

第4章 控制系统稳定性

对于非线性、时变、多输入多输出控制系统稳定性问题的研究，经典控制理论无能为力。只有利用俄罗斯科学家李亚普诺夫（**A. M. Lyapunov**）的稳定性理论来分析和研究。

A. M. Lyapunov于1892年出版专著《运动系统稳定性的一般问题》，使得**Lyapunov**稳定性理论已经成为控制理论的最重要的几个柱石之一。

本章的主要内容为

1. 引言
2. 李亚普诺夫意义下稳定性的定义
3. 李亚普诺夫第二法

4. 线性连续系统的稳定性
5. 线性定常离散系统的稳定性
6. 有界输入-有界输出稳定
7. 非线性系统的稳定性分析

4.1 引言

李亚普诺夫将稳定性问题的研究归纳为两种方法。

第一种方法是求出线性化以后的常微分方程的解，从而分析原系统的稳定性。

第二种方法不需求解微分方程的解，而能够提供系统稳定性的信息。

对于非线性、时变、多输入多输出系统来说，第二种方法特别重要。李亚普诺夫第二法又称为直接法。

这种方法是基于一种广义能量函数及其随时间变化的特性来研究系统稳定性的。以下通过一个例子来说明。

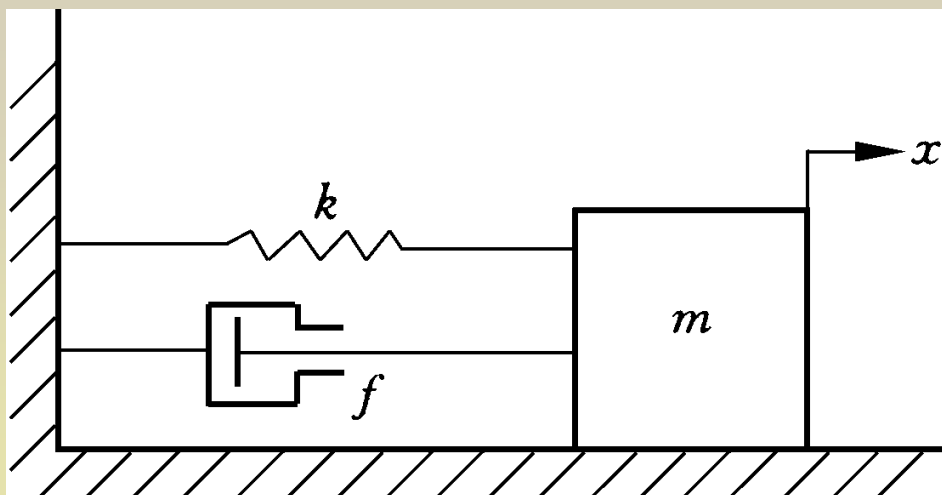
例4-1 一个弹簧—质量—阻尼器系统，如下图示。系统的运动由如下微分方程描述。

$$m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = 0$$

令 $m = 1$ $\ddot{x} + f\dot{x} + kx = 0$ (1)

选取状态变量 $x_1 = x$ $x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1$

则系统的状态方程为
$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -kx_1 - fx_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$



