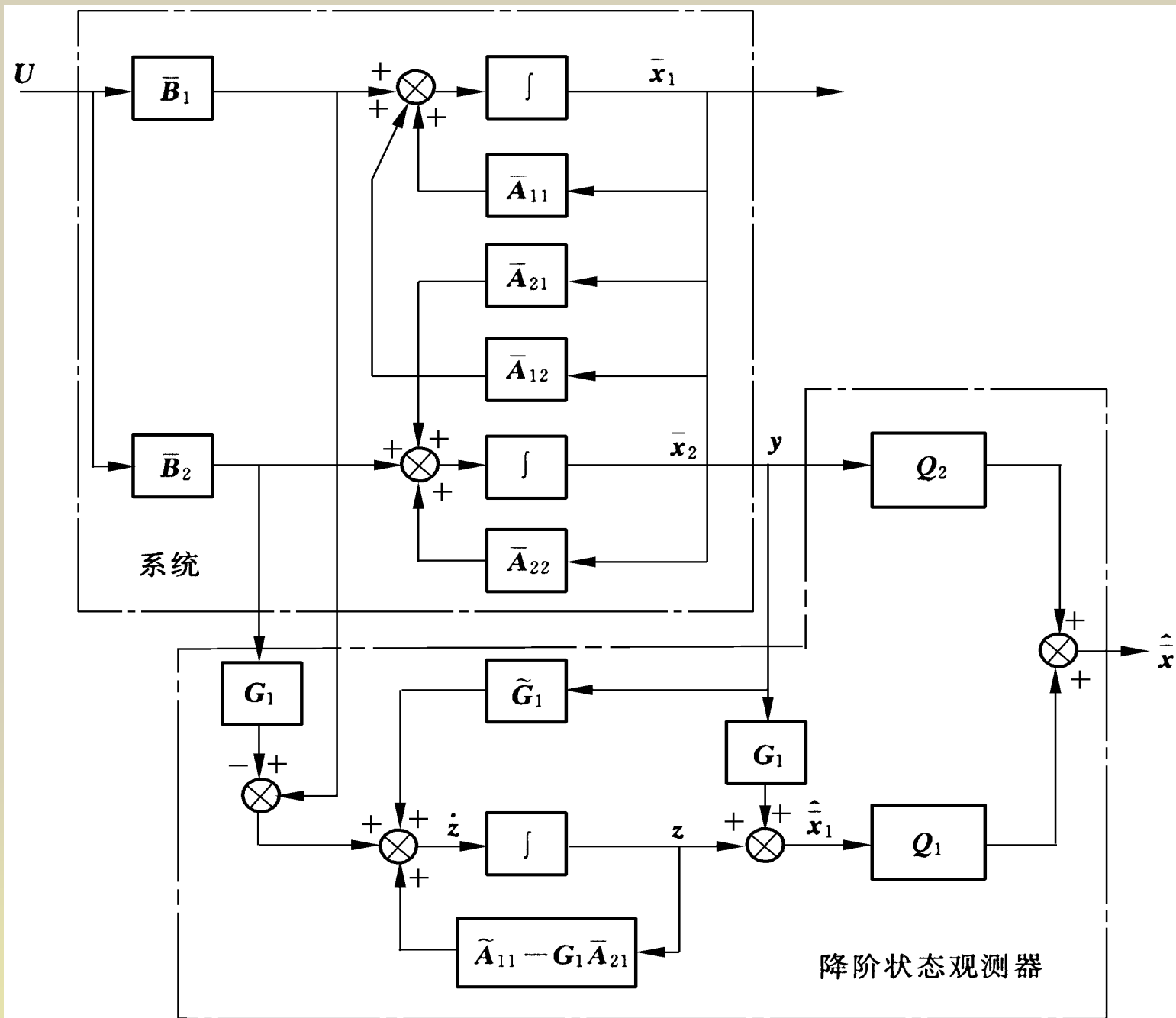
$$\dot{z} = (\bar{A}_{11} - G_1 \bar{A}_{21})z + (\bar{B}_1 - G_1 \bar{B}_2)u + [(\bar{A}_{11} - G_1 \bar{A}_{21})G_1 + \bar{A}_{12} - G_1 \bar{A}_{22}]y$$

由于 $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$ 故 $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\bar{x} - \begin{bmatrix} z + G_1 y \\ y \end{bmatrix} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 - \hat{\bar{x}}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (38)$

因此， $\begin{bmatrix} z + G_1 y \\ y \end{bmatrix}$ 是 $\bar{x}$ 的估计。

$$x = P^{-1} \bar{x} = Q \bar{x} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 y + z \\ y \end{bmatrix} \quad (39)$$

状态图中 $\tilde{G}_1 = [(\bar{A}_{11} - G_1 \bar{A}_{21})G_1 + \bar{A}_{12} - G_1 \bar{A}_{22}]$

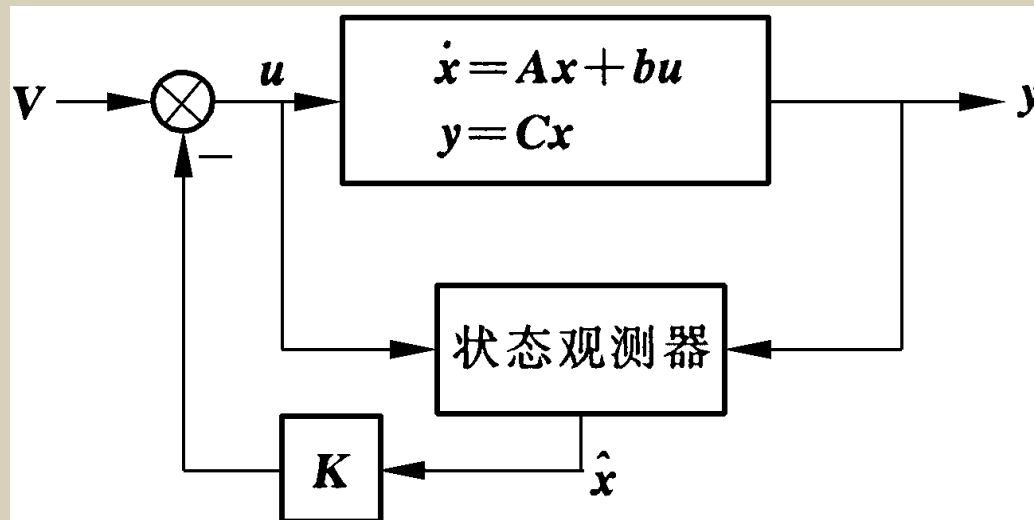


5.8 带有状态观测器的状态反馈系统

SISO线性定常系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

全阶状态观测器



$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{G}y \quad (41)$$

状态反馈

$$u = V - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} \quad (42)$$

还有

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}V \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{x} + (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C} - \mathbf{b}\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}V \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned}$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{bK} \\ \mathbf{GC} & \mathbf{A} - \mathbf{GC} - \mathbf{bK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} V$$
$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (43)$$

作线性变换

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (44)$$

其中 $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ 为误差估计

对 (43) 式进行线性变换, 得到如下方程

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{bK} \\ \mathbf{GC} & \mathbf{A} - \mathbf{GC} - \mathbf{bK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} V \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{bK} & \mathbf{bK} \\ 0 & \mathbf{A} - \mathbf{GC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} V \\ y &= [\mathbf{C} \quad 0] \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = [\mathbf{C} \quad 0] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (45)$$

$$\det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{bK} & -\mathbf{bK} \\ 0 & s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{GC} \end{bmatrix} = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{bK}) \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{GC}) \quad (46)$$

