

第3章 控制系统的能控性和能观测性

在多变量控制系统中，能控性和能观测性是两个反映控制系统构造的基本特性，是现代控制理论中最重要的基本概念。

本章的内容为：

1. 引言——能控性、能观测性的基本概念
2. 能控性及其判据
3. 能观测性及其判据
4. 离散系统的能控性和能观测性
5. 对偶原理

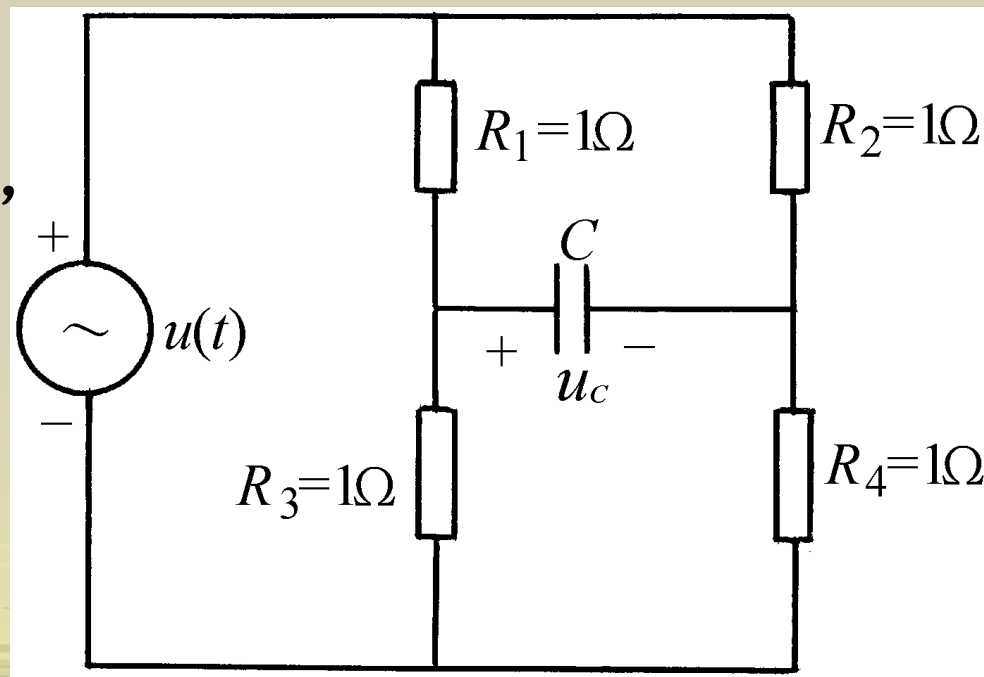
6. 能控标准形和能观测标准形
7. 能控性、能观测性与传递函数的关系
8. 系统的结构分解
9. 实现问题
10. 使用**MATLAB**判断系统的能控性和能观测性

3.1 引言

首先，通过例子介绍能控性、能观测性的基本概念。

例3-1 电路如下图所示。如果选取电容两端的电压 u_C 为状态变量，即： $x = u_C$ 电桥平衡时，不论输入电压 $u(t)$ 如何改变， $x(t) = u_C$ 不随着 $u(t)$ 的变化而改变，或者说状态变量不受 $u(t)$ 的控制。即：该电路的状态是不能控的。

显然，当电桥不平衡时，
该电路的状态是能控的。



例3-2 电路如下图所示，如果选择电容 C_1 、 C_2 两端的电压为状态变量，即： $x_1 = u_{C1}$ ， $x_2 = u_{C2}$ ，电路的输出 y 为 C_2 上的电压，即 $y = x_2$ ，则电路的系统方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \mathbf{C}\mathbf{x} = [0 \quad 1]\mathbf{x}$$

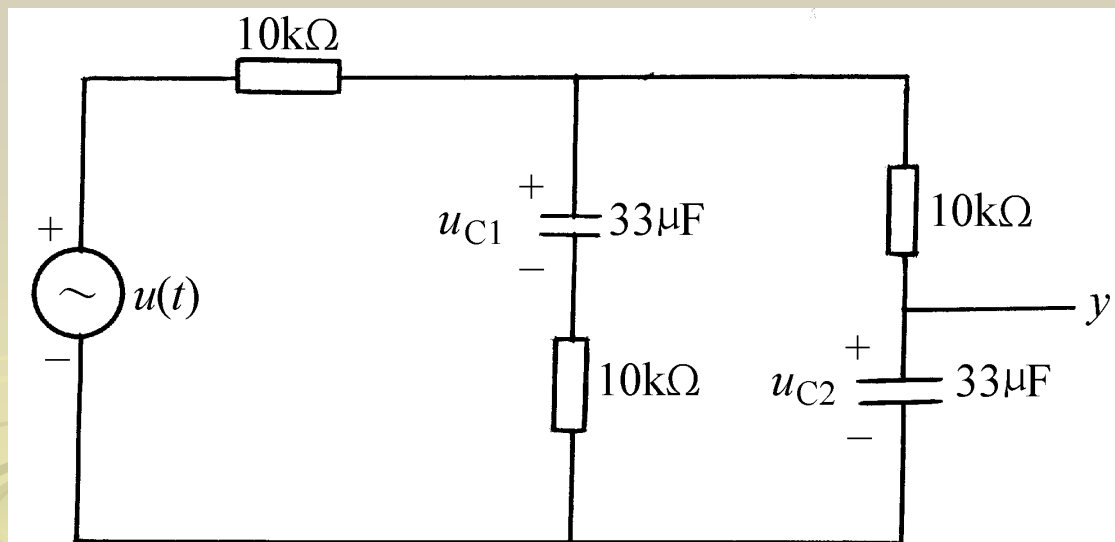
系统状态转移矩阵为
$$e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-t} + e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} + e^{-3t} \end{bmatrix}$$

如果初始状态为
$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

系统状态方程的解为

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \int_0^t e^{-(t-\tau)} u(\tau) d\tau$$

可见，不论加入什么样的输入信号，总是有 $x_1 = x_2$



一般情况下，系统方程可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

状态能控与否，不仅取决于 $\mathbf{B}$ 阵（直接关系），还取决于 $\mathbf{A}$ 阵（间接关系）。

系统能观测问题是研究测量输出变量 y 去确定状态变量的问题。

例3-3 电路如下图所示。选取 $u(t)$ 为输入量， $y(t)$ 为输出量，两个电感上的电流分别作为状态变量，则系统方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

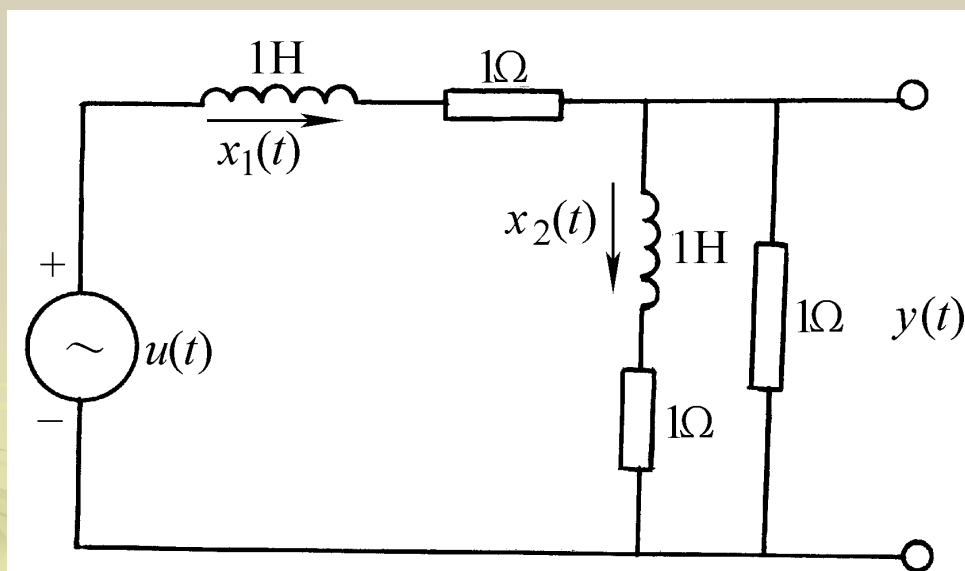
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

系统状态转移矩阵为

$$e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-t} + e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} + e^{-3t} \end{bmatrix}$$

系统状态方程的解为

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}u(t-\tau) d\tau$$



为了简便起见，令 $u(t) \equiv 0$ 则 $\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0)$

$$y(t) = \mathbf{C} e^{At} \mathbf{x}(0) = [x_1(0) - x_2(0)] e^{-3t}$$

从上式可知，不论初始状态为什么数值，输出 仅仅取决于其差值 $[x_1(0) - x_2(0)]$ 。当 $x_1(0) = x_2(0)$ ，则输出恒等于零。显然，无法通过对输出的观测去确定初始状态，称这样的系统是不能观测的。

一般情况下，系统方程如式（1）所示，状态能观测与否，不仅取决于 $\mathbf{C}$ 阵（直接关系），还取决于 $\mathbf{A}$ 阵（间接关系）。

对于不能观测的系统，其不能观测的状态分量与 $\mathbf{y}$ 既无直接关系，又无间接关系。状态是否能观测不仅取决于 $\mathbf{C}$ ，还与 $\mathbf{A}$ 有关。

3.2 能控性及其判据

3.2.1 线性定常系统的能控性及其判据

1. 能控性定义

线性定常系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2)$$

给定系统一个初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$ ，如果在 $t_1 > t_0$ 的有限时间区间 $[t_0, t_1]$ 内，存在容许控制 $\mathbf{u}(t)$ ，使 $\mathbf{x}(t_1) = 0$ ，则称系统状态在 t_0 时刻是能控的；如果系统对任意一个初始状态都能控，则称系统是状态完全能控的。

说明：

1) 初始状态 是状态空间中的任意非零有限点，控制的目标是状态空间的坐标原点。（如果控制目标不是坐标原点，可以通过坐标平移，使其在新的坐标系下是坐标原点。）

2) 如果在有限时间区间 $[t_0, t_1]$ 内, 存在容许控制 $u(t)$, 使系统从状态空间坐标原点推向预先指定的状态 $x(t_1)$, 则称系统是状态能达的; 由于连续系统的状态转移矩阵是非奇异的, 因此系统的能控性和能达性是等价的。

3) 只有整个状态空间中所有的有限点都是能控的, 系统才是能控的。

4) 满足(3)式的初始状态, 必是能控状态。

$$x(0) = -\int_0^{t_1} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau \quad (3)$$

5) 当系统中存在不依赖于 $u(t)$ 的确定性干扰 $f(t)$ 时, $f(t)$ 不会改变系统的能控性。

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(t) \quad (4)$$

2. 能控性判据

定理3-1 (2) 式的线性定常系统为状态能控的充分必要条件是下面的 $n \times n$ 维格拉姆矩阵满秩

$$W_C(0, t_1) = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{-A^T \tau} d\tau \quad (5)$$