在任意时刻，系统的总能量

$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \quad (3)$$

显然，当 $x \neq 0$ 时 $E(x) > 0$ ，而当 $x = 0$ 时 $E(0) = 0$

而总能量随时间的变化率为

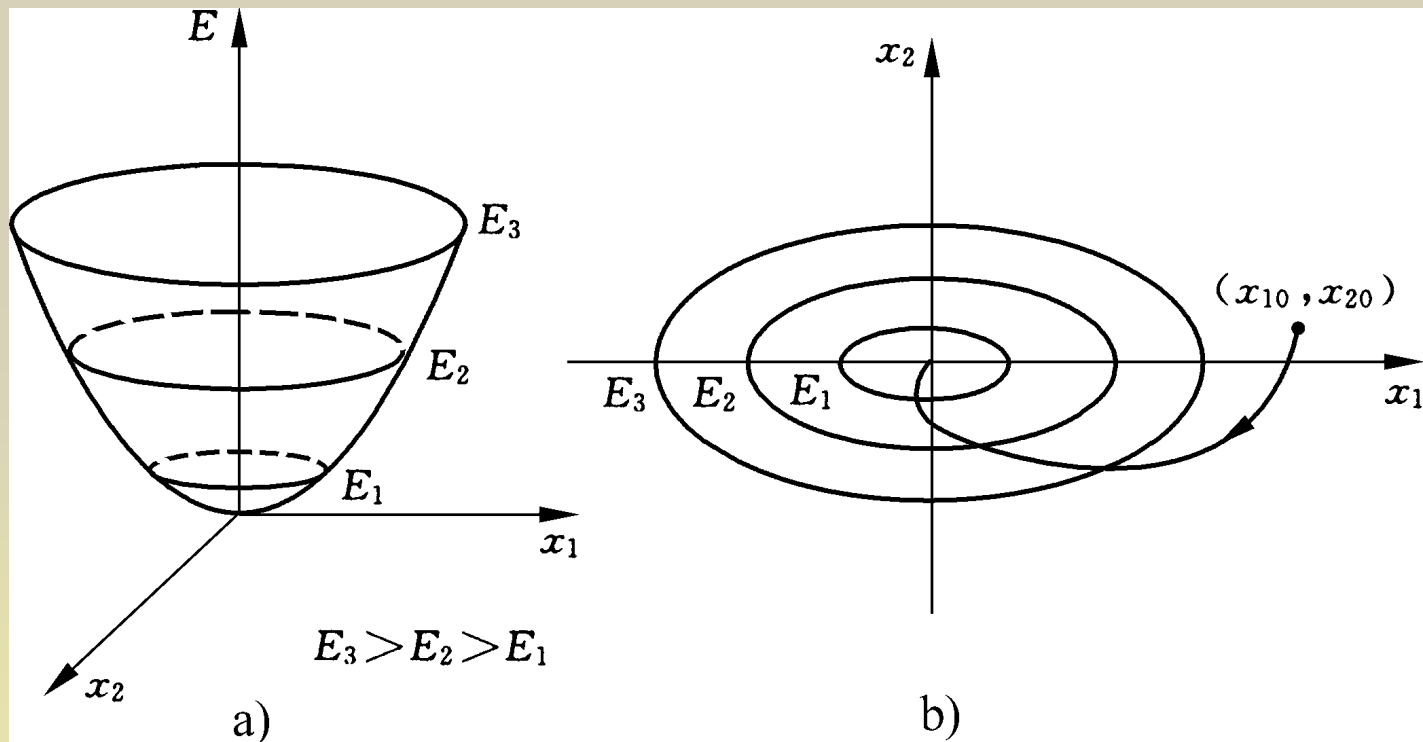
$$\frac{d}{dt}E(x_1, x_2) = \frac{\partial E}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial E}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} = kx_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = -fx_2^2$$

可见，只有在 $x_2 = 0$ 时， $dE/dt = 0$ 。在其他各处均有 $dE/dt < 0$ ，这表明系统总能量是衰减的，因此系统是稳定的。

Lyapunov第二法是研究系统平衡状态稳定性的。

平衡状态——一般地，系统状态方程为 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ ，其初始状态为 $\mathbf{x}(t_0)$ 。系统的状态轨线 $\mathbf{x}(t)$ 是随时间而变化的。当且仅当 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_e$ (当 $t \geq t_0$) 则称 $\mathbf{x}_e$ 为系统平衡。

$\mathbf{x}_e$ 如果不在坐标原点，可以通过非奇异线性变换，使 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ ，因此，平衡状态的稳定性问题都可以归结为原点的稳定性问题。



4.2 李亚普诺夫意义下稳定性的定义

4.2.1 稳定的定义

$\|\bullet\|$ ——表示求欧几里德范数。
(即：表示空间距离)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{则} \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{非线性时变系统} \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}_e = \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (4)$$

定义 对于任意给定的实数 $\varepsilon > 0$ ，都对应存在实数 $\delta(\varepsilon, t) > 0$ ，使满足

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_e\| \leq \delta(\varepsilon, t_0) \quad (5)$$

的任意初始状态 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 出发的轨线 $\mathbf{x}(t)$ 有