由上式可见, $\mathbf{A} - \mathbf{bK}$ 的特征值与 $\mathbf{A} - \mathbf{GC}$ 的特征值可以分别配置, 互不影响。这种 $-\mathbf{bK}$ 的特征值和 $-\mathbf{GC}$ 特征值可以分别配置, 互不影响的方法, 称为分离定理。需要注意: $\mathbf{A} - \mathbf{GC}$ 的特征值应该比 $\mathbf{A} - \mathbf{bK}$ 的特征值更负, 一般为四倍左右, 才能够保证 $\hat{\mathbf{x}}$ 尽快跟上 $\mathbf{x}$, 正常地实现状态反馈。

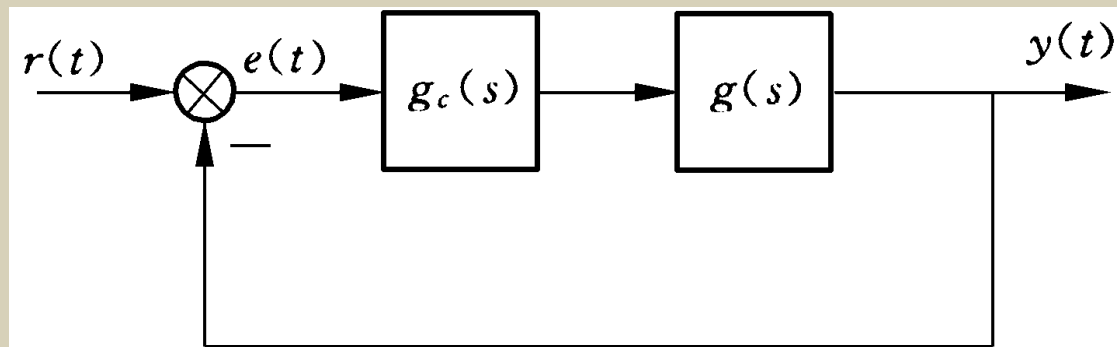
这时传递函数为

$$g_K(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{K} & -\mathbf{b}\mathbf{K} \\ 0 & s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{C} [s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{K}]^{-1} \mathbf{b}$$

5.9 渐近跟踪与干扰抑制问题

5.9.1 渐近跟踪问题

右图所示反馈控制系统



$$g(s) = \frac{n_g(s)}{d_g(s)} \quad g_c(s) = \frac{n_c(s)}{d_c(s)}$$

一般很难做到在所有时间上都有 $y(t) = r(t)$ ，但 $t \rightarrow \infty$ ， $y(t) \rightarrow r(t)$ 就有可能做到，即：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - y(t)] = 0$$

稳态时，实现了 $y(t)$ 跟踪 $r(t)$ ，称为渐近跟踪。

在经典控制理论中，已经讨论过典型输入信号时的情况。

但是，对于 $r(t)$ 不是典型输入信号，则 $y(t)$ 跟踪 $r(t)$ 的条件是什么？

输入和误差信号的拉氏变换式分别为

$$R(s) = \frac{n_r(s)}{d_r(s)} \qquad E(s) = \frac{d_g(s)d_c(s)}{d_g(s)d_c(s) + n_g(s)n_c(s)} \cdot \frac{n_r(s)}{d_r(s)}$$

显然，输入信号的分母 $d_r(s) = 0$ 中那些实部为负的根，当 $t \rightarrow \infty$ 时对稳态误差无影响；只有那些位于 右半闭平面（包括虚轴的右半平面）的根，对稳态误差有影响。

当 $sE(s)$ 的全部极点位于 s 左半开平面时，要使

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{d_g(s)d_c(s)}{d_g(s)d_c(s) + n_g(s)n_c(s)} \cdot \frac{n_r(s)}{d_r(s)} = 0$$

必须有

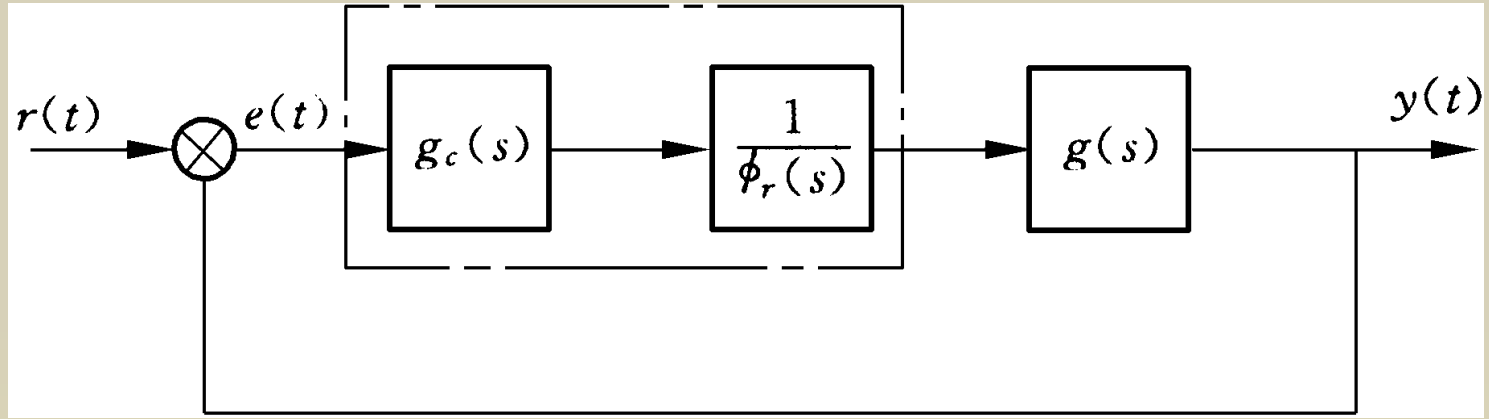
- 1) $d_g(s)d_c(s) + n_g(s)n_c(s) = 0$ 的所有根实部均为负。
- 2) $d_r(s)$ 在 s 右半闭平面的零点也是 $d_g(s)d_c(s)$ 的零点。

上面两个条件成立时，就实现了渐近跟踪，即 $t \rightarrow \infty$ 有 $y(t) \rightarrow r(t)$ 。
其中，第2个条件就是著名的内模原理。

5.9.2 内模原理

假定 $d_r(s)$ 的某些根具有零实部或正实部，令 $\phi_r(s)$ 是 $R(s)$ 中不稳定的极点构成的多项式。 $n_g(s)$ 和 $d_g(s)\phi_r(s)$ 互质。则

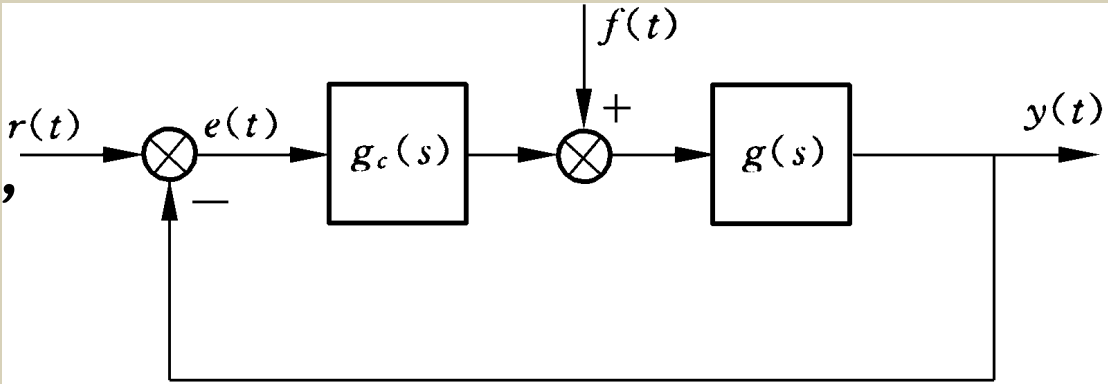
$$E(s) = R(s) - Y(s) = \frac{d_C(s)d_g(s)n_r(s)}{d_C(s)\phi_r(s)d_g(s) + n_C(s)n_g(s)} \cdot \frac{\phi_r(s)}{d_r(s)}$$