(证明参见教材84页)

(这个定理为能控性的一般判据。但是，由于要计算状态转移矩阵，比较繁琐。实际上，常用下面介绍的判据。)

定理3-2 (2) 式的线性定常系统为状态能控的充分必要条件是下面的 $n \times nr$ 维能控性矩阵满秩。

$$Q_C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \quad (6)$$

$$\text{rank } Q_C = n \quad (7)$$

证明

应用凯-哈定理，有

$$e^{-A\tau} = a_0(\tau)I + a_1(\tau)A + \cdots + a_{n-1}(\tau)A^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\tau)A^i$$

上式代入 (3) 式

$$x(0) = - \sum_{i=0}^{n-1} A^i B \int_0^{t_1} a_i(\tau) u(\tau) d\tau \quad (8)$$

$$\int_0^{t_1} a_i(\tau) u(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} \beta_{i1} \\ \beta_{i2} \\ \vdots \\ \beta_{ir} \end{bmatrix} = \beta_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1)$$

于是

$$x(0) = -[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

如果系统能控，必能够从（9）式中解得 $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}$ 。这样就要求

$$\text{rank } Q_C = \text{rank}[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = n$$

（本判据本身很简单，因此是最为常用的方法。）

定理3-3 (PBH判别法) (2) 式的线性定常系统为状态能控的充分必要条件是, 对 A 的所有特征值 λ_i , 都有

$$\text{rank}[\lambda_i I - A \quad \vdots \quad B] = n \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

(证明略)

定理3-4 (2) 式的线性定常系统的矩阵 A 的特征值 λ_i 互异, $(i = 1, 2, \dots, n)$ 将系统经过非奇异线性变换变换成对角阵

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \bar{x} + \bar{B}u \quad (11)$$

则系统能控的充分必要条件是矩阵 $\bar{B}$ 中不包含元素全为零的行。

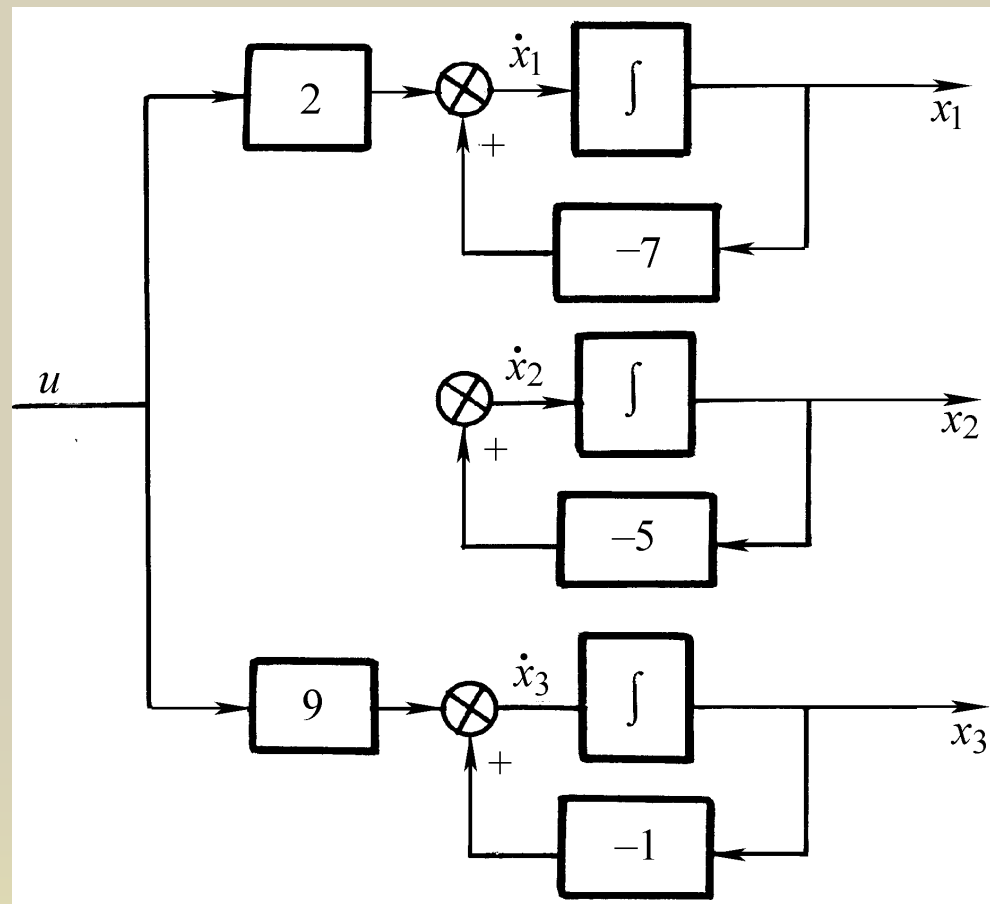
(可以应用定理3-2证明, 详见教材87页)

例3-6 有如下两个线性定常系统，判断其能控性。

$$(1) \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} u$$

$$(2) \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} u$$

解 根据定理**3-4**，系统**(1)**
不能控；系统**(2)**能控。



定理3-5 (2) 式的线性定常系统的矩阵 **A** 具有重特征值, λ_1 、 λ_2 、 λ_3 、 $\dots$ 、 λ_k 分别为 l_1 重、 l_2 重、 l_3 重、 $\dots$ 、 l_k 重。

且 $\sum_{i=1}^k l_i = n$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, ($i \neq j$) 经过非奇异线性变换, 得到约当阵

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & & 0 \\ & \mathbf{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{J}_k \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u} \quad \mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (12)$$

则系统能控的充分必要条件是矩阵 $\bar{\mathbf{B}}$ 中与每一个约当子块最下面一行对应行的元素不全为零。

例3-7 有如下两个线性定常系统，判断其能控性。

$$(1) \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$(2) \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} u$$

解 根据定理**3-5**，系统（1）能控；系统（2）不能控

（定理（3-4）、定理（3-5）不仅可以判断系统能控性，而且对于不能控的系统，可以知道哪个状态分量不能控。）

说明：1. 上面通过几个定理给出判断系统能控性的判据。虽然它们的表达形式、方法不同，但是，在判断线性定常系统能控性时是等价的。

2. 在线性连续定常系统中，由于能达性和能控性是等价的，因此，能控性判据同样可以判断能达性。

3.2.2 线性时变系统的能控性判据

线性时变系统的状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{x}(t_0) &\end{aligned}\tag{13}$$

定理3-6 状态在时刻 t_0 能控的充分必要条件是存在一个有限时间 $t_1 > t_0$ ，使得函数矩阵 $\phi(t_0, t_1)\mathbf{B}(t)$ 的 n 个行在 $[t_1, t_0]$ 上线性无关。

(证明略)

定理3-7 状态在时刻 t_0 能控的充分必要条件是存在一个有限时间 $t_1 > t_0$ ，使得以下格拉姆矩阵非奇异。

$$W_C[t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_0, t) B(t) B^T(t) \phi^T(t_0, t) dt \quad (14)$$

定义: $M_{k+1}(t) = -A(t)M_k(t) + \frac{d}{dt}M_k(t) \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (15)$

$$M_0(t) = B(t) \quad (16)$$

当 $k = 0$ $M_1(t) = -A(t)M_0(t) + \frac{d}{dt}M_0(t)$

$k = 1$ $M_2(t) = -A(t)M_1(t) + \frac{d}{dt}M_1(t)$

$k = 2$ $M_3(t) = -A(t)M_2(t) + \frac{d}{dt}M_2(t)$

...

定理3-8 如果线性时变系统的 $A(t)$ 和 $B(t)$ 的元是 $(n-1)$ 阶连续可微的。如果存在一个有限的 $t_1 > t_0$ ，使得

$$\text{rank} \begin{bmatrix} M_0(t_1) & M_1(t_1) & \cdots & M_{n-1}(t_1) \end{bmatrix} = n \quad (17)$$

则系统在 t_0 是能控的。

例3-8 线性时变系统方程为 $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$ ， $y = \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix} x$
初始时刻 $t_0 = 0$ ，试判别系统的能控性。

解 $M_0(t) = B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$M_1(t) = -A(t)M_0(t) + \frac{d}{dt}M_0(t) = -\begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$$

而 $\text{rank} \begin{bmatrix} M_0(t) & M_1(t) \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & -t \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$ 所以，能控。

3.3 能观测性判据

3.3.1 线性定常系统能观测性及其判据

1. 能观测性定义

线性定常系统方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

如果在有限时间区间 $[t_0, t_1]$ ($t_1 > t_0$) 内，通过观测 $\mathbf{y}(t)$ ，能够唯一地确定系统的初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$ ，称系统状态在 t_0 是能观测的。如果对任意的初始状态都能观测，则称系统是状态完全能观测的。

说明：

1) 已知系统在有限时间区间 $[t_0, t_1]$ ($t_0 < t_1 < \infty$) 内的输出 $\mathbf{y}(t)$ ，观测的目标是为了确定 $\mathbf{x}(t_0)$ 。

2) 如果根据 $[t_0, t_1]$ ($t_0 < t_1 < \infty$) 内的输出 $\mathbf{y}(t)$ 能够唯一地确定任意指定状态 $\mathbf{x}(t_1)$ ，则称系统是可检测的。连续系统的能观测性和能检测性等价。

3) 状态空间中所有有限点都是能观测的，则系统才是能观测的。

4) 系统的输入 $u(t)$ 以及确定性的干扰信号 $f(t)$ 均不改变系统的能观测性。

2. 能观测性

定理3-9 (18) 式所描述的系统为能观测的充分必要条件是以下格拉姆能观性矩阵满秩，即

$$\text{rank } W_o[0, t_1] = n \quad (19)$$

其中

$$W_o[0, t_1] = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt \quad (20)$$

(证明见教材92页)

(这个定理为能观测性的一般判据。但是，由于要计算状态转移矩阵，比较繁琐。实际上，常用下面介绍的判据。)

定理3-10 (18) 式所描述的系统为能观测的充分必要条件是以下能观性矩阵满秩，即

$$\text{rank } Q_o = n \quad (21)$$

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}_{nm \times n} \quad (22)$$

证明 设 $u(t) \equiv 0$ ，系统的齐次状态方程的解为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{At} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{C} e^{At} \mathbf{x}(0) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

应用凯-哈定理，有

$$e^{A\tau} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\tau) A^i$$

则

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\tau) A^i \mathbf{x}(0)$$

或者写成
$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} a_0(t) & a_1(t) & \cdots & a_{n-1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0)$$

由于 $a_i(t)$ 是已知函数, 因此, 根据有限时间 $[0, t_1]$ 内的 $\mathbf{y}(t)$ 能够唯一地确定初始状态 $\mathbf{x}(0)$ 的充分必要条件为 $\mathbf{Q}_0$ 满秩。

(由于以上判据很简单, 因此最为常用)

