

第2章 线性控制系统的运动分析

本章是通过求解系统方程的解来研究系统性能的。由于系统的状态方程是矩阵微分方程，而输出方程是矩阵代数方程。因此，只要求出状态方程的解，就很容易得到系统的输出，进而研究系统的性能。

本章内容为

- 1 线性定常系统齐次状态方程的解
- 2 状态转移矩阵
- 3 线性定常系统非齐次状态方程的解
- 4 线性时变系统的运动分析
- 5 线性系统的脉冲响应矩阵

6 线性连续系统方程的离散化

7 线性离散系统的运动分析

8 用**MATLAB**求解系统方程



2.1 线性定常系统齐次状态方程的解

线性定常系统齐次状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (1)$$

这时系统的输入为零

先考察标量齐次微分方程的幂级数解法

$$\dot{x} = ax \quad (2)$$

假设其解为一幂级数

$$x = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \cdots + b_k t^k + \cdots \quad (3)$$

将(3)式代入(2)式

$$\begin{aligned} & b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \cdots + kb_k t^{k-1} + \cdots \\ & = a(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots) \end{aligned}$$

等式两边 t 的同次幂的系数相等，因此有

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= ab_0 \\ b_2 &= \frac{1}{2}ab_1 = \frac{1}{2!}a^2b_0 \\ &\vdots \\ b_k &= \frac{1}{k}ab_k = \frac{1}{k!}a^kb_0 \end{aligned} \right\} \quad \text{而} \quad b_0 = x(0)$$

则解为 $x(t) = (1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}a^kt^k + \cdots)x(0) = e^{at}x(0) \quad (4)$

因为 $e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}a^kt^k + \cdots$

模仿标量齐次微分方程的解法，假设线性定常系统齐次状态方程（1）的解为

$$\mathbf{x} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1t + \mathbf{b}_2t^2 + \mathbf{b}_3t^3 + \cdots + \mathbf{b}_kt^k + \cdots \quad (5)$$

将（5）式代入（1）式

$$\begin{aligned} & \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 t + 3\mathbf{b}_3 t^2 + \cdots + k\mathbf{b}_k t^{k-1} + \cdots \\ &= A(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \cdots + \mathbf{b}_k t^k + \cdots) \end{aligned}$$

等式两边 t 同次幂的系数相等，因此有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= A\mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_2 &= \frac{1}{2} A\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2!} A^2 \mathbf{b}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{b}_k &= \frac{1}{k} A\mathbf{b}_k = \frac{1}{k!} A^k \mathbf{b}_0 \end{aligned} \right\} \quad \text{而} \quad \mathbf{b}_0 = \mathbf{x}(0)$$

则线性定常系统齐次状态方程 (1) 的解为

$$\mathbf{x}(t) = (1 + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \cdots) \mathbf{x}(0) \quad (6)$$

记作

$$e^{At} = 1 + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \cdots$$

$$\text{则} \quad \mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) \quad (7)$$

如果 $t_0 \neq 0$ 则 $\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0)$ (8)

将 (8) 式代入 (1) 式验证

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = A e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) = A \mathbf{x}(t)$$

和 $\mathbf{x}(t) \Big|_{t=t_0} = e^{A(t_0-t_0)} \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$

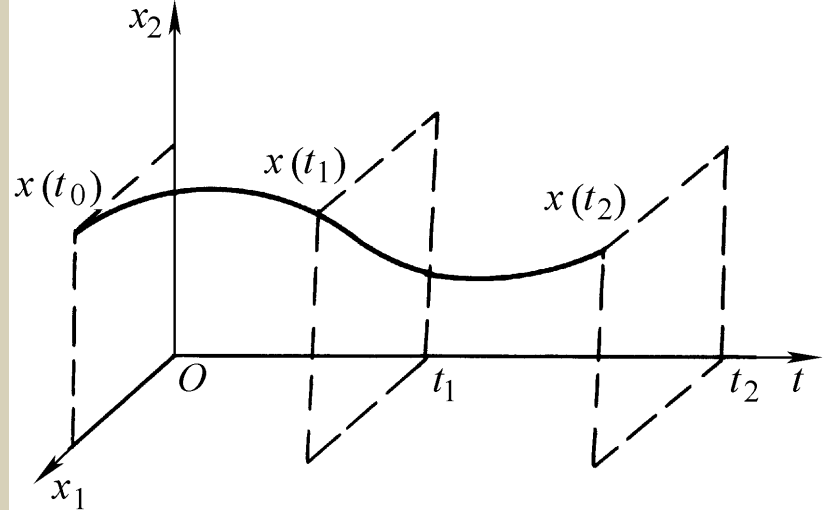
矩阵指数函数 $e^{A(t-t_0)}$ 又称为状态转移矩阵, 记作 $\phi(t-t_0)$