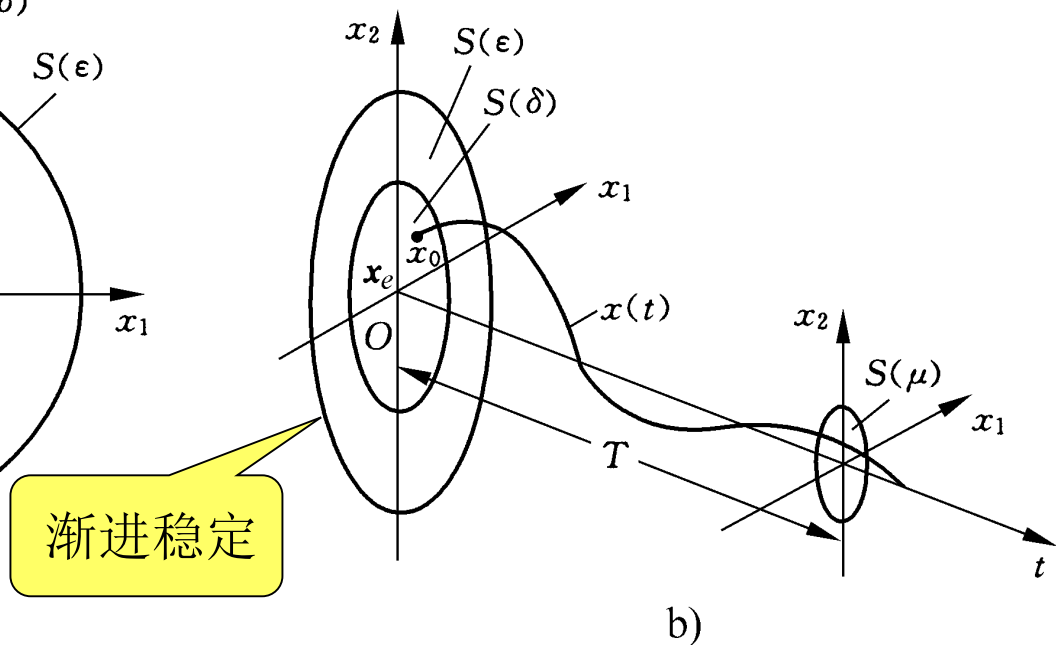
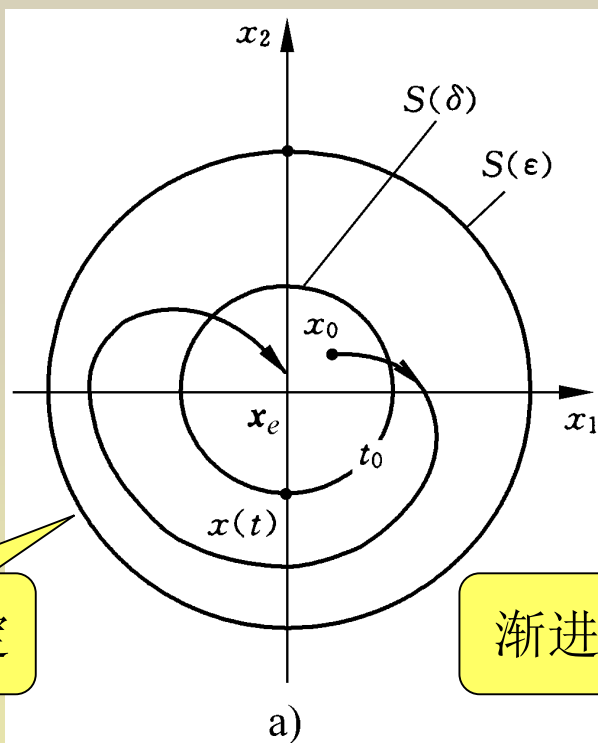
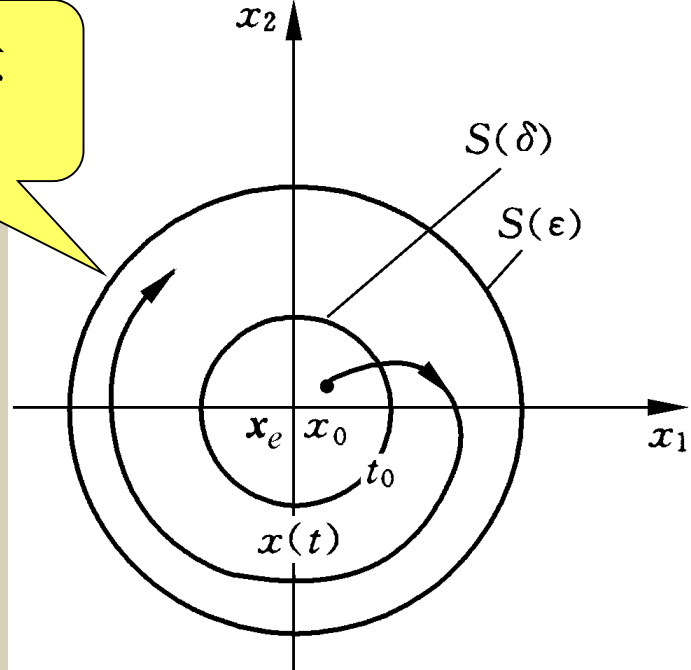
$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| \leq \varepsilon \quad (\text{对所有 } t \geq t_0) \quad (6)$$

成立，则称 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 为Lyapunov意义下是稳定的。

Lyapunov意义下稳定

4.2.2 渐近稳定

如果系统的平衡状态 $x_e = 0$ 是稳定的。从平衡状态的某个充分小的领域内出发的状态轨线 $x(t)$ ，当 $t \rightarrow \infty$ 时，收敛于 $x_e = 0$ ，则称 $x_e = 0$ 为渐近稳定。