定理3-11 (PBH判别法) 系统 (18) 为能观测的充分必要的条件是: 对于 $\mathbf{A}$ 的每一个特征值 λ_i , 以下矩阵的秩均为 n

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A} \end{bmatrix} = n \quad (24)$$

例3-9 系统方程如下, 试判断系统的能控性

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \quad y = [0 \quad 1] \mathbf{x}$$

解

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{不满秩, 故系统不能观测。}$$

定理3-12 如果(18)式描述的系统的 A 阵特征值 λ_i 互异, 经过非奇异线性变换成为对角阵, 则系统为能观测的充分必要条件是 $\overline{B}$ 矩阵中不包含元素全为零的列。

例3-10 有如下两个线性定常系统, 判断它们的能观测性。

$$(1) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ & -5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x \quad y = [0 \quad 4 \quad 5]x$$

$$(2) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ & -5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x \quad y = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} x$$

解 根据定理3-12可以判断, 系统(1)是不能观测的。系统(2)是能观测的。

定理3-13 如果 (18) 式描述的系统的 A 阵具有重特征值,
 λ_1 、 λ_2 、...、 λ_k 分别为 l_1 重、 l_2 重、...、 l_k 重。
且 $\sum_{i=1}^k l_i = n$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, ($i \neq j$) 经过非奇异线性变换, 得到约当阵

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & 0 \\ & \mathbf{J}_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \mathbf{J}_k \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}u$$
$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}$$

则系统能观测的充分必要条件是矩阵 $\bar{\mathbf{C}}$ 中与每一个约当子块第一列对应的列, 其元素不全为零。

例3-11 如下线性定常系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

试判别系统的能观测性。

解 应用定理**3-13**可知，系统能观测。

（定理（3-12）、定理（3-13）不仅可以判断系统能观测性，而且对于不能观测的系统，可以知道哪个状态分量不能观测。）

说明：1. 上面通过几个定理给出判断系统能观测性的判据。虽然它们的表达形式、方法不同，但是，在判断线性定常系统能观测性时是等价的。

2. 在线性连续定常系统中，由于能检测性和能观测性是等价的，因此，能观测性判据同样可以判断能检测性。

3.3.2 线性时变系统的能观测性判据

线性时变系统方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(t_0) & \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

定理3-14 状态在时刻 t_0 能观测的充分必要条件是存在一个有限时刻 $t_1 > t_0$ ，使得函数矩阵 $\mathbf{C}(t)\phi(t, t_0)$ 的 n 个列在 $[t_1, t_0]$ 上线性无关。

定理3-15 状态在时刻 t_0 能观测的充分必要条件是存在一个有限时间 $t_1 > t_0$ ，使得以下能观性格拉姆矩阵非奇异。

$$\mathbf{W}_o[t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} \phi^T(t, t_0) \mathbf{C}^T(t) \mathbf{C}(t) \phi(t, t_0) dt$$

定义
$$N_{k+1}(t) = N_k(t)A(t) + \frac{d}{dt}N_k(t) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (26)$$

$$N_0(t) = C(t) \quad (27)$$

定理3-16 如果线性时变系统的 $A(t)$ 和 $C(t)$ 的元是 $(n-1)$ 阶连续可微的。如果存在一个有限的 $t_1 > t_0$ ，使得

$$\text{rank} \begin{bmatrix} N_0(t_1) \\ N_1(t_1) \\ \vdots \\ N_{n-1}(t_1) \end{bmatrix} = n \quad (28)$$

则系统在 t_0 是能观测的。

3.4 离散系统的能控性和能观测性

线性定常离散系统方程为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

3.4.1 能控性定义

系统 (29) 的任一个初始状态 $\mathbf{x}(0)$ ，存在 $k > 0$ ，在有限时间区间 $[0, k]$ 内，存在容许控制序列 $\mathbf{u}(k)$ ，使得 $\mathbf{x}(k) = 0$ ，则称系统是状态完全能控的。

3.4.2 能控性判据

定理3-17 系统 (29) 能控的充分必要条件是能控性矩阵 Q_C 的秩为 n , 即

$$\text{rank } Q_C = \text{rank} \begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} = n \quad (30)$$

(证明见教材96页)

例3-12 线性定常离散系统状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(k)$$

判断系统的能控性。

解 $\text{rank } Q_C = \text{rank} \begin{bmatrix} H & GH & G^2H \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 3$

所以系统能控。

3.4.3 能观测性定义

对于（29）式所描述的系统，根据有限个采样周期的 $y(k)$ ，可以惟一地确定系统的任一初始状态 $x(0)$ ，则称系统是状态完全能观测的。

3.4.4 能观测性判据

定理3-18 系统（29）能观测的充分必要条件是能观性矩阵 Q_o 的秩为 n ，即

$$\text{rank } Q_o = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

（证明请参见教材97页）

例3-13 线性定常离散系统方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(k) \quad y(k) = [1 \quad 1 \quad 1] \mathbf{x}(k)$$

试判断系统的能观测性。

解

$$\text{rank } \mathbf{Q}_o = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{G} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix} = 3$$

因此，系统能观测。

3.4.5 连续系统离散化后的能控性与能观测性

线性定常系统方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

离散化后的系统方程为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

其中

$$\mathbf{G} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}T} \quad \mathbf{H} = \left[\int_0^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \mathbf{A} \mathbf{B} dt \right] \mathbf{B} \quad T \text{ 是采样周期}$$

定理3-19 如果线性定常系统 (31) 不能控 (不能观测)，则离散化后的系统 (32) 必是不能控 (不能观测)。其逆定理一般不成立。

定理3-20 如果线性离散化后系统 (32) 能控 (能观测)，则离散化前的连续系统 (31) 必是能控 (能观测)。其逆定理一般不成立。

定理3-21 如果连续系统 (31) 能控 (能观测), A 的全部特征值互异, $\lambda_i \neq \lambda_j$, 并且对 $\text{Re}[\lambda_i - \lambda_j] = 0$ 的特征值, 如果 $\text{Im}[\lambda_i - \lambda_j]$ 与采样周期的关系满足条件

$$T \neq \frac{2k\pi}{\text{Im}[\lambda_i - \lambda_j]} \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (33)$$

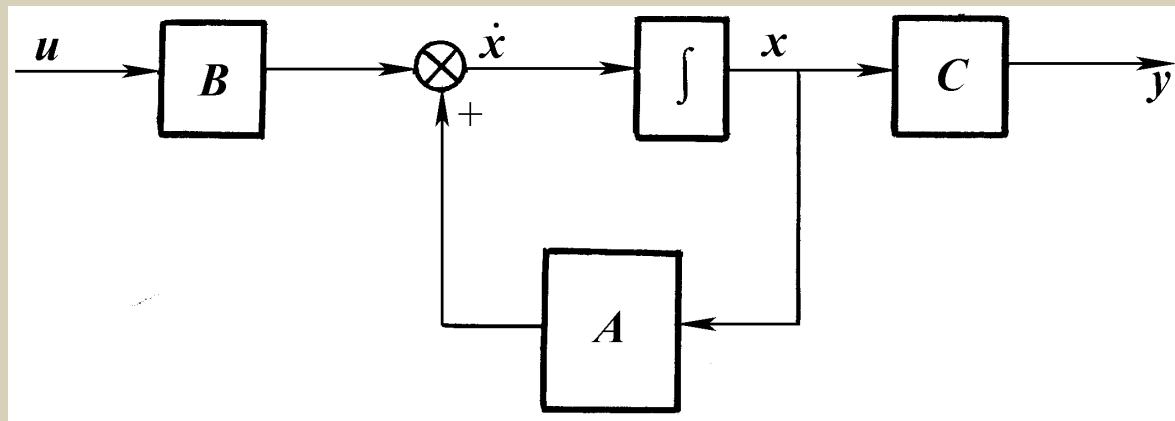
则离散化后的系统仍是能控 (能观测) 的。

3.5 对偶原理

(上面介绍了系统能控性和能观测性。从概念上和形式上都很相似。它给人们一个启示, 即能控性和能观测性之间存在某种内在的联系。这个联系就是系统的对偶原理)

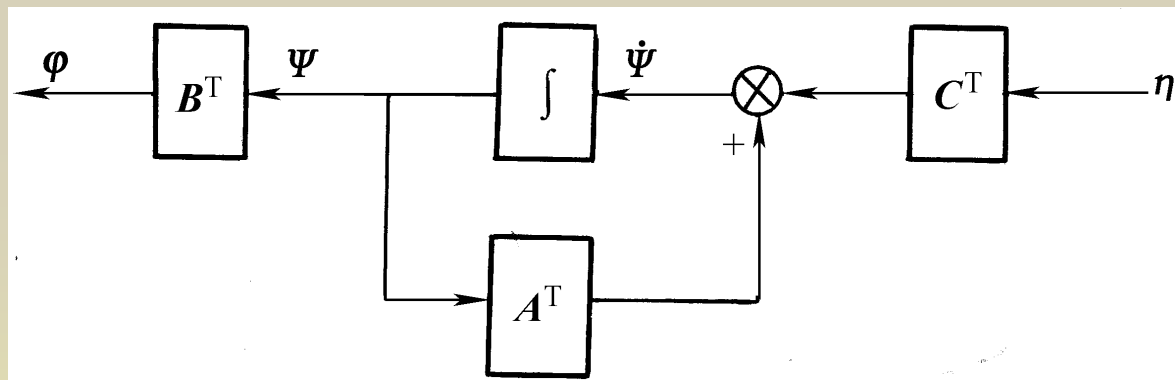
线性定常系统方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \right\} \quad (34)$$



构造一个系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= A^T \psi + C^T \eta \\ \varphi &= B^T \psi \end{aligned} \right\} \quad (35)$$



系统 (34) 和 (35) 互为对偶系统。

(式 (35) 的系数矩阵为 A^T , 输入矩阵为 C^T , 输出矩阵为 B^T)

对偶系统具有两个基本特征

1. 对偶的两个系统传递函数矩阵互为转置

$$\mathbf{G}_1(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{G}_2(s) = \mathbf{B}^T [s\mathbf{I} - \mathbf{A}^T]^{-1} \mathbf{C}^T = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}]^T = \mathbf{G}_1^T(s)$$

2. 对偶的两个系统特征值相同

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}^T]$$

对偶原理： 系统（34）的能控性等价于系统（35）的能观测性；
系统（34）的能观测性等价于系统（35）的能控性。

$$\mathbf{Q}_{C2} = \mathbf{Q}_{O1}^T$$

$$\mathbf{Q}_{O2} = \mathbf{Q}_{C1}^T$$

例3-15 线性定常系统如下，判断其能观测性。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} = [0 \quad 0 \quad 1]\mathbf{x}$$

解 以上系统的对偶系统为

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi} + \mathbf{C}^T \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\psi} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \quad \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{B}^T \boldsymbol{\psi} = [1 \quad 0 \quad 0]\boldsymbol{\psi}$$

该对偶系统的能控性矩阵

$$\mathbf{Q}_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{rank } \mathbf{Q}_C = 3$$