由于 $d_r(s)$ 中的不稳定的零点均被 $\phi_r(s)$ 精确地消去，所以，只要选择 $d_C(s)$ 、 $n_C(s)$ 使 $d_C(s)\phi_r(s)d_g(s) + n_C(s)n_g(s) = 0$ 的根具有负实部。即：用 $g_C(s)$ 镇定系统，则 $t \rightarrow \infty$ 时，有 $e(t) = r(t) - y(t) \rightarrow 0$ ，实现了渐近跟踪。这就是内模原理。

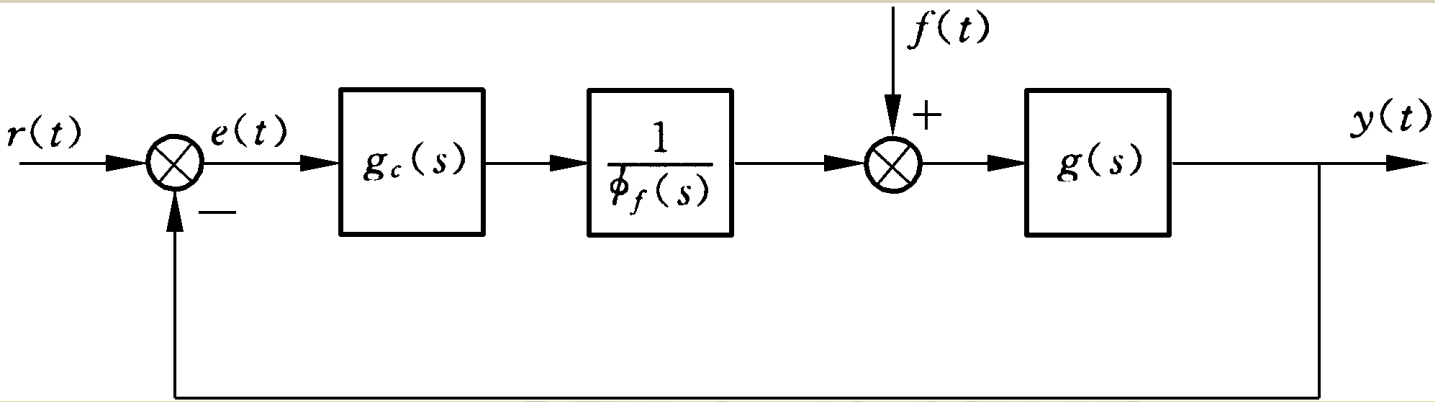
5.9.3 干扰抑制问题

如果系统存在确定性干扰，如右图所示。



当 $r(t)=0$ 时， $t \rightarrow \infty$ ，使 $y_f(t) \rightarrow 0$ ，称为干扰抑制问题。

如果 $f(s) = \frac{n_f(s)}{d_f(s)}$ 为正则有理函数，假定 $d_f(s)=0$ 的某些根具有零实部或负实部。令 $\phi_f(s)$ 是 $f(s)$ 的不稳定极点构成的 s 多项式。于是 $\phi_f(s)$ 的所有根均具有零实部或正实部。将内模 $1/\phi_f(s)$ 放入系统中，选择 $g_c(s)$ 使反馈系统成为渐近稳定的系统。

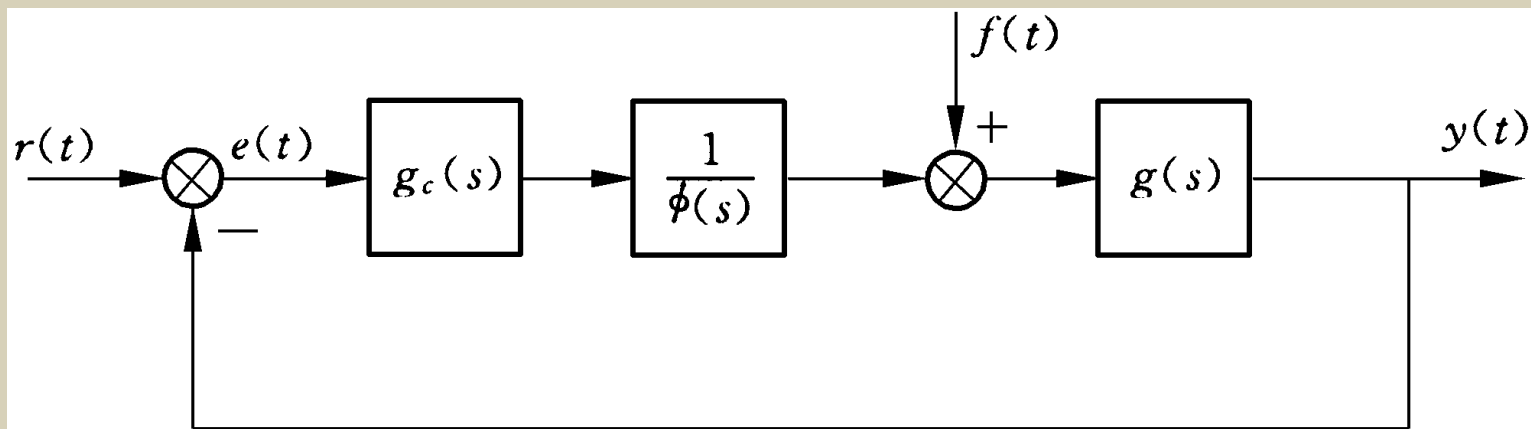


由 $f(t)$ 作用引起的系统输出

$$Y_f(s) = -E_f(s) = \frac{d_c(s)n_g(s)n_f(s)}{d_c(s)\phi_f(s)d_g(s) + n_c(s)n_g(s)} \cdot \frac{\phi_f(s)}{d_f(s)}$$

由于 $d_f(s)$ 中的不稳定的零点均被 $\phi_f(s)$ 精确地消去，故 $Y_f(s)$ 的所有极点都具有负实部。因此，当 $t \rightarrow \infty$ 时 $y_f(t) \rightarrow 0$ 。从而实现了干扰抑制。

5.9.4 渐近跟踪与干扰抑制



如果 $r(t) \neq 0$, $f(t) \neq 0$, 通过在系统中引入内模 $1/\phi(s)$, 若 $\phi(s)$ 是 $R(s)$ 和 $f(s)$ 的不稳定极点之最小公分母。设计补偿器 $g_c(s)$, 就可以实现渐近跟踪和干扰抑制。

两点说明:

1) 内模 $1/\phi(s)$ 的位置要求并不高, 只要不位于从 $R(s)$ 到 $E(s)$ 和从 $F(s)$ 到 $Y(s)$ 的前向通道中即可。

2) 内模 $1/\phi(s)$ 的系数不允许变化, 否则无法实现精确对消。虽然现实中, 很难极其精确地对消, 由于 $r(t)$ 和 $f(t)$ 大多数是有界的, 输出仍然可以跟踪输入, 只是有有限的稳态误差。

5.9.5 状态空间设计法

系统方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u + \mathbf{b}_f f(t) \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}u + \mathbf{d}_f f(t) \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

$\{\mathbf{A} \ \mathbf{b}\}$ 为能控, $\{\mathbf{A} \ \mathbf{C}\}$ 为能观测。

$f(t)$ 为干扰信号, 认为它是在未知初始条件下, 由以下系统产生。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_f &= \mathbf{A}_f \mathbf{x}_f \\ f(t) &= \mathbf{C}_f \mathbf{x}_f \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