更精密的叙述如下：

如果系统的平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ ，对于 $T > t_0$ ，存在 δ 和 ε ，当 $t > T$ 时，从 $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_e\| < \delta$ 出发的 $\mathbf{x}(t)$ ，都有 $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| < \varepsilon$ 并且 T 充分大时， ε 就充分小。则称 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 为 **Lyapunov** 意义下渐近稳定。当 t_0 与 T 、 ε 无关时，则称 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 为一致渐近稳定。

4.2.3 大范围渐进稳定

如果 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 是整个状态空间中任一点，并且都有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e$ 则为大范围渐近稳定或称为Lyapunov意义下全局渐近稳定。
当稳定性与 t_0 的选择无关时，称一致全局渐近稳定。

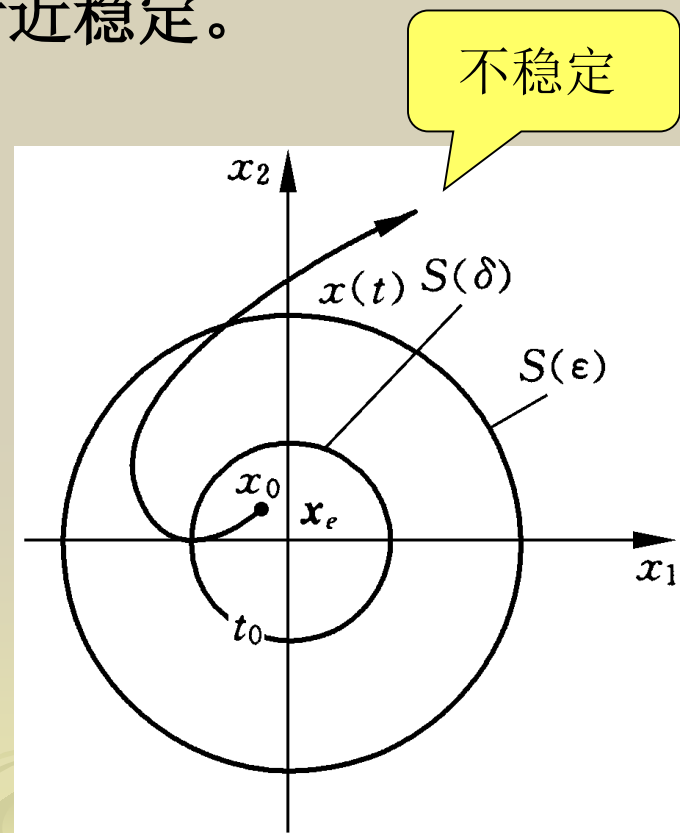
4.2.4 不稳定

对于任意的实数 $\varepsilon > 0$ ，存在一个实数 $\delta > 0$ ，不论 δ 取的多么小，在满足不等式 $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| < \delta$

的所有初始状态中，至少存在一个初始状态 $\mathbf{x}_0$ ，由此出发的轨线 $\mathbf{x}(t)$ ，满足

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\| > \varepsilon$$

称 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 为Lyapunov意义下不稳定



4.3 李亚普诺夫第二法

定义 如果标量函数 $V(\mathbf{x}) \geq 0$ ，并且当 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 时， $V(\mathbf{x}) > 0$ ；仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 时， $V(\mathbf{x}) = 0$ ；则称 $V(\mathbf{x})$ 为正定的。除了 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 以外，还有状态使 $V(\mathbf{x}) = 0$ ，称 $V(\mathbf{x})$ 为半正定的。

定义 如果标量函数 $V(\mathbf{x}) \leq 0$ ，并且当 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 时， $V(\mathbf{x}) < 0$ ；仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 时， $V(\mathbf{x}) = 0$ ；则称 $V(\mathbf{x})$ 为负定的。除了 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 以外，还有状态使 $V(\mathbf{x}) = 0$ ，称 $V(\mathbf{x})$ 为半负定的。

定理4-1 设系统状态方程为 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ (7)

在平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 的某邻域内，标量函数 $V(\mathbf{x})$ 具有连续一阶偏导数，并且满足：

1) $V(\mathbf{x})$ 为正定； 2) $\dot{V}(\mathbf{x})$ 为负定。

则 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 为一致渐近稳定的。

如果 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ ， $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ ，则 $V(\mathbf{x})$ 是大范围一致渐近稳定的。

例4-2 系统的状态方程如下，判别系统稳定性。

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -(x_1 + x_2)$$

解 选取**Lyapunov**函数，显然是正定的，即满足
$$\begin{cases} V(\mathbf{x}) > 0 & \mathbf{x} \neq 0 \\ V(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} = 0 \end{cases}$$

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

而
$$\dot{V}(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + 2x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2$$