对偶系统能控，根据对偶原理，原系统能观测。

有了对偶原理，一个系统的能控性问题可以通过它的对偶系统的能观测性问题的解决而解决；而系统的能观测性问题可以通过它的对偶系统的能控性问题的解决而解决。这在控制理论的研究上有重要意义。



3.6 能控标准形和能观测标准形

3.6.1 能控标准形

线性定常系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + du \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

设 $\mathbf{A}$ 的特征多项式

$$\det[\lambda I - \mathbf{A}] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

能控性矩阵

$$\mathbf{Q}_C = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]$$

定理3-22 系统 (36) 能控，通过线性变换可以将其变成如下形式的能控标准形。

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}] \bar{\mathbf{x}} + du \end{aligned} \quad (37)$$

推论：具有能控标准形的系统一定能控。

（证明参见教材**104**页）

例3-16 已知能控的线性定常系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x}$$

解

（1）能控性矩阵

$$\mathbf{Q}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{rank } \mathbf{Q}_c = 3 \quad \text{系统能控}$$

（2） $\mathbf{A}$ 的特征多项式 $\det[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}] = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 1$

(3) 计算变换矩阵 $\mathbf{P}$

$$[\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_3] = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_3]^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(4) 计算 $\overline{\mathbf{C}}$

$$\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(5) 能控标准形

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}$$

3.6.2 能观测标准形

系统 (36) 的能观测性矩阵为 $Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$

$\text{rank } Q_o = n$ 则系统能观测

定理3-23 系统 (36) 能观测，通过线性变换可以将其变成如下形式的能观标准形。

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} u \tag{38}$$

$$y = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] \bar{x}$$

推论： 具有能观标准形的系统一定能观。

变换矩阵可取为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & & \ddots & 1 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ a_{n-1} & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{39}$$

3.7 能控性、能观性与传递函数的关系

考察**SISO**线性定常系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

其传递函数为

$$g(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{C} \cdot \text{adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] \cdot \mathbf{b}}{\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (41)$$

传递函数的分子、分母分别为

$$N(s) = \mathbf{C} \cdot \text{adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] \cdot \mathbf{b} \quad D(s) = \det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$$

可以看出，在没有零极点对消的情况下，传递函数的特征根和系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值相同。

定理3-24 SISO系统 (40) 能控又能观的充分必要条件是 $g(s)$ 不存在零、极点对消。

例3-17 线性定常系统方程如下，求系统传递函数，并且判断系统能控性与能观性。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 1] \mathbf{x}$$

解 传递函数为

$$g(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{C} \cdot \text{adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] \cdot \mathbf{b}}{\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]} = \frac{s-2}{(s+1)(s-2)} = \frac{1}{s+1}$$

能控性 $\mathbf{Q}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{rank } \mathbf{Q}_c = 2 = n$

能观性 $\mathbf{Q}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{rank } \mathbf{Q}_o = 1 < n$

可见，系统传递函数有零、极点对消，能控但不能观。

应当指出，定理3-24对MIMO系统不适用。举例说明如下。

例3-19 MIMO线性定常系统方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

传递函数矩阵 $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} = \frac{s-1}{(s-1)^2(s-4)} \begin{bmatrix} 2 & s-4 \\ s-4 & 0 \end{bmatrix}$

能控性

$$\text{rank } \mathbf{Q}_C = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3 = n$$

能观性

$$\text{rank } \mathbf{Q}_O = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 = n$$

可见，传递函数矩阵虽然有零极点对消，但是系统既能控又能观。这是因为极点(s-1)还剩一个，并未消失，只是降低系统重极点的重数。

MIMO线性定常系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

定理3-25 若系统 (42) 的状态向量和输入向量之间的传递函数矩阵 $\mathbf{G}_{xu}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}$ 的各行线性无关, 则系统能控。

定理3-26 若系统 (42) 的输出向量和状态向量之间的传递函数矩阵 $\mathbf{G}_{yx}(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ 的各列线性无关, 则系统能观。

3.8 系统的结构分解

一个不能控、不能观测的系统，从结构上来说，必定包括能控、不能控以及能观测、不能观测的子系统。如何按照能控性或能观测性进行分解呢？

我们知道，线性变换不改变系统的能控性和能观测性。因此，可采用线性变换方法将其分解。这里必须解决**3**个问题：

- 1、如何分解？
- 2、分解后系统方程的形式为何？
- 3、变换矩阵如何确定？

下面介绍结构分解问题。

线性定常系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

3.8.1 按能控性分解

定理3-27 若系统 (43) 不能控，且状态 $\mathbf{x}$ 有 n_1 个状态分量能控，则存在线性变换 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{B}_C \mathbf{x}$ 使其变换成下面形式

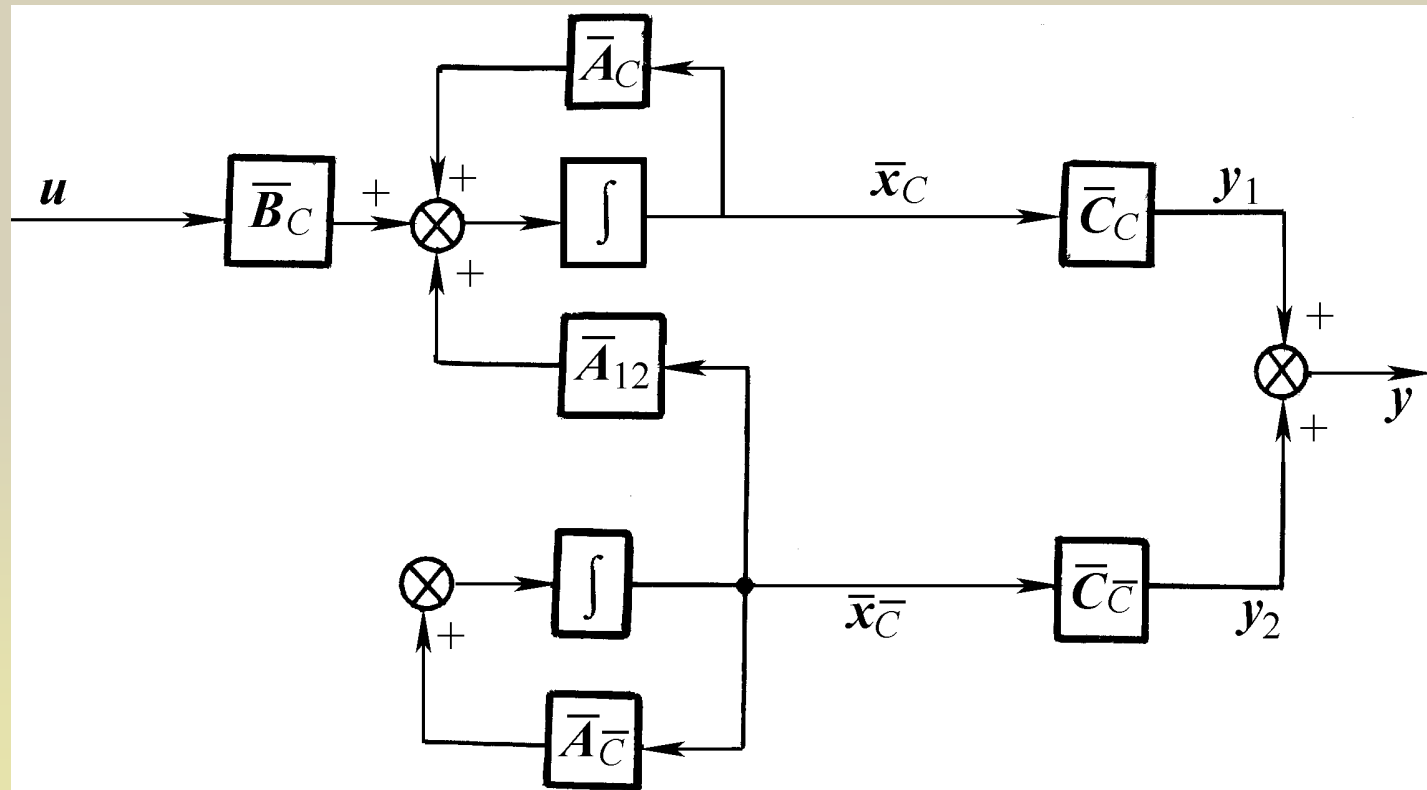
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_c \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_c & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_c \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_c \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y_1 &= [\bar{\mathbf{C}}_c \quad \bar{\mathbf{C}}_{\bar{c}}] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_c \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (44)$$

并且 n_1 维子系统为 $\dot{\bar{\mathbf{x}}}_C = \bar{\mathbf{A}}_C \bar{\mathbf{x}}_C + \bar{\mathbf{A}}_{12} \bar{\mathbf{x}}_{\bar{C}} + \bar{\mathbf{B}}_C u$ (45)

$$y_1 = \bar{\mathbf{C}}_C \bar{\mathbf{x}}_C$$

系统的传递函数矩阵

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} = \bar{\mathbf{C}}[s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}]^{-1} \bar{\mathbf{B}} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_C & \bar{\mathbf{C}}_{\bar{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_C & -\bar{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{\bar{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_C \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{C}}_C [s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_C]^{-1} \bar{\mathbf{B}}_C \end{aligned} \quad (46)$$



变换矩阵 P_C 的确定方法：因为 $\text{rank } Q_C = \text{rank}[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots] = n_1 < n$

即矩阵 Q_C 中有 n_1 个线性无关的列向量，再补充 $(n - n_1)$ 个列向量，从而构成非奇异的矩阵 P_C

例3-20 系统方程如下，要求按能控性进行结构分解。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

解 $\text{rank } \mathbf{Q}_C = \text{rank}[\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b}] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 1 < n = 2$ 系统不能控

由于 $\mathbf{Q}_C$ 的秩为1。说明 $\mathbf{Q}_C$ 中线性独立的列向量只有一列。

选择 $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，再补充一个列向量，且与其线性无关， $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{P}_C = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{P}_C \mathbf{A} \mathbf{P}_C^{-1} \qquad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{P}_C \mathbf{B} \qquad \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{P}_C^{-1}$$

经过线性变换后 $\begin{bmatrix} \dot{\overline{\mathbf{x}}}_C \\ \dot{\overline{\mathbf{x}}}_{\overline{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}_C \\ \overline{\mathbf{x}}_{\overline{C}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}_C \\ \overline{\mathbf{x}}_{\overline{C}} \end{bmatrix}$

3.8.2 按能观性分解

定理3-28 若系统 (43) 不能观, 且状态 $\mathbf{x}$ 有 n_2 个状态分量能观, 则存在线性变换 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_o$ 使其变换成下面形式

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_o \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{o}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_o & 0 \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_o \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_o \\ \bar{\mathbf{B}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} u$$
$$y = [\bar{\mathbf{C}}_o \quad 0] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_o \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \quad (47)$$