由于系统没有输入向量, $\mathbf{x}(t)$ 是由初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 激励的。因此, 这时的运动称为自由运动。 $\mathbf{x}(t)$ 的形态由 $e^{A(t-t_0)}$ 决定, 即是由矩阵 A 惟一决定的。

2.2 状态转移矩阵

线性定常系统齐次状态方程的解为

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) \quad \text{或} \quad \mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0)$$



其几何意义是：系统从初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 开始，随着时间的推移，由 $e^{A(t_1-t_0)}$ 转移到 $\mathbf{x}(t_1)$ ，再由 $e^{A(t_2-t_1)}$ 转移到 $\mathbf{x}(t_2)$ ，……。

$\mathbf{x}(t)$ 的形态完全由 $e^{A(t-t_0)}$ 决定。

2.2.1 状态转移矩阵的基本性质

$$1) \quad \frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A \quad \text{即} \quad \dot{\phi}(t) = A \phi(t) = \phi(t) A$$

$$2) \quad e^{A \cdot 0} = I \quad \text{即} \quad \phi(0) = I$$

3) 可逆性 $[e^{At}]^{-1} = e^{-At}$

即 $[\phi(t)]^{-1} = \phi^{-1}(t) = \phi(-t)$

4) 传递性 $e^{A(t_2-t_1)}e^{A(t_1-t_0)} = e^{A(t_2-t_0)}$

即 $\phi(t_2-t_1)\phi(t_1-t_0) = \phi(t_2-t_0)$

5) 当且仅当 $AB = BA$ 时, 有 $e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$

如果 $e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$ 时, 则

2.2.2 状态转移矩阵的求法

方法1 根据定义, 计算 $\phi(t)$

$$\phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \cdots \quad (9)$$

方法2 应用拉普拉斯变换法, 计算 $\phi(t)$

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

对上式求拉普拉斯变换, 得

$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(0) = A\mathbf{x}(s) \quad [sI - A]\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0)$$

如果 $[sI - A]$ 为非奇异 $\mathbf{x}(s) = [sI - A]^{-1} \mathbf{x}(0)$

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ [sI - A]^{-1} \mathbf{x}(0) \} = \mathcal{L}^{-1} [sI - A]^{-1} \mathbf{x}(0)$$

由微分方程解的唯一性

$$\phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1} [sI - A]^{-1} \quad (10)$$

例2-2 线性定常系统的齐次状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

求其状态转移矩阵 $\phi(t) = e^{At}$

解 $[sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

于是

$$\phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

方法3 应用凯莱-哈密顿定理, 计算 $\phi(t)$

凯莱-哈密顿定理: $n \times n$ 矩阵 A 满足自身的特征方程。

$$\Delta(\lambda) = \det[\lambda I - A] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$\text{即} \quad \lambda^n = -a_{n-1}\lambda^{n-1} - \cdots - a_2\lambda^2 - a_1\lambda - a_0$$

根据凯莱-哈密顿定理

$$\Delta(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_2A^2 + a_1A + a_0I = 0$$

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \cdots - a_2A^2 - a_1A - a_0I \quad (11)$$

例 用凯莱-哈密顿定理计算 $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}^{100}$

解 $\Delta(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -9 \\ -2 & \lambda - 6 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda = 0$