将状态方程代入上式，化简后得
$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -(x_1^2 + x_2^2)$$

可见， $\dot{V}(\mathbf{x})$ 是负定的，即满足
$$\begin{cases} \dot{V}(\mathbf{x}) < 0 & \mathbf{x} \neq 0 \\ \dot{V}(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} = 0 \end{cases}$$

因此， $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是一致渐进稳定的。

当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ ，有 $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ ，故系统 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是一致大范围渐进稳定的。

定理4-2 设系统状态方程为 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$

在平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 的某邻域内，标量函数 $V(\mathbf{x})$ 具有连续一阶偏导数，并且满足：

1) $V(\mathbf{x})$ 为正定； 2) $\dot{V}(\mathbf{x})$ 为半负定； 3) 除了 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 平衡状态外，还有 $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ 的点，但是不会在整条状态轨线上有 $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$
则 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 为一致渐近稳定的。

如果 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty, V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ ，则 $V(\mathbf{x})$ 是大范围一致渐近稳定的。

（注：本定理是将定理4-1的条件稍微放宽了一点）

例4-3 系统的状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a(1+x_2)^2 x_2 - x_1\end{aligned}$$

其中, a 为大于零的实数。判别系统的稳定性。

解 系统的平衡状态为 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$

选取**Lyapunov**函数:

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

显然它是正定的, 即满足

$$\begin{cases} V(\mathbf{x}) > 0 & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ V(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}$$

而
$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$$

将状态方程代入上式, 化简后得
$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -2a(1+x_2)^2 x_2^2$$

可见, 当 $x_2 = 0$ 和任意的 x_1 时, 有 $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$, 而 $x_2 \neq 0$ 和任意 x_1 时, $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ 。又因为 $\dot{x}_1 = x_2$, 只要 x_1 变化 $\dot{x}_1 = x_2$ 就不为零, 因此在整条状态轨线上不会有 $\dot{V}(\mathbf{x}) \equiv 0$ 。

因此, $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是一致渐进稳定的。

当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$, 有 $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$, 故系统 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是一致大范围渐进稳定的。

定理4-3 设系统状态方程为 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$

在平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 的某邻域内，标量函数 $V(\mathbf{x})$ 具有连续一阶偏导数，并且满足：

1) $V(\mathbf{x})$ 为正定；

2) $\dot{V}(\mathbf{x})$ 为半负定；

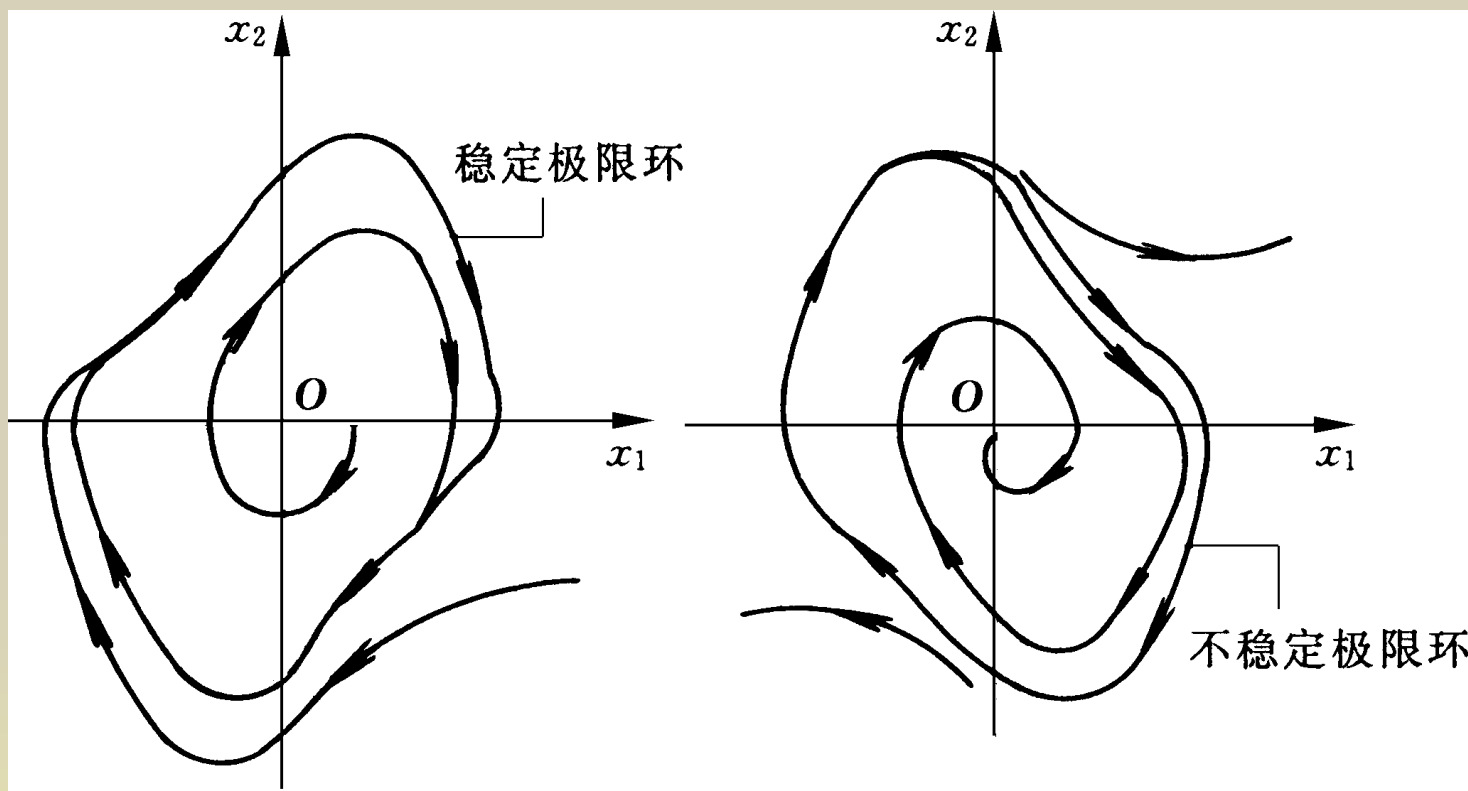
则 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 为一致稳定的。