并且 n_2 维子系统

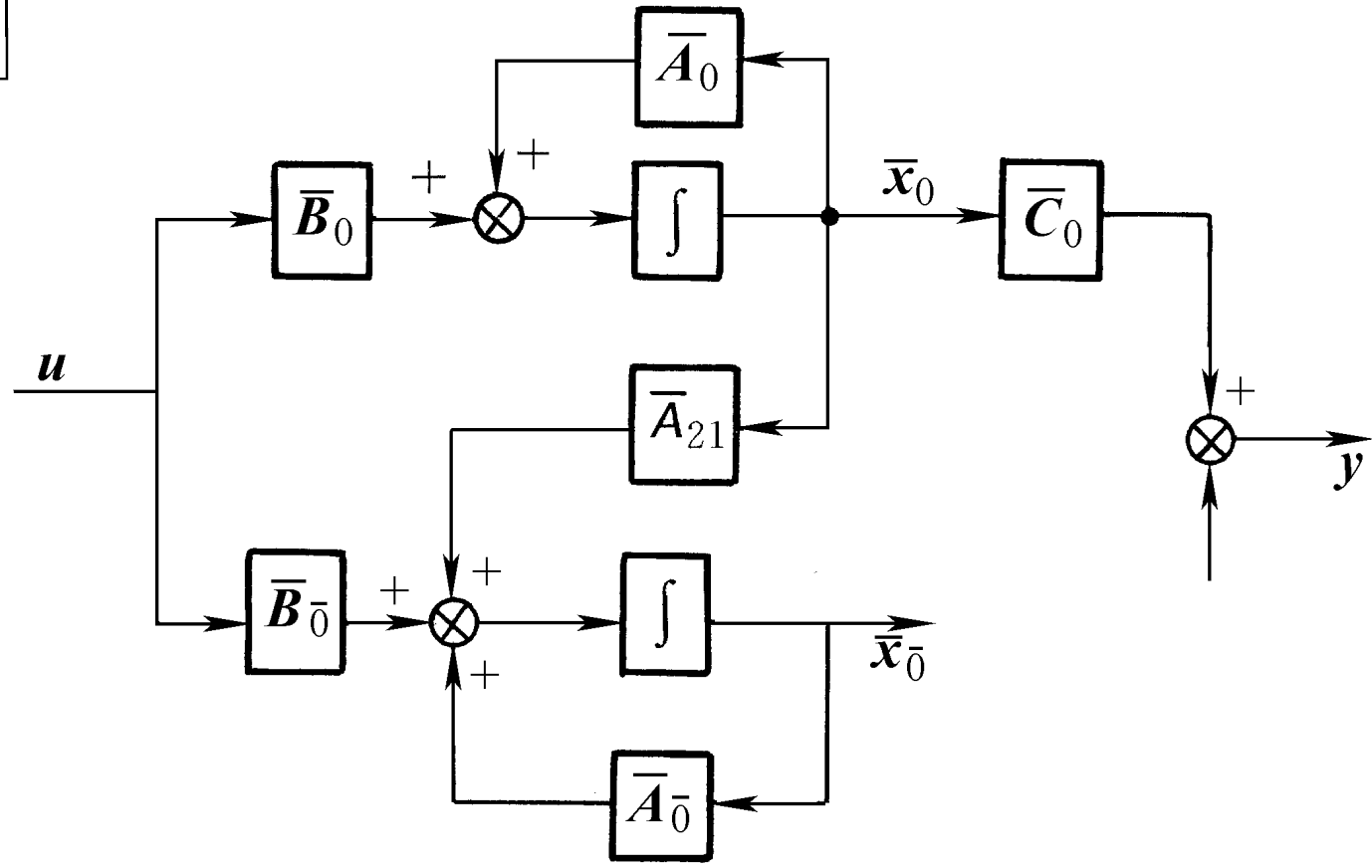
$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_o &= \bar{\mathbf{A}}_o \bar{\mathbf{x}}_o + \bar{\mathbf{B}}_o u \\ y &= \bar{\mathbf{C}}_o \bar{\mathbf{x}}_o \end{aligned} \quad (48)$$

系统传递函数为

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \bar{\mathbf{C}}_o (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_o)^{-1} \bar{\mathbf{B}}_o \quad (49)$$

能观性矩阵 Q_o 中有 n_2 个线性无关的行向量，在它们的基础上，再补充 $(n - n_2)$ 个行向量，构成变换矩阵。

$$\text{rank } Q_o = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n_2 < n$$



例3-21 系统方程如下，要求按能观性进行结构分解。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

解

$$\text{rank } \mathbf{Q}_o = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} = 2 < n = 3$$

从 $\mathbf{Q}_o$ 中任选两个行向量，例如 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，再补充一个与之线性无关的行向量。

$$\mathbf{P}_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}_o^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \overline{\mathbf{A}} &= \mathbf{P}_o \mathbf{A} \mathbf{P}_o^{-1} \\ \overline{\mathbf{B}} &= \mathbf{P}_o \mathbf{B} \qquad \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{P}_o^{-1} \end{aligned}$$

线性变换后

$$\begin{bmatrix} \dot{\overline{\mathbf{x}}}_o \\ \dot{\overline{\mathbf{x}}_{\overline{o}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}_o \\ \overline{\mathbf{x}}_{\overline{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \quad 0}^{\overline{\mathbf{C}}_o} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}_o \\ \overline{\mathbf{x}}_{\overline{o}} \end{bmatrix}$$

3.8.3 同时按能控性和能观性进行结构分解

定理3-29 若系统（43）不能控，不能观，且存在线性变换

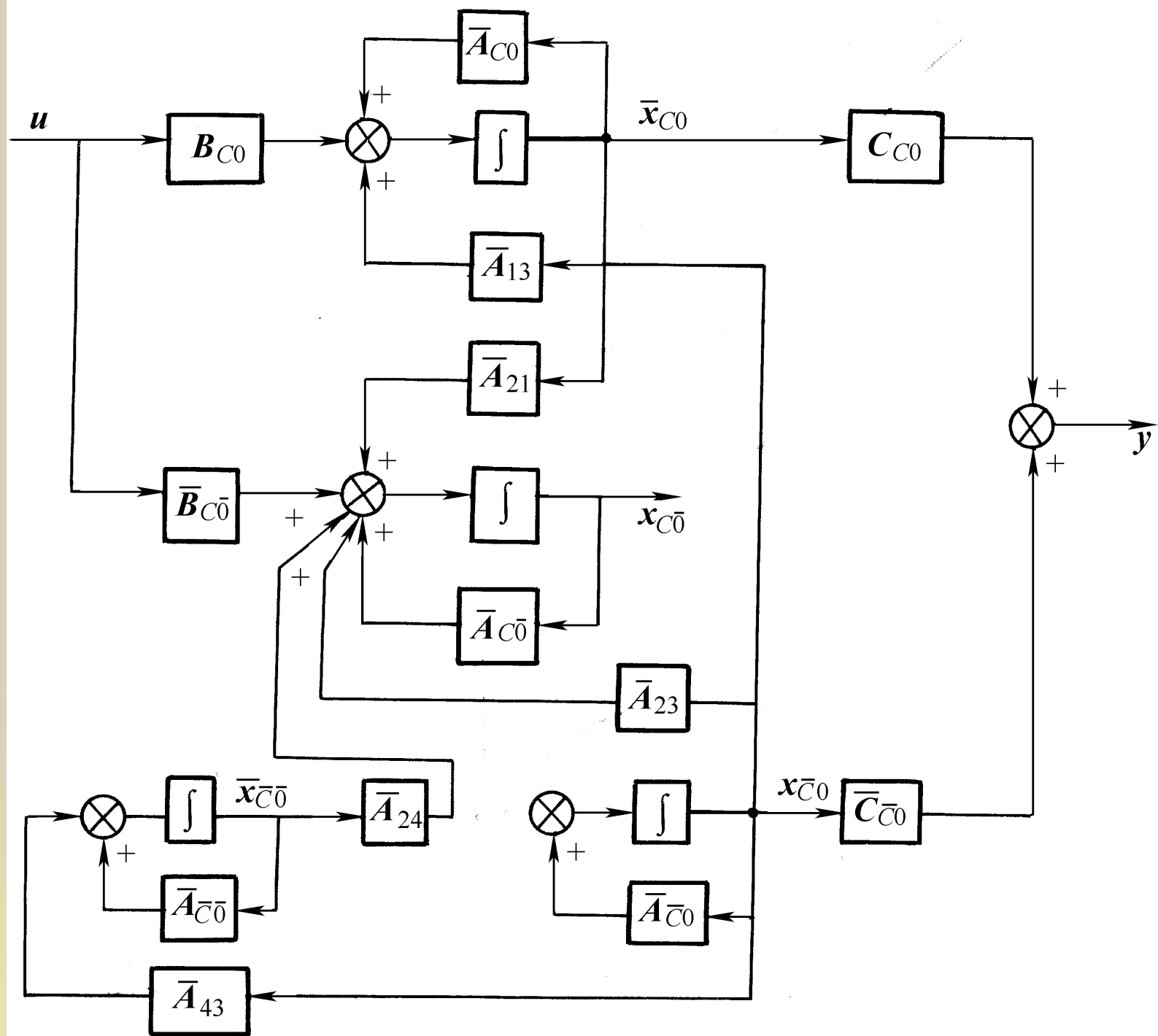
$\bar{x} = P x$ ，使其变换成下面形式

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{co} \\ \dot{\bar{x}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}o} \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{co} & 0 & \bar{A}_{13} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{c\bar{o}} & \bar{A}_{23} & \bar{A}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{43} & \bar{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{co} \\ \bar{x}_{c\bar{o}} \\ \bar{x}_{\bar{c}o} \\ \bar{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{co} \\ \bar{B}_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{50}$$

$$y = \begin{bmatrix} \bar{C}_{co} & 0 & \bar{C}_{\bar{c}o} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{co} \\ \bar{x}_{c\bar{o}} \\ \bar{x}_{\bar{c}o} \\ \bar{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

系统传递函数矩阵

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B = \bar{C}_{co} (sI - \bar{A}_{co})^{-1} \bar{B}_{co} \tag{51}$$



3.9 实现问题

在基于状态空间方法分析和设计控制系统时，要知道系统的状态空间表达式。然而在有的情况下，只知道系统的传递函数（矩阵），这时就要将给定的传递函数（矩阵）描述变成与之输入输出特性等价的状态空间表达式描述。这个问题称为系统实现问题。这里只讨论SISO系统的实现问题。

如果给定一个传递函数 $g(s)$ ，求得一个系统方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

或者

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + du \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

注：当传递函数分子的阶次小于分母的阶次时，有（52）式形式；当传递函数分子的阶次等于分母的阶次时，有（53）式形式。

3.9.1 能控标准形实现

系统传递函数为
$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

1. $g(s)$ 不含零点

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \tag{54}$$

即：
$$s^n y(s) + a_{n-1}s^{n-1}y(s) + \cdots + a_1sy(s) + a_0y(s) = \beta_0u(s)$$

进行拉普拉斯反变换
$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = \beta_0u$$

选择系统的状态变量

$$\begin{aligned} x_1 &= y / \beta_0 \\ x_2 &= \dot{y} / \beta_0 \\ &\dots \\ x_n &= y^{(n-1)} / \beta_0 \end{aligned}$$