由凯-哈定理: $A^2 - 9A = 0$

$$A^2 = 9A$$
$$A^3 = 9A^2 = 9^2 A, \cdots, A^{100} = 9^{99} A$$

所以 $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}^{100} = 9^{99} \times \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

(11) 式表明: A^n 是 A^{n-1} 、 A^{n-2} 、 $\cdots$ 、 A 、 I 的线性组合

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = -a_{n-1}A^n - \cdots - a_2A^3 - a_1A^2 - a_0A \quad (12)$$

将 (11) 式代入 (12) 式, 不断地进行下去, 可以看出:

A^n 、 A^{n+1} 、 A^{n+2} 、 $\cdots$ 都是 A^{n-1} 、 A^{n-2} 、 $\cdots$ 、 A 、 I 的线性组合

$$\begin{aligned} \phi(t) = e^{At} &= 1 + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots \\ &= a_0(t)I + a_1(t)A + a_2(t)A^2 + \cdots + a_{n-1}(t)A^{n-1} \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $a_i(t)$, $i = 0, 1, \cdots, (n-1)$ 为待定系数。 $a_i(t)$ 的计算方法为:

1) A 的特征值互异

应用凯-哈定理, λ_i 和 A 都满足 A 的特征方程。因此, λ_i 也可以满足 (13) 式。

$$e^{\lambda_i t} = a_0(t) + a_1(t)\lambda_i + a_2(t)\lambda_i^2 + \cdots + a_{n-1}(t)\lambda_i^{n-1}$$

(其中, $i = 1, 2, \cdots, n$)

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} \quad (14)$$

于是

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (15)$$

例2-3 线性定常系统的齐次状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

用凯-哈定理计算其状态转移矩阵 $\phi(t)$

解 $\Delta(\lambda) = \det[\lambda I - A] = \lambda(\lambda + 3) + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -2$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

即

$$a_0(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \quad a_1(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\begin{aligned}\phi(t) &= e^{At} = a_0(t)\mathbf{I} + a_1(t)\mathbf{A} = (2e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 0 \\ 0 & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -3e^{-t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

2) A 的特征值相同, 均为 λ_1

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-3}(t) \\ a_{n-2}(t) \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & 3\lambda_1 & \cdots & \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1^2 & \cdots & \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \cdots & \lambda_1^{n-2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ (n-1)\lambda_1 \\ \vdots \\ \frac{(n-1)(n-2)}{2!} \lambda_1^{n-3} \\ \frac{(n-1)(n-2)}{2!} \lambda_1^{n-2} \\ \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\lambda_1 t} \\ \frac{1}{(n-2)!} t^{n-2} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \frac{1}{2!} t^2 e^{\lambda_1 t} \\ \frac{1}{2!} t e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} \quad (16)$$

3) A 的特征值有重特征值, 也有互异特征值时, 待定系数 $a_i(t)$ 可以根据 (16) 式和 (15) 式求得。然后代入 (13) 式, 求出状态转移矩阵 $\phi(t)$

例2-4 线性定常系统齐次状态方程为
求系统状态转移矩阵。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

解 应用凯-哈定理计算 $\phi(t)$

$$\Delta(\lambda) = \det[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}] = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = (\lambda + 1)^2 (\lambda + 2) = 0$$

A 的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = -2$$

于是

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2\lambda_1 \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} t e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} t e^{-t} \\ e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t e^{-t} \\ e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t e^{-t} + e^{-2t} \\ 3t e^{-t} - 2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ t e^{-t} - e^{-t} + e^{-2t} \end{bmatrix}$$

状态转移矩阵

$$\phi(t) = e^{At} = a_0(t)I + a_1(t)A + a_2(t)A^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 2t e^{-t} + e^{-2t} & 3t e^{-t} - 2e^{-t} + 2e^{-2t} & t e^{-t} - e^{-t} + e^{-2t} \\ -2t e^{-t} + 2e^{-t} - 2e^{-2t} & -3t e^{-t} + 5e^{-t} - 4e^{-2t} & t e^{-t} + 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ 2t e^{-t} - 4e^{-t} + 4e^{-2t} & 3t e^{-t} - 8e^{-t} + 8e^{-2t} & t e^{-t} - 3e^{-t} + 4e^{-2t} \end{bmatrix}$$