如果 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty, V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ ，则 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是大范围一致稳定的。

(注：本定理只是比定理4-2少了第3个条件，不能保证渐近稳定，只能保证一致稳定。)

因为 $\dot{V}(x) \leq 0$

则系统可能存在闭合曲线（极限环），在上面恒有 $\dot{V}(x) = 0$ ，则系统可能收敛到极限环，而不收敛到平衡点。因此 $x_e = \mathbf{0}$ 是一致稳定的。



例4-4 系统的状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= kx_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1\end{aligned}$$

其中， k 为大于零的实数。分析系统平衡状态的稳定性。

解 系统的平衡状态为 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$

选取Lyapunov函数：

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + kx_2^2$$

显然它是正定的，即满足

$$\begin{cases} V(\mathbf{x}) > 0 & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ V(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}$$

而

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2kx_2\dot{x}_2 = 2x_1kx_2 - 2kx_1x_2 = 0$$

由定理4-3可知， $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 为Lyapunov意义下一致稳定。

定理4-4 设系统状态方程为 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$

在 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 的某邻域内，标量函数 $V(\mathbf{x})$ 具有连续一阶偏导数，并且满足：**1)** $V(\mathbf{x})$ 为正定； **2)** $\dot{V}(\mathbf{x})$ 为正定或半正定；
则 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 为不稳定的。

例4-5 系统的状态方程为
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2\end{aligned}$$

分析系统平衡状态的稳定性。

解 系统的平衡状态为 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$

选取**Lyapunov**函数： $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$

显然它是正定的，即满足
$$\begin{cases} V(\mathbf{x}) > 0 & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ V(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}$$

而 $\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1x_2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 2x_2^2$

由**定理4-4**可知， $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是不稳定的。

应该指出：到目前为止，人类还没有找到构造Lyapunov函数的一般方法。因为Lyapunov第二法给出的结果是系统稳定性的充分条件。因此，对于某个系统来说，找不到合适的Lyapunov函数，既不能说系统稳定，也不能说系统不稳定，只能说无法提供有关该系统稳定性的信息（即：**inconclusive** —没有得出结论）。

4.4 线性连续系统的稳定性

对线性时变系统，其相应的齐次状态方程为 $\dot{x} = A(t)x$

由第2章介绍的方法求出其解为 $x(t) = \phi(t, t_0)x(t_0)$

由此可判别齐次以及非齐次系统的稳定性，如果收敛则都稳定；如果发散，则都不稳定。

对线性定常系统 $\dot{x} = A(t)x$ ，可以用Lyapunov第二法。

首先介绍矩阵正定性的定义：对于方阵

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

当它的所有主子式均大于零时，则 Q 是正定的。即：

$$q_{11} > 0 \quad \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad , \quad \cdots \quad , \quad \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

如果方阵 Q 是正定的，则 $-Q$ 就是负定的。负定的矩阵主子式负正相间。

Lyapunov函数 $V(x)$ 为状态变量 x 的二次型函数，即 $V(x) = x^T P x$

如果 P 为 $n \times n$ 维正定的对称常数矩阵，则 $V(x)$ 为正定的。

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}(x^T P x) = x^T (A^T P + P A) x$$