$r(t)$ 认为是在未知初始条件下, 由以下系统产生。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_r &= \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r \\ r(t) &= \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

$\{\mathbf{A}_f \ \mathbf{C}_f\}$ 和 $\{\mathbf{A}_r \ \mathbf{C}_r\}$ 为能观测, 要求设计的系统实现渐近跟踪与干扰抑制。

设 $\phi_f(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_f)$ $\phi_r(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_r)$

$\phi_f(s)$ 和 $\phi_r(s)$ 在 s 右半闭平面零点的最小公倍式为 $\phi(s)$

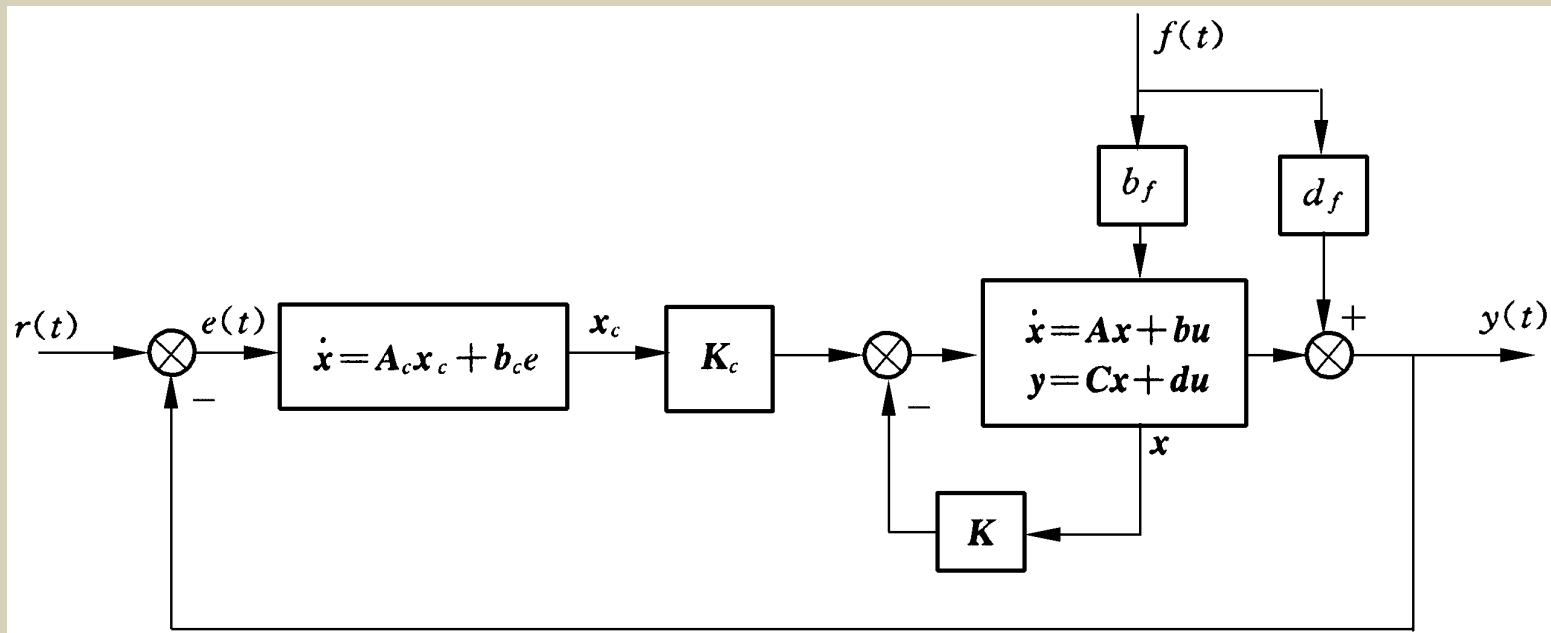
$$\phi(s) = s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

$\phi(s)$ 的所有零点都具有非负实部，内模 $\phi^{-1}(s)$ 可实现为

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}_C = \mathbf{A}_C \mathbf{x}_C + \mathbf{b}_C e \\ y_C = \mathbf{x}_C \end{array} \right\} \quad (50)$$

其中

$$\mathbf{A}_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{m-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$e = r - y = r - Cx - du$$

$$\dot{x}_c = A_c x_c + b_c (r - Cx - du) = A_c x_c - b_c Cx - b_c du + b_c r$$

组合系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -b_c C & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ -b_c d \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ b_c \end{bmatrix} r$$

当 $d = 0$ 时，状态反馈的组合系统特征多项式为

$$\Delta_{KK_C}(s) = \det \begin{bmatrix} sI - (A - bK) & -bK_C \\ b_C C & sI - A_C \end{bmatrix}$$

对状态反馈组合系统，如果给出 $(n+m)$ 个希望极点，求出 $\Delta_{KK_C}^*(s)$

比较 $\Delta_{KK_C}^*(s)$ 和 $\Delta_{KK_C}(s)$ ，即可以求得 K 和 K_C ，如此设计的系统，即可以实现渐近跟踪和干扰抑制。

5.10 解耦问题

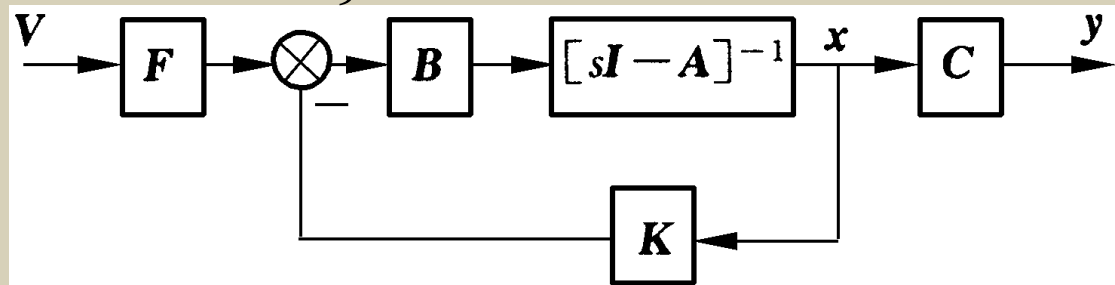
线性定常系统方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

引入状态反馈 $u = FV - Kx$

其中 K 为反馈阵,

F 为输入变换矩阵。



$$\dot{x} = Ax + B(FV - Kx) = (A - BK)x + BFV$$

$$y = Cx$$

(52)

状态反馈系统的传递函数矩阵为

$$G_{KF}(s) = C[sI - (A - BK)]^{-1} BF$$

所谓解耦问题, 就是寻求适当的 K 和 F 矩阵使得状态反馈传递函数矩阵 $G_{KF}(s)$ 为对角阵。

$$G_{KF}(s) = \text{diag}[g_{11}(s) \quad g_{22}(s) \quad \cdots \quad g_{mm}(s)]$$

5.10.1 关于 $G_{KF}(s)$ 的两个不变量

如果 $G_{KF}(s)$ 为严格正则有理传递函数矩阵，可以表示为如下形式

$$G_{KF}(s) = \begin{bmatrix} G_1^T(s, K, F) \\ G_2^T(s, K, F) \\ \vdots \\ G_m^T(s, K, F) \end{bmatrix} \quad (53)$$

其中， $G_i^T(s, K, F)$ 为 $G_{KF}(s)$ 的第 i 行向量。

$$\text{定义1} \quad d_i(K, F) = \min \left\{ \sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}, \dots, \sigma_m^{(i)} \right\} - 1 \quad (54)$$