方法4 通过线性变换, 计算 $\phi(t)$

1) 矩阵 A 可以经过线性变换成为对角阵, 计算 $\phi(t)$

因为

$$PAP^{-1} = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

因为对角阵的特殊性质,
有:

$$e^{\Lambda t} = I + \Lambda t + \frac{1}{2!} \Lambda^2 t^2 + \dots = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

而

$$A = P^{-1} \Lambda P$$

因此，状态转移矩阵为

$$\begin{aligned}\phi(t) &= e^{At} = e^{P^{-1}\Lambda P t} = I + P^{-1}\Lambda P t + \frac{1}{2!} (P^{-1}\Lambda P)^2 t^2 + \dots \\ &= P^{-1}P + P^{-1}(\Lambda t)P + P^{-1}\left(\frac{1}{2!}\Lambda^2 t^2\right)P + \dots \\ &= P^{-1}\left[I + \Lambda t + \frac{1}{2!}\Lambda^2 t^2 + \dots\right]P = P^{-1}e^{\Lambda t}P\end{aligned}\quad (17)$$

例2-5 线性定常系统的齐次状态方程为 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

用线性变换方法，计算其状态转移矩阵 $\phi(t)$

解 $\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -2$

$$P = Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= P^{-1} e^{\Lambda t} P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2) 矩阵 A 可以经过线性变换成为约当形阵, 计算 $\phi(t)$

$$J = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \\ & 1 & t & \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & t & 1 \\ 0 & & & & \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t}$$

状态转移矩阵为

$$\phi(t) = e^{At} = \mathbf{P}^{-1} e^{Jt} \mathbf{P} \quad (18)$$

3) 矩阵 A 可以经过线性变换成为模态形阵, 计算 $\phi(t)$

如果矩阵 A 的特征值为共轭复数 $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$

经过线性变换, 可转换为模态矩阵 M

$$M = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \quad e^{Mt} = e^{\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}t} = e^{\begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}t} e^{\begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}t}$$

其中

$$e^{\begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}t} = \begin{bmatrix} e^{\sigma t} & 0 \\ 0 & e^{\sigma t} \end{bmatrix}$$

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}t + \frac{1}{2!}t^2 \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}^2 + \dots = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}$$

系统状态转移矩阵为

$$\phi(t) = e^{At} = P^{-1} e^{Mt} P \quad (19)$$

2.3 线性定常系统非齐次状态方程的解

线性定常系统非齐次状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (20)$$

改写为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}u(t) \quad (21)$$

(21) 式两边同乘 e^{-At} 得

$$e^{-At} [\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)] = e^{-At} \mathbf{B}u(t)$$

或写成

$$\frac{d}{dt} [e^{-At} \mathbf{x}(t)] = e^{-At} \mathbf{B}u(t) \quad (22)$$

对 (22) 式在 0 到 t 时间段上积分, 有

$$e^{-At} \mathbf{x}(t) \Big|_0^t = \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (23)$$

$$e^{-At} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0) = \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (24)$$

(24) 式两边同乘 e^{At} ，并且移项

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{At} \mathbf{x}(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \\ &= e^{At} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (25)$$

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t) \mathbf{x}(0) + \int_0^t \phi(t-\tau) \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (26)$$

更一般情况，当 $t_0 \neq 0$

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (27)$$

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t-t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t-\tau) \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (28)$$

由式（25）或式（27）可知，系统的运动 $x(t)$ 包括两个部分。一部分是输入向量为零时，初始状态引起的，即相当于自由运动。

第二部分是初始状态为零时，输入向量引起的，称为强迫运动。正是由于第二部分的存在，为系统提供这样的可能性，即通过选择适当的输入向量 $u(t)$ ，使 $x(t)$ 的形态满足期望的要求。