于是有 $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_3$, $\dots$, $\dot{x}_{n-1} = x_n$,

$$\dot{x}_n = -(a_0x_1 + a_1x_2 + \dots + a_{n-1}x_n) + u$$

$$y = \beta_0 x_1$$

写成矩阵形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

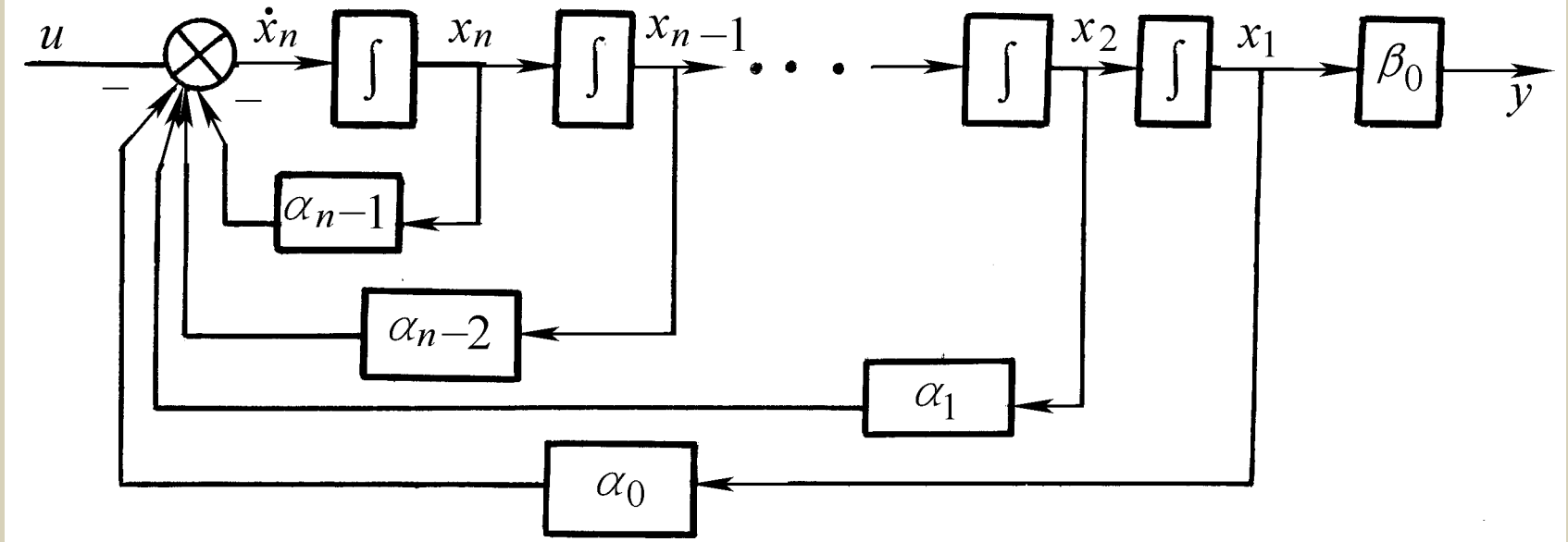
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [\beta_0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$



2. $g(s)$ 含零点 $g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$

$$g(s) = \beta_0 \frac{1}{D(s)} + \beta_1 s \frac{1}{D(s)} + \cdots + \beta_{n-1} s^{n-1} \frac{1}{D(s)}$$

$$y(s) = \beta_0 x_1(s) + \beta_1 s x_1(s) + \cdots + \beta_{n-1} s^{n-1} x_1(s)$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \cdots, \quad \dot{x}_{n-1} = x_n, \quad \dot{x}_n = -(a_0 x_1 + a_1 x_2 + \cdots + a_{n-1} x_n) + u$$

$$y = \beta_0 x_1 + \beta_1 x_2 + \cdots + \beta_{n-1} x_n$$

写成矩阵形式 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$

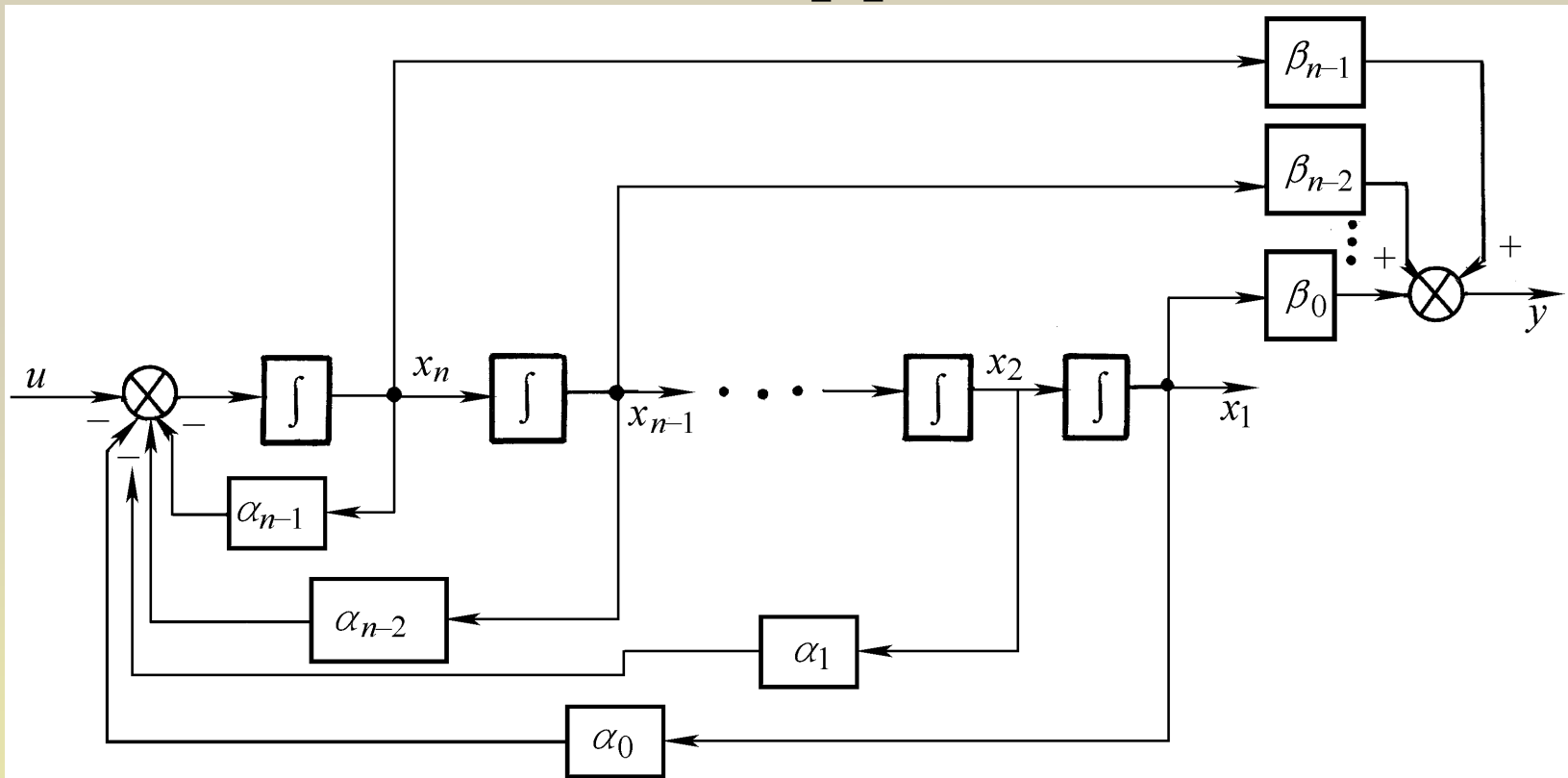
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]$$



3.9.2 能观标准形实现

系统传递函数为
$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

$$\begin{aligned} & s^n y(s) + a_{n-1}s^{n-1}y(s) + \cdots + a_1sy(s) + a_0y(s) \\ &= \beta_{n-1}s^{n-1}u(s) + \cdots + \beta_1su(s) + \beta_0u(s) \end{aligned}$$

如果令

$$x_n = y$$

$$x_{n-1} = \dot{y} + a_{n-1}y - \beta_{n-1}u$$

$$x_{n-2} = \ddot{y} + a_{n-1}\dot{y} - \beta_{n-1}\dot{u} + a_{n-2}y - \beta_{n-2}u$$

$$\vdots$$

$$x_1 = y^{(n-1)} + a_{n-1}y^{(n-2)} - \beta_{n-1}u^{(n-2)} + \cdots + a_1y - \beta_1u$$

于是

$$\dot{x}_1 = -a_0 x_n + \beta_0 u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - a_1 x_n + \beta_1 u$$

$$\dot{x}_3 = x_2 - a_2 x_n + \beta_2 u$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_{n-2} - a_{n-2} x_n + \beta_{n-2} u$$