其中， $\sigma_k^{(i)}$ 为 $G_i^T(s, K, F)$ 的第 k 个元素分母多项式和分子多项式次数之差， $k = 1, 2, \dots, m$

例5-9 传递函数矩阵如下，求不变量 d_i

$$\mathbf{G}_{KF}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2+2s+1} & \frac{1}{s^2+s+1} \\ \frac{1}{s^2+2s+1} & \frac{3}{s^2+s+4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^T(s, \mathbf{K}, \mathbf{F}) \\ \mathbf{G}_2^T(s, \mathbf{K}, \mathbf{F}) \end{bmatrix}$$

解 对于 $\mathbf{G}_1^T(s, \mathbf{K}, \mathbf{F})$ 来说, $\sigma_{11} = 2 - 1 = 1, \sigma_{12} = 2 - 0 = 2$ 因此

$$d_1(K, F) = \min\{\sigma_{11} \quad \sigma_{12}\} - 1 = 0$$

对于 $\mathbf{G}_2^T(s, \mathbf{K}, \mathbf{F})$ 来说, $\sigma_{21} = 2 - 0 = 2, \sigma_{22} = 2 - 0 = 2$ 因此

$$d_2(K, F) = \min\{\sigma_{21} \quad \sigma_{22}\} - 1 = 1$$

约定: 对于 $\mathbf{G}_i^T(s, \mathbf{K}, \mathbf{F})$ 为零向量时, $d_i(K, F) = n$

定义2
$$r_i^T(K, F) = \lim_{t \rightarrow \infty} s^{d_i+1} G_i^T(s, K, F) \quad (55)$$

这是一个 m 维非零向量。它是这样构造的：对于 $1 \times m$ 的行向量 $G_i^T(s, K, F)$ ，各元素分子多项式中最高次幂的系数。

例5-9 中
$$G_1^T(s, K, F) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2+2s+1} & \frac{0s+1}{s^2+s+1} \end{bmatrix}$$

$$r_1^T(K, F) = [1 \quad 0]$$

$$G_2^T(s, K, F) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2+2s+1} & \frac{3}{s^2+s+4} \end{bmatrix}$$

$$r_2^T(K, F) = [1 \quad 3]$$

约定：对于 $G_i^T(s, K, F)$ 为零向量时， $r_i^T(K, F) = 0$

5.10.2 能解耦性判据

定理5-6 一个具有传递函数 的系统，能用状态反馈实现解耦的充分必要条件是以下矩阵非奇异。

$$E_{01} = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1} B \\ C_2 A^{d_2} B \\ \vdots \\ C_m A^{d_m} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1^T(0, I) \\ r_2^T(0, I) \\ \vdots \\ r_m^T(0, I) \end{bmatrix} \quad (56)$$

（证明请参见教材184页。这是构造性证明方法。即：定理证毕，**K**, **F**矩阵即可求出）

例5-10 系统方程如下，要求用状态反馈实现系统解耦。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

解 1) 系统传递函数矩阵为

$$\mathbf{G}_{01}(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{s^2 + 3s + 1}{s(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

2) 判断系统能解耦性

$$d_1 = 0 \qquad d_2 = 0 \qquad \mathbf{r}_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{r}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{因为 } \det \mathbf{E} \neq 0 \text{ , 系统能解耦。}$$

3)

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{d_1+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_2 = \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{d_2+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

因此

$$\mathbf{u} = \mathbf{V} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

4) 状态反馈的方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A} - \mathbf{BK}]\mathbf{x} + \mathbf{BFV} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{V}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

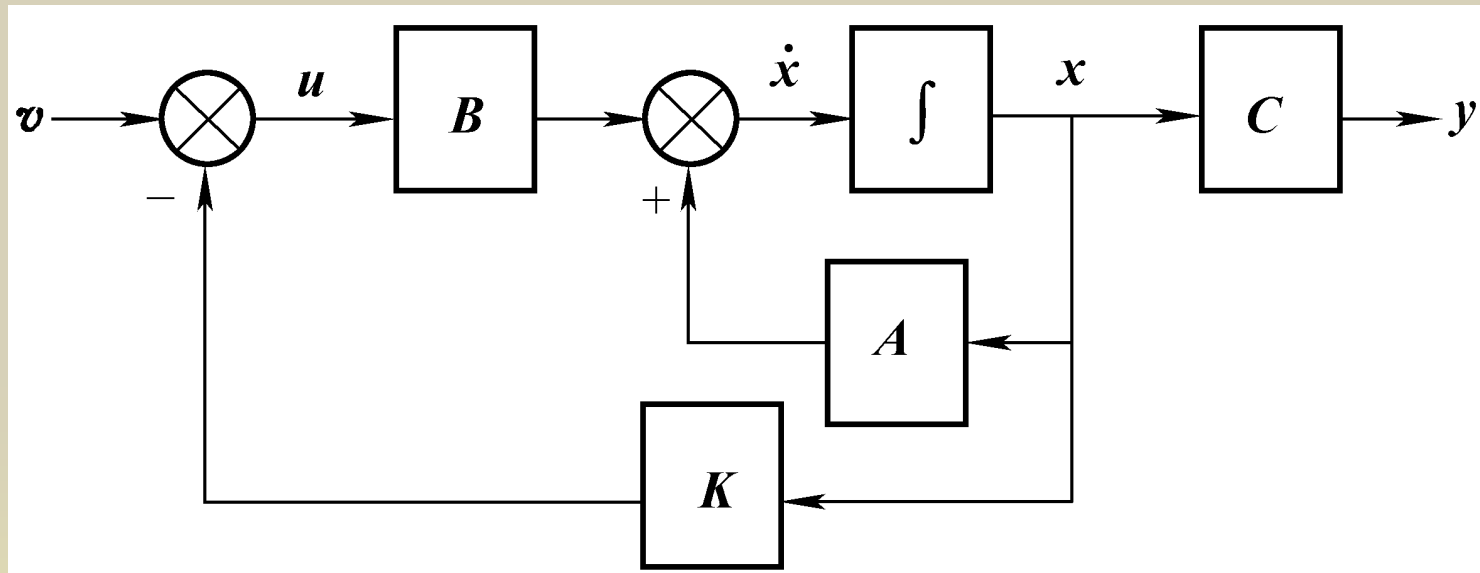
$$\mathbf{G}_{KF}(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}]^{-1} \mathbf{BF} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

上面介绍的是积分解耦系统。而对于实际工程系统来说，要求系统为李亚普诺夫意义下渐近稳定。实现方法见教材187页。

5.11 MATLAB的应用

5.11.1 极点配置

线性系统是状态能控时，可以通过状态反馈来任意配置系统的极点。把极点配置到**S**左半平面所希望的位置上，则可以获得满意的控制特性。



状态反馈的系统方程为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - BK)x + Bv \\ y &= Cx\end{aligned}$$

在**MATLAB**中，用函数命令**place()**可以方便地求出状态反馈矩阵**K**；该命令的调用格式为：
K = place(A,b,P)。**P**为一个行向量，其各分量为所希望配置的各极点。即：该命令计算出状态反馈阵**K**，使得 $(A-bK)$ 的特征值为向量**P**的各个分量。使用函数命令**acker()**也可以计算出状态矩阵**K**，其作用和调用格式与**place()**相同，只是算法有些差异。

例5-12 线性控制系统的状态方程为 $\dot{x} = Ax + Bu$

其中 $A = \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

要求确定状态反馈矩阵，使状态反馈系统极点配置为

$$s_1 = -10 \quad s_2 = -11 \quad s_3 = -12$$

解 首先判断系统的能控性，输入以下语句

```
A=[-6 -11 -6;1 0 0;0 1 0]; B=[1;0;0];  
r=rank(ctrb(A,B))
```