例2-8 线性定常系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u(t) = 1(t)$$

解 在例2-2中已经求得 $\phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$

由 (26) 式

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)\mathbf{B}u(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &+ \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

系统的输出方程为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

则
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{e}^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{C} \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{A(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) \mathrm{d} \tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (29)$$

或
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{e}^{At} \mathbf{x}(0) + \mathbf{C} \int_0^t \mathbf{e}^{A(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) \mathrm{d} \tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

可见，系统的输出 $\mathbf{y}(t)$ 由三部分组成。

当系统状态转移矩阵求出后，不同输入状态向量作用下的系统输出即可以求出，进而就可以分析系统的性能了。

2.4 线性时变系统的运动分析

线性时变系统方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

2.4.1 齐次状态方程的解

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (31)$$

初始状态为 $\mathbf{x}(t_0)$

根据我们对线性定常齐次系统解的知识，可以假设线性时变齐次系统的解应该具有以下形式，然后加以证明

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) \quad (32)$$

其中, $\boldsymbol{\phi}(t, t_0)$ 是状态转移矩阵，并且满足以下方程

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\phi}(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\phi}(t, t_0) \quad (33)$$

满足初始条件

$$\boldsymbol{\phi}(t_0, t_0) = \mathbf{I} \quad (34)$$

证明

$$\begin{aligned} & \text{(30) 式两边对 } t \text{ 求导} \\ & \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \frac{d}{dt} [\boldsymbol{\phi}(t, t_0) \mathbf{x}(t_0)] = \frac{d}{dt} \boldsymbol{\phi}(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) \\ & = A(t) \boldsymbol{\phi}(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) = A(t) \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

$$\text{并且 } t = t_0 \text{ 时 } \quad \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\phi}(t_0, t_0) \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$$

$$\text{即} \quad \boldsymbol{\phi}(t_0, t_0) = I$$

2.4.2 状态转移矩阵 $\boldsymbol{\phi}(t, t_0)$ 的基本性质

1) $\boldsymbol{\phi}(t, t_0)$ 满足自身的矩阵微分方程及初始条件, 即

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\phi}(t, t_0) = A(t) \boldsymbol{\phi}(t, t_0) \qquad \boldsymbol{\phi}(t_0, t_0) = I$$

2) 可逆性 $\boldsymbol{\phi}^{-1}(t, t_0) = \boldsymbol{\phi}(t_0, t)$

3) 传递性 $\phi(t_2, t_1)\phi(t_1, t_0) = \phi(t_2, t_0)$

4) $\frac{\partial}{\partial \tau} \phi(t, \tau) = -\phi(t, \tau)A(\tau)$

2.4.3 状态转移矩阵 $\phi(t, t_0)$ 的计算

用级数近似法计算

$$\begin{aligned} \phi(t, t_0) = & I + \int_{t_0}^t A(\tau_0) d\tau_0 + \int_{t_0}^t A(\tau_0) \int_{t_0}^{\tau_0} A(\tau_1) d\tau_1 d\tau_0 \\ & + \int_{t_0}^t A(\tau_0) \int_{t_0}^{\tau_0} A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 d\tau_0 + \cdots \end{aligned} \quad (35)$$

例2-9 线性时变系统齐次状态方程为 $\dot{x} = A(t)x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} x$
计算系统状态转移矩阵 $\phi(t, 0)$

解

将 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix}$ 代入 (35) 式

其中
$$\int_0^t A(\tau_0) d\tau_0 = \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \tau_0 \end{bmatrix} d\tau_0 = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^t A(\tau_0) \int_0^{\tau_0} A(\tau_1) d\tau_1 d\tau_0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{t^3}{6} \\ 0 & \frac{t^4}{8} \end{bmatrix}$$

$$\phi(t,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{t^3}{6} \\ 0 & \frac{t^4}{8} \end{bmatrix} + \dots = \begin{bmatrix} 1 & t + \frac{t^3}{6} + \dots \\ 0 & 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{t^4}{8} + \dots \end{bmatrix}$$