$$\dot{x}_n = x_{n-1} - a_{n-1} x_n + \beta_{n-1} u$$

写成矩阵形式

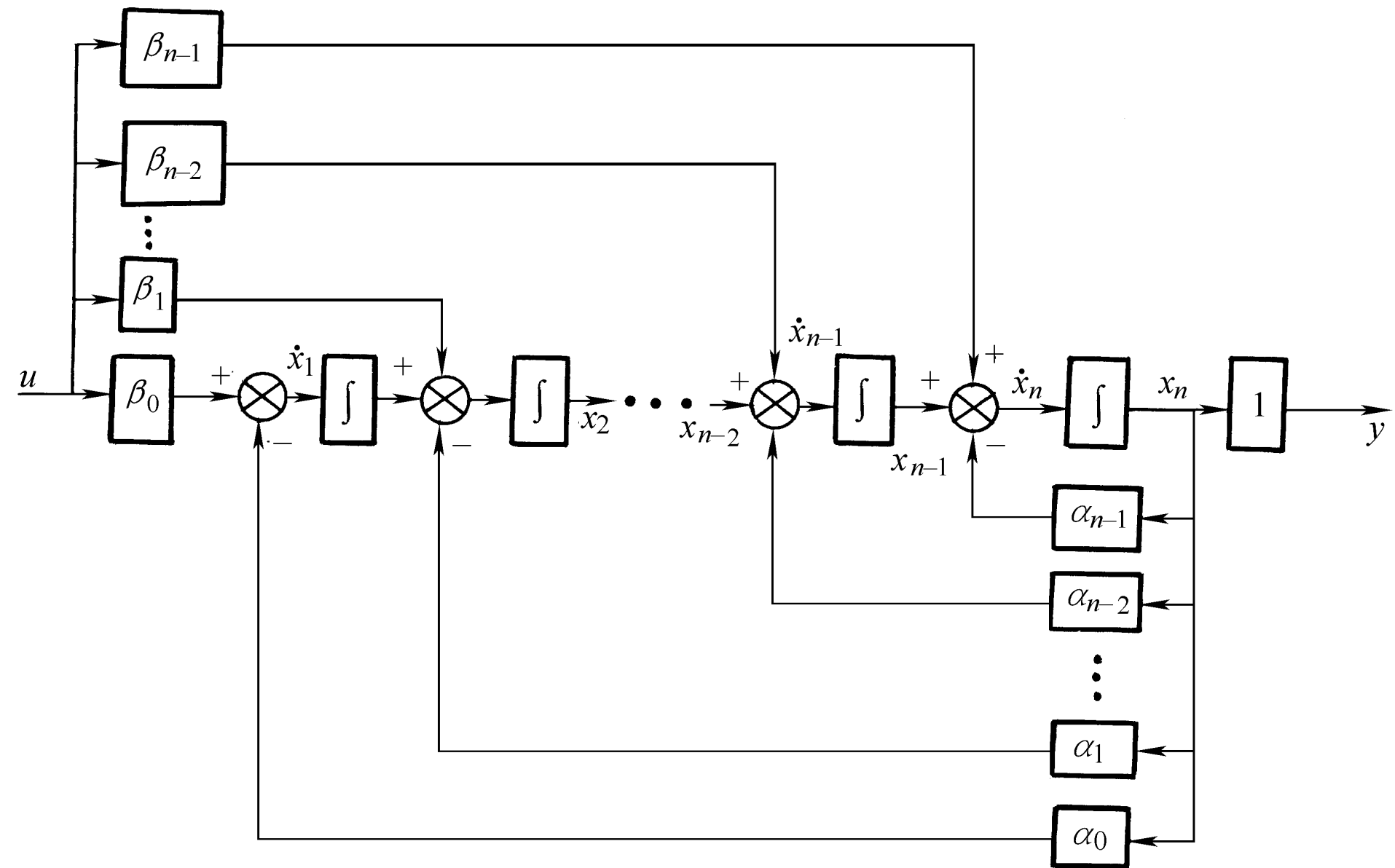
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & -a_2 \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$



3.9.3 并联形实现

为简单起见，以两阶系统传递函数为例，进行介绍。

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{N(s)}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

1) 传递函数极点互异

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{N(s)}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{c_1}{s-s_1} + \frac{c_2}{s-s_2}$$

$$y(s) = \frac{c_1}{s-s_1} u(s) + \frac{c_2}{s-s_2} u(s)$$

选取

$$x_1(s) = \frac{1}{s-s_1} u(s) \quad x_2(s) = \frac{1}{s-s_2} u(s)$$

有

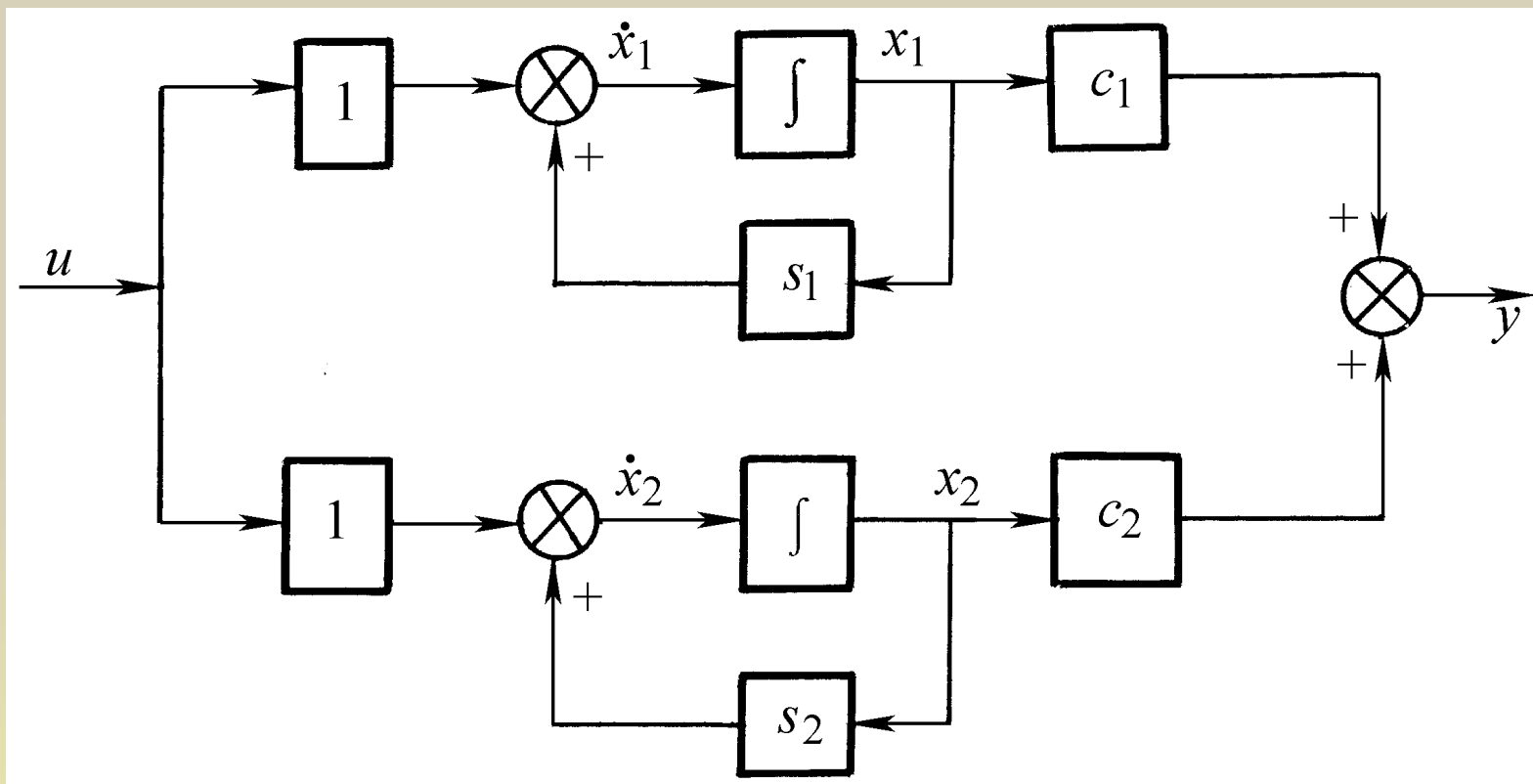
$$sx_1(s) = s_1 x_1(s) + u(s) \quad sx_2(s) = s_2 x_2(s) + u(s)$$

$$y(s) = c_1 x_1(s) + c_2 x_2(s)$$

则 $\dot{x}_1 = s_1 x_1 + u$ $\dot{x}_2 = s_2 x_2 + u$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



2) 传递函数有重极点

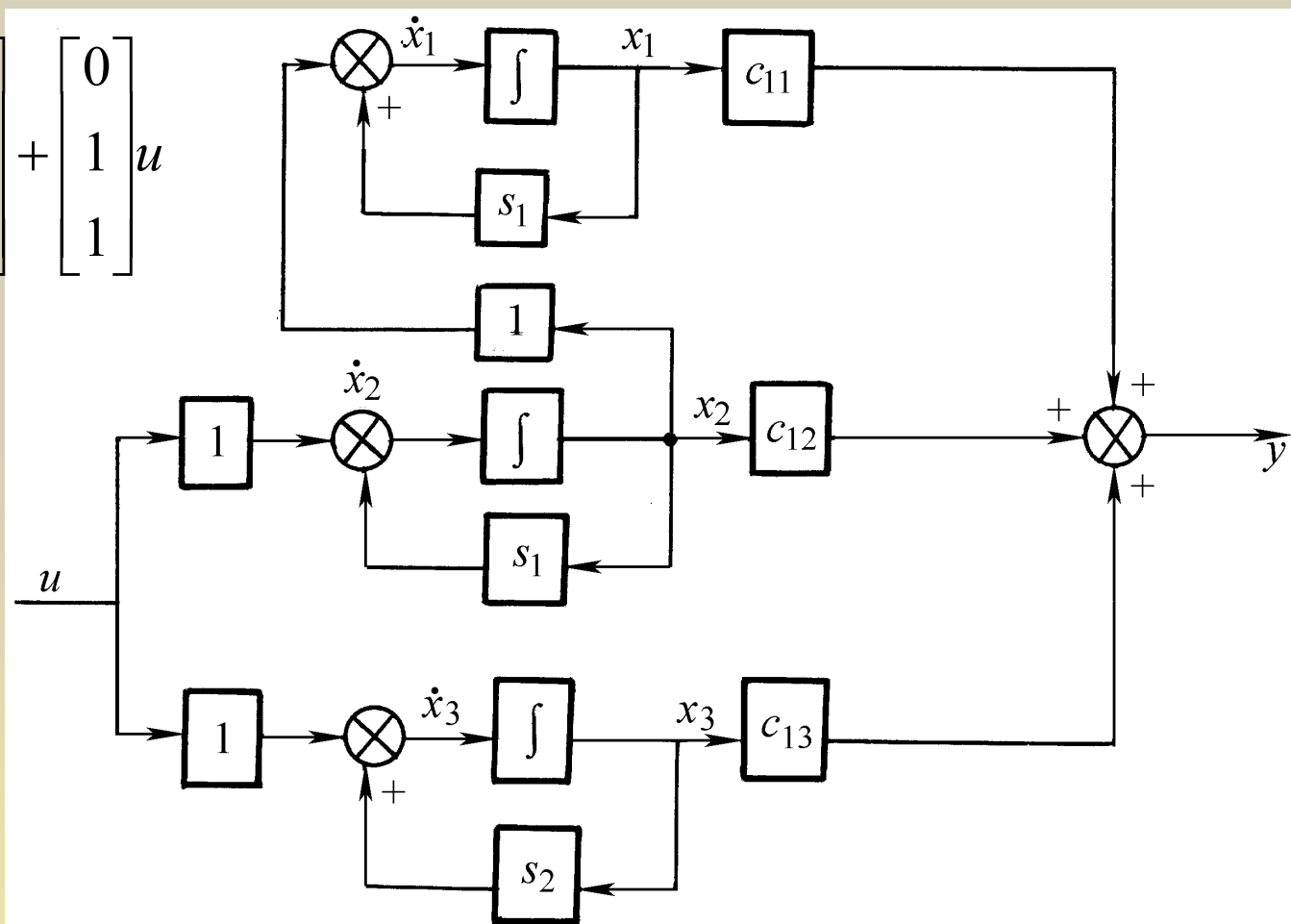
$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{N(s)}{(s-s_1)^2(s-s_3)} = \frac{c_{11}}{(s-s_1)^2} + \frac{c_{12}}{(s-s_1)} + \frac{c_3}{(s-s_3)}$$

$$y(s) = \frac{c_{11}}{(s-s_1)^2} u(s) + \frac{c_{12}}{(s-s_1)} u(s) + \frac{c_3}{(s-s_3)} u(s)$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 1 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