令 $\dot{V}(x) = -x^T Q x$ ，其中 Q 为正定实数矩阵，且满足

$$A^T P + P A = -Q$$

如果给定 Q 阵，能够推出 P 为正定的，则系统在 $x_e = 0$ 为稳定的。并且线性定常系统为稳定，就一定是大范围一致渐近稳定。

(注：线性定常系统，可以判断 A 的特征值是否全部具有负实部，既可以判别其稳定性。)

例4-6 线性定常系统的状态方程为 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$
判别系统的稳定性。

解 系统的平衡状态为 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$

为简单起见，可以令 $\mathbf{Q}$ 阵为单位矩阵 $\mathbf{I}$ 。

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{I}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

解得 $\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ 有 $P_{11} > 0$ $\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix} > 0$

可见， $\mathbf{P}$ 为正定的矩阵，故 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 为大范围一致渐近稳定的。

4.5 线性定常离散系统的稳定性

线性定常离散系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) \quad (8)$$

系统的平衡状态为 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$

假设 $\mathbf{G}$ 为 $n \times n$ 维非奇异常数阵, $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是唯一的平衡状态。

选取Lyapunov函数 $V[\mathbf{x}(k)] = \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k)$ (9)

式中, $\mathbf{P}$ 为 $n \times n$ 正定的对称常数, 因此 $V[\mathbf{x}(k)]$ 是正定的。

$$\begin{aligned} V[\mathbf{x}(k)] \text{ 的差分为 } \Delta V[\mathbf{x}(k)] &= V[\mathbf{x}(k+1)] - V[\mathbf{x}(k)] = \\ &= \mathbf{x}^T(k+1)\mathbf{P}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k) \\ &= \mathbf{x}^T(k)[\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G} - \mathbf{P}]\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

若要在 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 处渐近稳定, 要求 $\Delta V[\mathbf{x}(k)]$ 为负定的。所以

$$\Delta V[\mathbf{x}(k)] = -\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) \quad \text{其中 } \mathbf{Q} \text{ 为正定。}$$

$$\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q} \quad (10)$$

给定一个正定对称常数阵 $\mathbf{Q}$, 求 $\mathbf{P}$ 阵, 并验证其正定性。

例4-7 线性定常离散系统的状态方程如下，试判别其稳定性。

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

解 系统的平衡状态为 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$
为简单起见，可以令 $\mathbf{Q}$ 阵为单位矩阵 $\mathbf{I}$ 。

$$\mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{G} - \mathbf{P} = -\mathbf{I}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

解得 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} \end{vmatrix} > 0$$

可见， $\mathbf{P}$ 为正定的矩阵，故 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 为大范围一致渐近稳定的。

4.6 有界输入-有界输出稳定

4.6.1 有界输入-有界输出稳定

Bounded Input Bounded Output (BIBO) Stable

定义：对于初始松弛系统，任何有界输入，其输出也是有界的，称为BIBO系统。

如果输入 u 有界，是指 $\|u\| \leq K_1 < \infty$

如果输入 y 有界，是指 $\|y\| \leq K_2 < \infty$

$$\|y\| = \left\| \int_{t_0}^t H(t-\tau)u(\tau) d\tau \right\| \leq \int_{t_0}^t \|H(t-\tau)\| \cdot \|u(\tau)\| d\tau = K_1 \int_{t_0}^t \|H(t-\tau)\| \cdot \|u(\tau)\| d\tau$$

如果 $\int_{t_0}^t \|H(t-\tau)\| d\tau \leq K_3 < \infty$ 于是 $\|y\| \leq K_1 K_3$

可以取 $K_2 = K_1 K_3$

定理4-5 由方程 $\begin{matrix} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{matrix}$ 描述的线性定常系统。

为初始松弛系统。其输出向量的解为

$$\mathbf{y}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{H}(t-\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (11)$$

BIBO稳定的充分必要条件是存在一个常数 K_3 ，有

$$\int_0^{\infty} \|\mathbf{H}(t-\tau)\| d\tau \leq K_3 < \infty$$

或者对于 $\mathbf{H}(t-\tau)$ 的每一元素，都有

$$\int_0^{\infty} |h_{ij}(\tau)| d\tau \leq K_3 < \infty$$

例4-8 线性定常系统方程为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -ax + u \\ y &= cx\end{aligned}$$

其中， a 为一个非负的实数，而系统的脉冲响应函数为 $h(t) = ce^{-at}$ 分析系统是否**BIBO**稳定。

解

$$\int_0^{\infty} |h(\tau)| d\tau = c \int_0^{\infty} e^{-a\tau} d\tau = \begin{cases} c \frac{1}{a} & a > 0 \\ \infty & a = 0 \end{cases}$$