2.4.4 线性时变系统非线性齐次状态方程的解

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \quad (38)$$

$$\mathbf{x}(t)\big|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0)$$

其解为

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \boldsymbol{\phi}(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau) \mathrm{d}\tau \quad (39)$$

或

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t, t_0) \left[\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \boldsymbol{\phi}(t_0, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau) \mathrm{d}\tau \right] \quad (40)$$

证明

[将 (39) 式代入状态方程 (38) 式, 等式成立]

2.4.5 系统的输出

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\boldsymbol{\phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{C}(t)\int_{t_0}^t \boldsymbol{\phi}(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau) \mathrm{d}\tau + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (41)$$

或

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\boldsymbol{\phi}(t, t_0)\left[\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \boldsymbol{\phi}(t_0, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau) \mathrm{d}\tau\right] + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (42)$$

2.5 线性系统的脉冲响应矩阵

2.5.1 线性时变系统的脉冲响应矩阵

假设系统初始条件为零, $x(t_0) = x(0) = 0$

输入为单位脉冲函数, 即 $u(t) = e_i \delta(t - \tau)$

其中, τ 为加入单位脉冲的时刻。而 $e_i =$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

第*i* 个分量

$e_i \delta(t - \tau)$ 就表示在 $t = \tau$ 时刻, 仅在第 i 个输入端施加一个单位脉冲。系统的输出为:

$$\begin{aligned} y_i(t) &= \mathbf{C}(t) \int_{t_0}^t \boldsymbol{\phi}(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) e_i \delta(t - \tau) d\tau + \mathbf{D}(t) e_i \delta(t - \tau) \\ &= \mathbf{C}(t) \boldsymbol{\phi}(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) e_i + \mathbf{D}(t) e_i \delta(t - \tau) \triangleq \mathbf{h}_i(t, \tau) \end{aligned} \quad (43)$$

$\mathbf{h}_i(t)$ 为 m 维向量，它表示系统输出 $\mathbf{y}(t)$ 对输入 $\mathbf{u}(t)$ 的第 i 个元素在 τ 时刻加入单位脉冲时的响应。

将 $\mathbf{h}_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$ 按次序排列，则

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(t, \tau) &= [\mathbf{h}_1(t, \tau) \quad \mathbf{h}_2(t, \tau) \quad \cdots \quad \mathbf{h}_r(t, \tau)] \\ &= [\mathbf{C}(t)\boldsymbol{\phi}(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{C}(t)\boldsymbol{\phi}(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{C}(t)\boldsymbol{\phi}(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{e}_r] \\ &\quad + [\mathbf{D}(t)\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{D}(t)\mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{D}(t)\mathbf{e}_r]\delta(t - \tau) \\ &= \mathbf{C}(t)\boldsymbol{\phi}(t, \tau)\mathbf{B}(\tau) + \mathbf{D}(\tau)\delta(t - \tau)\end{aligned}\tag{44}$$

线性时变系统脉冲响应矩阵

$$\mathbf{H}(t, \tau) = \begin{cases} \mathbf{C}(t)\boldsymbol{\phi}(t, \tau)\mathbf{B}(\tau) + \mathbf{D}(\tau)\delta(t - \tau) & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases}\tag{45}$$

2.5.2 线性定常系统的脉冲响应矩阵

脉冲响应矩阵为

$$\mathbf{H}(t - \tau) = \begin{cases} \mathbf{C} \mathbf{e}^{A(t-\tau)} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t - \tau) & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases} \quad (46)$$

如果单位脉冲出现在 $\tau = 0$ 的时刻，则脉冲响应矩阵为

$$\mathbf{H}(t) = \begin{cases} \mathbf{C} \mathbf{e}^{At} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t) & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases} \quad (47)$$