语句执行结果为

```
r =
```

```
3
```

这说明系统能控性矩阵满秩，系统能控，可以应用状态反馈，任意配置极点。

输入以下语句

```
A=[-6 -11 -6;1 0 0;0 1 0]; B=[1;0;0]; C=[0 0 10];  
P=[-10 -11 -12];  
K=place(A,B,P)
```

语句执行结果为

```
K =
```

```
1.0e+003 *
```

```
0.0270    0.3510    1.3140
```

计算结果表明，状态反馈阵为 $K = [27 \quad 351 \quad 1314]$

注：如果将输入语句中的 $K=\text{place}(A,B,P)$ 改为 $K=\text{acker}(A,B,P)$ ，可以得到同样的结果。

5.11.2 状态观测器设计

在**MATLAB**中，可以使用函数命令 $\text{acker}()$ 计算出状态观测器矩阵。调用格式 $G^T = \text{acker}(A^T, C^T, P)$ ，其中 A^T 和 C^T 分别是 A 和 B 矩阵的转置。 P 为一个行向量，其各分量为所希望的状态观测器的各极点。 G^T 为所求的状态观测器矩阵 G 的转置。

例5-13 线性控制系统的状态方程为 $\dot{x} = Ax + Bu$

$$\text{其中 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 1 \quad 0]$$
$$y = Cx$$

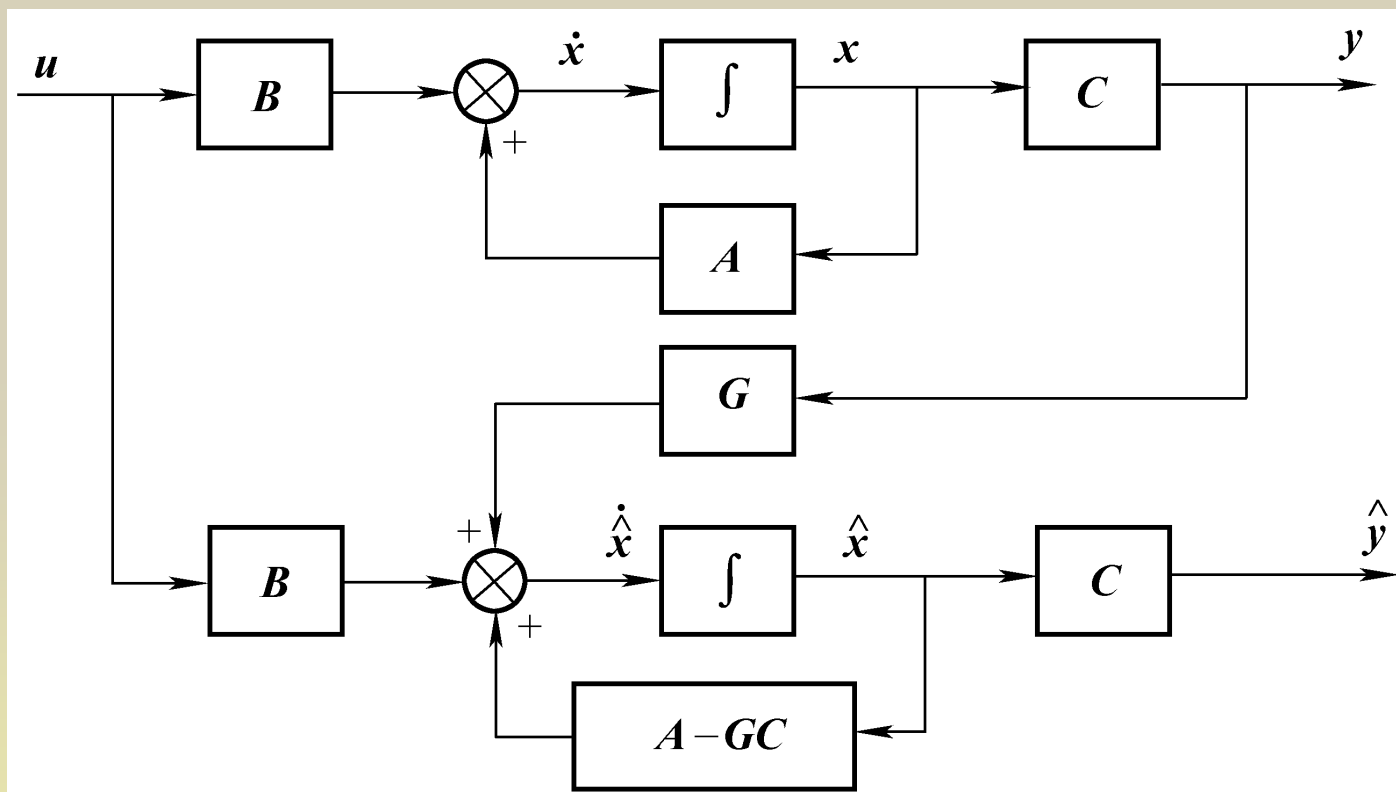
要求设计系统状态观测器，其特征值为： $-3, -4, -5$ 。

解 首先判断系统的能观测性，输入以下语句

```
A=[1 0 0;0 2 1;0 0 2]; B=[1;0;1]; C=[1 1 0];  
r=rank(observ(A,C))
```

语句运行结果为 $r =$
3

说明系统能观测，可以设计状态观测器



输入以下语句

```
A=[1 0 0;0 2 1;0 0 2]; B=[1;0;1]; C=[1 1 0];  
A1=A'; C1=C'; P=[-3 -4 -5];  
G1=acker(A1,C1,P);  
G=G1'
```

语句运行结果为

```
G =  
  
    120  
   -103  
    210
```

计算结果表明，状态观测器矩阵为 $G = \begin{bmatrix} 120 \\ -103 \\ 210 \end{bmatrix}$

状态观测器的方程为

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{GC})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}y + \mathbf{B}u = \begin{bmatrix} -119 & -120 & 0 \\ 103 & 105 & 1 \\ -210 & -210 & 2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 120 \\ -103 \\ 210 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

5.11.3 单级倒立摆系统的极点配置与状态观测器设计

1. 状态反馈系统的极点配置及其MATLAB/Simulink仿真

例3-5中给出的单级倒立摆系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

首先，使用**MATLAB**，判断系统的能控性矩阵是否为满秩。
输入以下程序

```
A=[0 1 0 0;0 0 -1 0;0 0 0 1;0 0 11 0];  
B=[0;1;0;-1];  
C=[1 0 0 0];  
rct=rank(ctrb(A,B))
```

计算结果
为

```
rct =  
  
4
```

根据判别系统能控性的定理，该系统的能控性矩阵满秩，所以该系统是能控的。因为系统是能控的，所以，可以通过状态反馈来任意配置极点。

不失一般性，不妨将极点配置在

$$s_1 = -6 \quad s_2 = -6.5 \quad s_3 = -7 \quad s_4 = -7.5$$

在**MATLAB**中输入命令

```
A=[0 1 0 0;0 0 -1 0;0 0 0 1;0 0 11 0];  
B=[0;1;0;-1];  
P=[-6 -6.5 -7 -7.5];  
K=place(A, B, P)
```