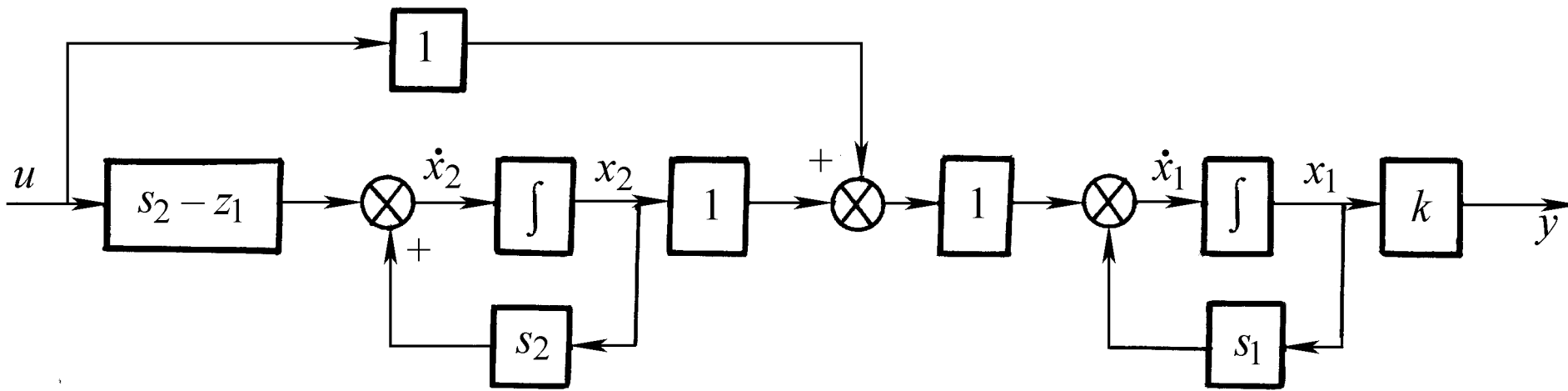
$$y = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



3.9.4 串联形实现

设
$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k(s - z_1)}{(s - s_1)(s - s_2)} = k \frac{1}{s - s_1} \left(1 + \frac{s_2 - z_1}{s - s_2} \right)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 1 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ s_2 - z_1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



3.9.5 最小实现

在所有可能的实现中，维数最小的实现称为最小实现。最小实现也不是惟一的。

定理3-30 系统方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (55)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

为传递函数 $g(s)$ 的一个最小实现的充分必要条件是系统 (55) 能控且能观测。

3.10 MATLAB的应用

3.10.1 判断线性系统的能控性和能观测性

用**MATLAB**可以很方便地求出线性控制系统的能控性矩阵和能观测性矩阵，并且求出它们的秩。从而判断系统的能控性和能观测性。函数**ctrb()**和**obsv()**分别计算系统的能控性矩阵和能观测性矩阵。格式为：**Qc=ctrb(A , B)**, **Qo=obsv(A , C)**。

例 3-23 判断下面的线性系统是否能控？是否能观测？

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

解 先分别计算系统的能控性矩阵和能观测性矩阵。然后，再用**rank()**函数计算这两个矩阵的秩。

输入以下语句

```
A=[1 0 -1;-1 -2 0;3 0 1]; B=[1 0;2 1;0 2]; C=[1 0 0;0 -1 0];  
Qc=ctrb(A,B)  
Qo=obsv(A,C)  
Rc=rank(Qc)  
Ro=rank(Qo)
```

这些语句的执行结果为

```
Qc =  
  
     1     0     1    -2    -2    -4  
     2     1    -5    -2     9     6  
     0     2     3     2     6    -4
```

```
Qo =  
  
     1     0     0  
     0    -1     0  
     1     0    -1  
     1     2     0  
    -2     0    -2  
    -1    -4    -1
```

```
Rc =  
  
     3
```

```
Ro =  
  
     3
```

从计算结果可以看出，系统能控性矩阵和能观测性矩阵的秩都是3，为满秩，因此该系统是能控的，也是能观测的。

注：当系统的模型用 $\text{sys}=\text{ss}(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})$ 输入以后，也就是当系统模型用状态空间的形式表示时，我们也可以用 $\mathbf{Qc}=\text{ctrb}(\text{sys})$ ， $\mathbf{Qo}=\text{obsv}(\text{sys})$ 的形式求出该系统的能控性矩阵和能观测性矩阵。

3.10.2 线性系统按能控性或者能观测性分解

在用**MATLAB**进行结构分解时，不能控（不能观）的系统，其结构分解的系统方程形式与本章**3.8**节不同。

当系统能控性矩阵的秩 $\text{rank}(\mathbf{Q}_c) < n$ 时，我们可以使用函数命令 **ctrbf()** 可以对线性系统进行能控性分解。其调用格式为

$[\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}, \mathbf{T}, \mathbf{K}] = \text{ctrbf}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 。其中， $\mathbf{T}$ 为相似变换矩阵。

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{\bar{\mathbf{C}}} & 0 \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_c \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{B}}_c \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{C}} = [\bar{\mathbf{C}}_{\bar{\mathbf{C}}} \quad \bar{\mathbf{C}}_c]$$

输出为一个向量，**sum(K)** 可以求出能控的状态分量的个数。

类似地，当系统能观测性矩阵的秩 $\text{rank}(\mathbf{Q}_o) < n$ 时，我们可以使用函数命令 **obsvf()** 可以对线性系统进行能观测性分解。其调用格式为 $[\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}, \mathbf{T}, \mathbf{K}] = \text{obsvf}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 。其中， $\mathbf{T}$ 为相似变换矩阵。

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{\bar{o}} & \bar{\mathbf{A}}_{l2} \\ 0 & \bar{\mathbf{A}}_o \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{\bar{o}} \\ \bar{\mathbf{B}}_o \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{C}} = [0 \quad \bar{\mathbf{C}}_o]$$

输出为一个向量，**sum(K)**可以求出能观测的状态分量的个数。

例3-24 系统方程为 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$ 其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
 $y = \mathbf{C}\mathbf{x}$ $\mathbf{C} = [0 \quad 0 \quad 1]$ 试按能控性进行结构分解。

解 输入下列语句

```
A=[0 0 -6;1 0 -11;0 1 -6]; B=[3;1;0]; C=[0 0 1];  
[Abar,Bbar,Cbar,T,K]=ctrbf(A,B,C)
```

语句执行结果为

Abar =

-3.0000	-0.0000	0.0000
-9.4868	-3.3000	0.9539
-8.6189	-3.1344	0.3000

Bbar =

-0.0000
0.0000
-3.1623

Cbar =

-0.9435	-0.3315	0
---------	---------	---

T =

-0.1048	0.3145	-0.9435
0.2983	-0.8950	-0.3315
-0.9487	-0.3162	0

K =

1	1	0
---	---	---

从输出的向量可以看出有两个状态分量是能控的。可以验证
 $\overline{A} = T \cdot A \cdot T^T$ ，输入语句

A1=T*A*T'

得到的结果为

A1 =

-3.0000	-0.0000	0.0000
-9.4868	-3.3000	0.9539
-8.6189	-3.1344	0.3000

可见，**A1=Abar**，所得到的结果是正确的。

3.10.3 线性系统转换成能控标准形和能观标准形

下面通过两个例子来说明将系统变换成能控标准形和能观标准形的方法。

例3-25 系统方程为 $\dot{x} = Ax + Bu$ 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
 $y = Cx$ $C = [1 \ 0 \ 1]$ 求线性变换，将其变换成能控标准形。

解 1) 判断系统是否能控，并且求出A阵的特征多项式

输入下面语句

```
A=[1 2 -1;0 2 1;1 -3 2]; B=[0;1;1]; C=[1 0 1];
Qc=ctrb(A,B)
syms s; det(s*eye(3)-A)
if rank(Qc)==3
    disp('The system is controllable')
else
    disp('The system is uncontrollable')
end
```

运行结果为

```
Qc =  
  
     0     1     8  
     1     3     5  
     1    -1   -10
```

```
ans =  
  
s^3-5*s^2+12*s-11  
  
The system is controllable
```

表明系统为能控，因此可以变换成能控标准形。而且求出 A 的特征多项式为

$$\det[\lambda I - A] = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 12\lambda - 11$$

(即: $a_0 = -11$, $a_1 = 12$, $a_2 = -5$)

2) 计算变换矩阵

$$Q = Q_c \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Q_c \cdot \begin{bmatrix} 12 & -5 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P = Q^{-1}$$

输入以下语句

```
Q=Qc*[12 -5 1;-5 1 0;1 0 0], P=inv(Q)
```

计算结果为

Q =

3	1	0
2	-2	1
7	-6	1

P =

0.2353	-0.0588	0.0588
0.2941	0.1765	-0.1765
0.1176	1.4706	-0.4706

3) 计算出能控标准形

输入以下语句

```
Ab=P*A*Q, Bb=P*B, Cb=C*Q
```

计算结果为

Ab =

0	1.0000	0.0000
0	0	1.0000
11.0000	-12.0000	5.0000

Bb =

0
0.0000
1.0000

Cb =

10	-5	1
----	----	---

表明经过变换以后的系统方程为

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 11 & -12 & 5 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [10 \quad -5 \quad 1] \bar{x}$$

例3-26 系统方程为 $\dot{x} = Ax + Bu$ 其中 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$
 $y = Cx$ $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 求线性变换，将其变换成能观标准形。

解 1) 判断系统是否为能观测，并且求出A阵的特征多项式

输入下面语句

```
A=[3 0 1;5 2 3;1 0 1]; B=[1;0;2]; C=[2 1 1];
Qo=obsv(A,C)
syms s; det(s*eye(3)-A)
if rank(Qo)==3
    disp('The system is observable')
else
    disp('The system is not observable')
end
```

运行结果为

```
Qo =

     2     1     1
    12     2     6
    52     4    24
```

```
ans =

s^3-6*s^2+10*s-4

The system is observable
```

表明系统为能观测，因此可以变换成能观标准形。而且求出的特征多项式为

$\det[\lambda I - A] = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 10\lambda - 4$ (即: $a_0 = -4$, $a_1 = 10$, $a_2 = -6$)

2) 计算变换矩阵

$$P = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot Q_o = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot Q_o$$

输入以下语句

```
P=[10 -6 1;-6 1 0;1 0 0]*Qo, Q=inv(P)
```

计算结果为

P =

0	2	-2
0	-4	0
2	1	1

Q =

0.2500	0.2500	0.5000
0	-0.2500	0
-0.5000	-0.2500	0

3) 计算出能观标准形

输入以下语句

```
Ab=P*A*Q, Bb=P*B, Cb=C*Q
```

计算结果为

Ab =

```
0    0    4
1    0   -10
0    1    6
```

Bb =

```
-4
0
4
```

Cb =

```
0    0    1
```

表明经过变换以后的系统方程为

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} u \quad y = [0 \quad 0 \quad 1] \bar{\mathbf{x}}$$

第3章 结束