2.5.3 传递函数矩阵与脉冲响应矩阵之间的关系

对 (47) 式求拉普拉斯变换

$$\begin{aligned} H(s) &= \mathcal{L}[H(t)] = \int_0^{\infty} H(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} [C e^{At} B + D \delta(t)] e^{-st} dt \\ &= C \int_0^{\infty} e^{At} e^{-st} dt B + D \end{aligned} \quad (48)$$

$$\text{而} \quad A \int_0^{\infty} e^{At} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} A e^{At} e^{-st} dt = -I + s \int_0^{\infty} e^{At} e^{-st} dt$$

$$\text{上式可改写成} \quad [sI - A] \int_0^{\infty} e^{At} e^{-st} dt = I \quad (49)$$

$$\text{如果} [sI - A]^{-1} \text{存在, 则} \quad \int_0^{\infty} e^{At} e^{-st} dt = [sI - A]^{-1} \quad (50)$$

将 (50) 式代入 (48), 得到

$$H(s) = C[sI - A]^{-1} B + D = G(s) \quad (51)$$

$$\text{当} D = 0 \text{ 时} \quad H(s) = C[sI - A]^{-1} B = G(s) \quad (52)$$

可见, 线性定常系统在初始松弛情况下脉冲响应矩阵的拉普拉斯变换就是系统传递函数矩阵。

2.5.4 利用脉冲响应矩阵计算系统的输出

如果输入向量表示为

$$\mathbf{u}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{u}(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (53)$$

将 (53) 式代入 (28) 式

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{C} \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D} \int_{t_0}^t \mathbf{u}(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \\ &= \mathbf{C} e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t [\mathbf{C} e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t - \tau)] \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= \mathbf{C} e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{H}(t - \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (54)$$

当系统初始状态为零时

$$\mathbf{y}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{H}(t - \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (55)$$

2.6 线性连续系统方程的离散化

作以下假定：

- 1) 被控对象上有采样开关；
- 2) 采样周期为 T ，满足香农采样定理要求，包含连续信号全部信息；
- 3) 具有零阶保持器。

2.6.1 线性时变系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

初始状态为 $\mathbf{x}(t_0)$

状态方程的解为

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau) \mathrm{d}\tau \quad (57)$$

令 $t = (k+1)T$, $t_0 = k_0T$, 则

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \boldsymbol{\phi}[(k+1)T, k_0T] \mathbf{x}(k_0T) + \int_{k_0T}^{(k+1)T} \boldsymbol{\phi}[(k+1)T, \tau] \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) \mathrm{d} \tau \quad (58)$$

再令 $t = kT$, $t_0 = k_0T$, 则

$$\mathbf{x}(kT) = \boldsymbol{\phi}(kT, k_0T) \mathbf{x}(t_0) + \int_{k_0T}^{kT} \boldsymbol{\phi}(kT, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) \mathrm{d} \tau \quad (59)$$

将 (59) 式两边都左乘 $\boldsymbol{\phi}[(k+1)T, kT]$

$$\boldsymbol{\phi}[(k+1)T, kT] \mathbf{x}(kT) = \boldsymbol{\phi}[(k+1)T, k_0T] \mathbf{x}(k_0T) + \int_{k_0T}^{kT} \boldsymbol{\phi}[(k+1)T, \tau] \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) \mathrm{d} \tau \quad (60)$$

(58) 减 (60) 并且整理后, 得到

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \boldsymbol{\phi}[(k+1)T, kT] \mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \boldsymbol{\phi}[(k+1)T, \tau] \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) \mathrm{d} \tau$$

$$\text{令: } \mathbf{G}(kT) = \boldsymbol{\phi}[(k+1)T, kT] \quad \mathbf{H}(kT) = \int_{kT}^{(k+1)T} \boldsymbol{\phi}[(k+1)T, \tau] \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) \mathrm{d} \tau$$

考虑到 $u(\tau) = u(kT) \quad \tau \in [kT, (k+1)T]$

于是 $x[(k+1)T] = \mathbf{G}(kT)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}(kT)\mathbf{u}(kT)$

省略 T ，得到 $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k)$ (61)

输出方程离散化，令 $t = kT$ ，即可以得到

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) \quad (62)$$

2.6.2 线性定常系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

离散化后得到

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

$$\text{其中 } \mathbf{G} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}T} \quad \mathbf{H} = \left[\int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathrm{d}\tau \right] \mathbf{B} \quad \mathbf{C} = \mathbf{C} \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}$$