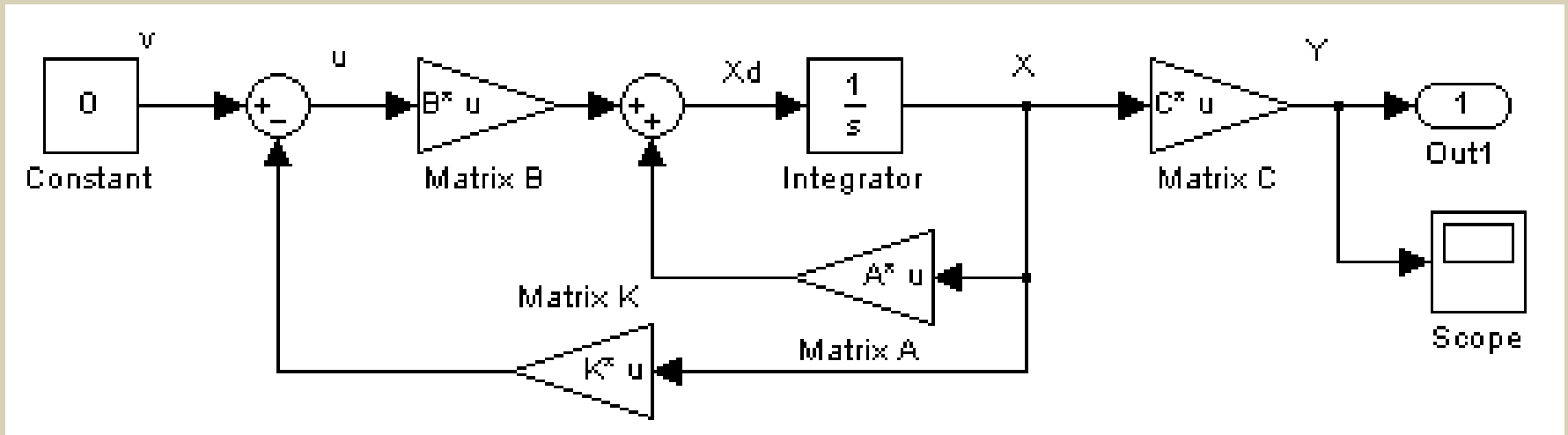
得到计算结果为 $K =$

```
-204.7500 -122.1750 -488.5000 -149.1750
```

因此，求出状态反馈矩阵为

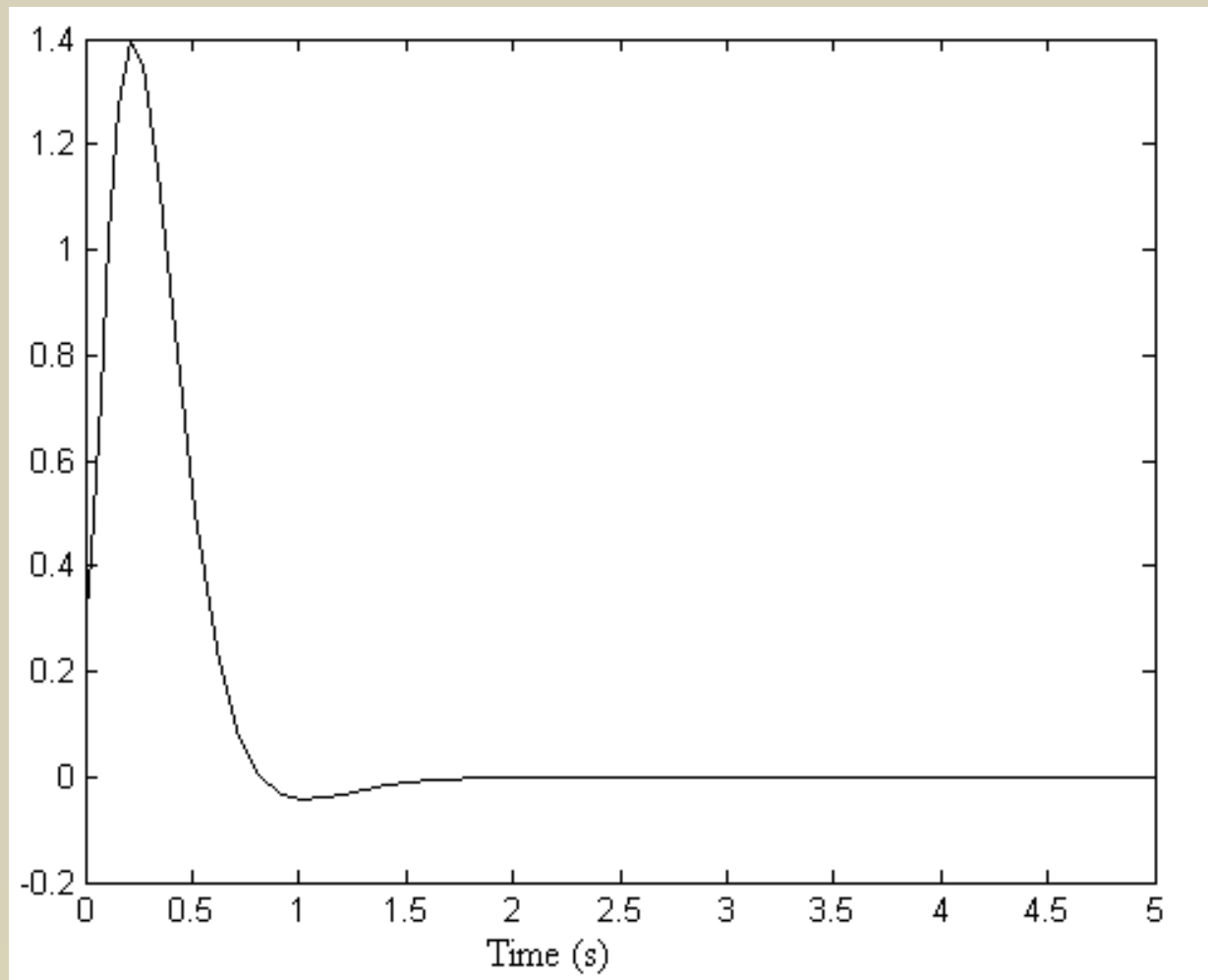
$$K = [-204.75 \quad -122.175 \quad -488.5 \quad -149.175]$$

采用**MATLAB/Simulink**构造单级倒立摆状态反馈控制系统的仿真模型，如下图所示。



首先，在**MATLAB**的**Command Window**中输入各个矩阵的值，并且在模型中的积分器中设置非零初值。然后运行仿真程序。

得到的仿真曲线如右图所示



从仿真结果可以看出，可以将倒立摆的杆子与竖直方向的偏角控制在 $\theta = 0^\circ$ （即小球和杆子被控制保持在竖直倒立状态）。

2. 状态观测器实现状态反馈极点配置及其仿真

首先，使用**MATLAB**，判断系统的能观性矩阵是否为满秩。输入以下程序

```
A=[0 1 0 0;0 0 -1 0;0 0 0 1;0 0 11 0];  
B=[0;1;0;-1];  
C=[1 0 0 0];  
rob=rank(observ(A,C))
```

计算结果为

```
rob =  
  
4
```

因为该系统的能观测性矩阵满秩，所以该系统是能观测的。因为系统是能观测的，所以，可以设计状态观测器。而系统又是能控的，因此可以通过状态观测器实现状态反馈。

设计状态观测器矩阵，使的特征值的实部均为负，且其绝对值要大于状态反馈所配置极点的绝对值。通过仿真发现，这样才能保证状态观测器有足够快的收敛速度，才能够保证使用状态观测器所观测到的状态与原系统的状态充分接近。不妨取状态观测器的特征值为： $s_1 = -20$ $s_2 = -21$ $s_3 = -22$ $s_4 = -23$