可见，只有当 $a > 0$ 时，才有有限值 K_3 存在，系统才是**BIBO**稳定的。

4.6.2 BIBO稳定与平衡状态稳定性之间的关系

对于线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (12)$$

平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 的渐近稳定性由 $\mathbf{A}$ 的特征值决定。而BIBO的稳定性是由传递函数的极点决定的。

$G(s)$ 的所有极点都是 $\mathbf{A}$ 的特征值，但 $\mathbf{A}$ 的特征值并不一定都是 $G(s)$ 的极点。可能存在零极点对消。所以， $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 处的渐近稳定就包含了BIBO稳定，而BIBO稳定却可能不是 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 处的渐近稳定。

那么在什么条件下，BIBO稳定才有平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 渐近稳定呢？
结论是：如果（12）式所描述的线性定常系统是BIBO稳定，且系统是既能控又能观测的，则系统在 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 处是渐近稳定的。

4.7 非线性系统的稳定性分析

4.7.1 用Lyapunov第二法分析非线性系统稳定性

到目前为止，尚没有构造Lyapunov函数的一般性方法。往往都是根据经验，用试凑法。以下是两种比较有效的方法。

1. 克拉索夫斯基法

非线性定常系统的状态方程为
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (12)$$

其中 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 均为 n 维向量。 $f_i(\mathbf{x}) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为非线性多元函数，对各 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 都具有连续的偏导数。

构造Lyapunov函数如下

$$V(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T W \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) W \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (13)$$

其中 W 为 $n \times n$ 正定对称常数矩阵

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{f}}^T(\mathbf{x}) W \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) W \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \quad (14)$$

而

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \frac{d \mathbf{f}(\mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d \mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (15)$$

其中

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{称为雅可比矩阵} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= [\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})]^T \mathbf{W}\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\mathbf{W}\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{f}^T(\mathbf{x})[\mathbf{J}^T(\mathbf{x})\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{J}(\mathbf{x})]\mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{17}$$

其中 $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}^T(\mathbf{x})\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{J}(\mathbf{x})$

如果 $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ 是负定的，则 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 是负定的。而 $V(\mathbf{x})$ 是正定的，故 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是一致渐近稳定的。如果 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty, V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ ，则 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是大范围一致渐近稳定的。为简便，通常取 $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ ，这时

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x})$$

例4-10 非线性定常系统状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - x_2^3\end{aligned}$$

试分析 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 的稳定性。

解

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3 \end{bmatrix}$$

雅可比矩阵

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

选择 $\mathbf{W}=\mathbf{I}$ 则 $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x})$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 - 3x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 - 3x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 - 6x_2^2 \end{bmatrix}$$

检验 $S(\mathbf{x})$ 的各阶主子式: $-2 < 0$

$$\det \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2-6x_2^2 \end{bmatrix} = 3 + 12x_2^2 > 0$$

并且 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时, 有 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = x_1^2 + (x_1 - x_2 - x_2^3)^2 \rightarrow \infty$

显然, $S(\mathbf{x})$ 是负定的, 故 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是大范围一致渐近稳定的。

2. 变量梯度法

(这部分内容需要用到工程数学《场论》中的梯度、旋度等知识, 而大部分院校自动化专业本科生没有学过《场论》, 可以跳过这一段。)

4.7.2 用Lyapunov第一近似理论分析非线性系统稳定性

非线性定常系统方程为
$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{f}(\mathbf{0}) &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{18}$$

设 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 的邻域内，可以展开成台劳级数：

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_e) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e=\mathbf{0}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) + O[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e)^2] \\ &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e=\mathbf{0}} \mathbf{x} + O(\mathbf{x}^2)\end{aligned}\tag{19}$$

如果当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$ ，有 $\frac{\|O(\mathbf{x}^2)\|}{\|\mathbf{x}\|} \rightarrow 0$ ，则 $O(\mathbf{x}^2)$ 为高阶无穷小项。

忽略高阶无穷小，得到非线性系统的线性化模型

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{20}$$

其中

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e=\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e=\mathbf{0}}$$

这是一个雅可比矩阵

Lyapunov第一法由以下3个定理组成:

定理4-6 如果式(20)所描述的线性化系统, A 的所有特征值具有负实部, 则式(18)所描述的非线性系统在 $x_e = 0$ 处为渐近稳定。

定理4-7 如果式(20)所描述的线性化系统, A 的所有特征值中如果有一个(或一个以上)具有正实部, 则式(18)所描述的非线性系统在 $x_e = 0$ 处为不稳定。

定理4-8 如果式(20)所描述的线性化系统, A 的特征值中有实部为零的, 而其余的特征值实部均为负, 则式(18)所描述的非线性系统在 $x_e = 0$ 处是否为稳定则不能确定。(要取决于高阶项)

第4章 结束