输入以下命令

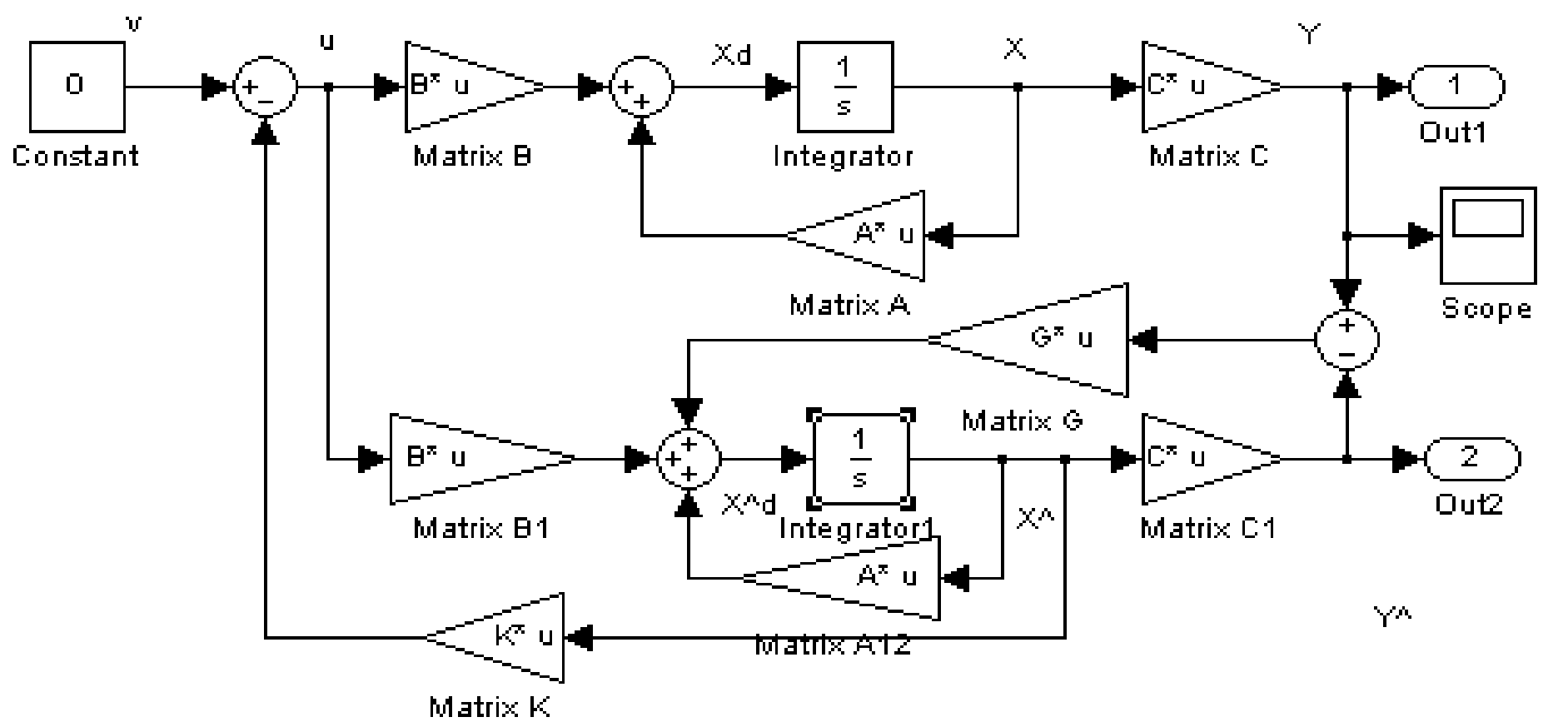
```
A=[0 1 0 0;0 0 -1 0;0 0 0 1;0 0 11 0];  
A1=A';  
C=[1 0 0 0];  
C1=C';  
P=[-20 -21 -22 -23];  
G1=place(A1,C1,P);  
G=G1'
```

计算结果为

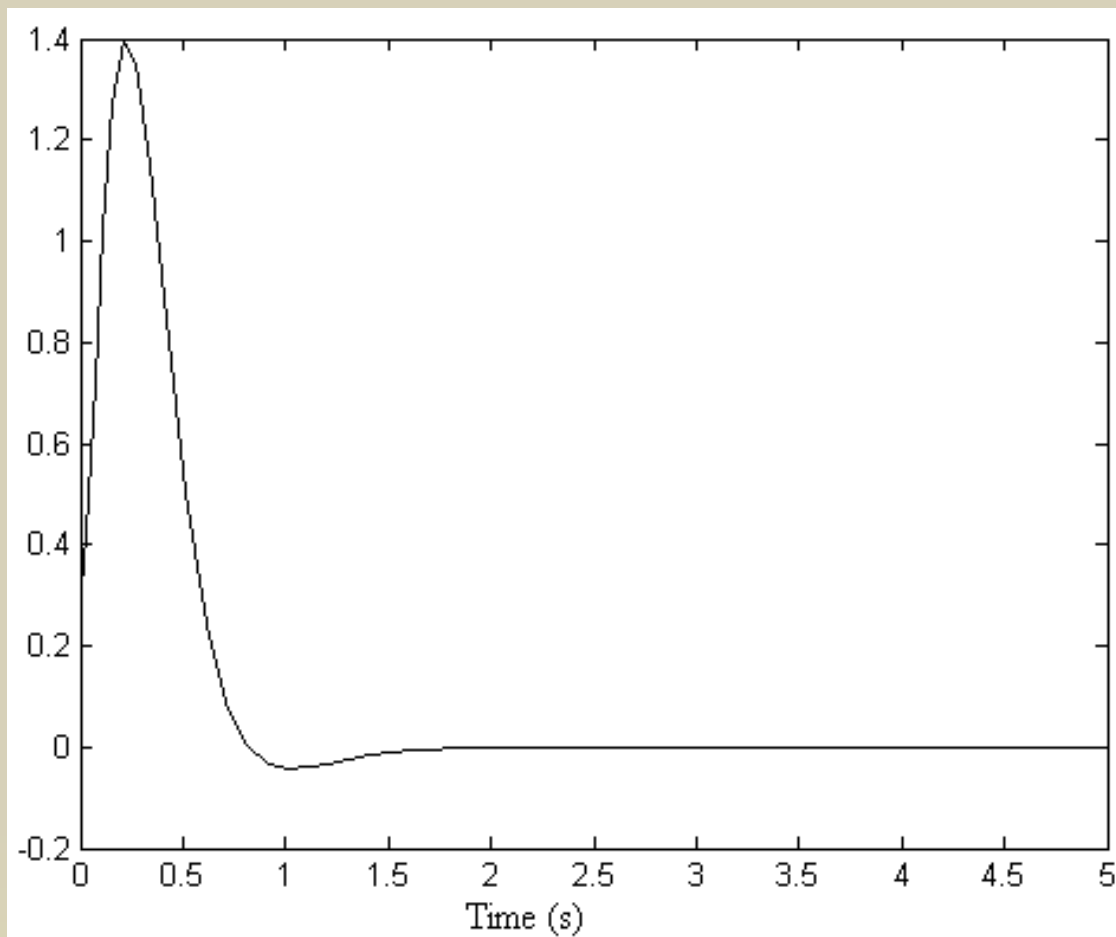
```
G =  
  
1.0e+005 *  
  
0.0009  
0.0278  
-0.4059  
-2.4312
```

求出状态观测器矩阵为 $G = [90 \quad 2780 \quad -40590 \quad -243120]^T$

如果采用**MATLAB/Simulink**构造具有状态观测器的单级倒立摆状态反馈控制系统的仿真模型，如下图所示。



首先，在**MATLAB**的**Command Window**中输入各个矩阵的值，并且在模型中的积分器中设置非零初值。然后运行仿真程序。得到的仿真曲线如右图所示。



比较两个仿真结果，具有状态观测器的单级倒立摆状态反馈系统的控制效果和没有状态观测器的控制系统的控制效果十分接近，令人满意。

第5章 结束