2.7 线性离散系统的运动分析

2.7.1 线性定常离散系统齐次状态方程的解

系统的齐次状态方程为： $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k)$ (65)

其中， $\mathbf{x}(k)$ 为 n 维状态向量

采用迭代法可以求出系统齐次状态方程的解

$$\begin{aligned} k=0 \quad & \mathbf{x}(1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(0) \\ k=1 \quad & \mathbf{x}(2) = \mathbf{G}\mathbf{x}(1) = \mathbf{G}^2\mathbf{x}(0) \\ k=2 \quad & \mathbf{x}(3) = \mathbf{G}\mathbf{x}(2) = \mathbf{G}^3\mathbf{x}(0) \\ & \vdots \\ k=k-1 \quad & \mathbf{x}(k) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k-1) = \mathbf{G}^k\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\phi}(k)\mathbf{x}(0) \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\phi}(k) = \mathbf{G}^k$ (66)

系统的输出为 $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{G}^k\mathbf{x}(0)$ (67)

2.7.2 状态转移矩阵

若系统初始状态为 $x(0)$ ，通过 $\phi(k) = G^k$ 将其转移到状态 $x(k)$ ，故 $\phi(k)$ 称为状态转移矩阵。

1. $\phi(k)$ 的基本性质

1) 满足自身的矩阵差分方程及初始条件

$$\phi(k+1) = G\phi(k) \quad \phi(0) = I$$

2) 传递性

$$\phi(k_2) = \phi(k_2 - k_1)\phi(k_1)$$

3) 可逆性 $\phi^{-1}(k) = \phi(-k)$

2. 状态转移矩阵的计算

有4种状态转移矩阵的计算方法：①按定义计算；②用z反变换计算；③应用凯-哈定理计算；④通过线性变换计算。

在此，我们仅讨论用z反变换计算。

离散系统的齐次状态方程为：
$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k)$$

对上式进行 $\mathbf{z}$ 变换
$$z\mathbf{x}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{G}\mathbf{x}(z)$$

$$[zI - \mathbf{G}]\mathbf{x}(z) = z\mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x}(z) = [zI - \mathbf{G}]^{-1} z\mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathcal{Z}^{-1} \{ [zI - \mathbf{G}]^{-1} z \} \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\phi}(k) \mathbf{x}(0) = \mathbf{G}^k \mathbf{x}(0)$$

可见

$$\boldsymbol{\phi}(k) = \mathbf{G}^k = \mathcal{Z}^{-1} \{ [zI - \mathbf{G}]^{-1} z \} \quad (68)$$

例2-13 离散系统齐次状态方程为 $\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -0.4 & 0.3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$

求状态转移矩阵

解

$$[zI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} z & 1 \\ 0.4 & z - 0.3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5/13}{z-0.8} + \frac{8/13}{z+0.5} & \frac{10/13}{z-0.8} + \frac{10/13}{z+0.5} \\ \frac{-4/13}{z-0.8} + \frac{4/13}{z+0.5} & \frac{8/13}{z-0.8} + \frac{5/13}{z+0.5} \end{bmatrix}$$

$$\phi(k) = \mathbf{G}^k = \mathcal{Z}^{-1} \{ [zI - \mathbf{G}]^{-1} z \}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{13}(0.8)^k + \frac{8}{13}(-0.5)^k & -\frac{10}{13}(0.8)^k + \frac{10}{13}(-0.5)^k \\ -\frac{4}{13}(0.8)^k + \frac{4}{13}(-0.5)^k & \frac{8}{13}(0.8)^k + \frac{5}{13}(-0.5)^k \end{bmatrix}$$

2.7.3 线性定常离散系统方程的解

系统方程为

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)\end{aligned}\quad (69)$$

可以用迭代法求系统状态方程的解

$$\begin{aligned}k=0 \quad \mathbf{x}(1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}\mathbf{u}(0) \\ k=1 \quad \mathbf{x}(2) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(1) + \mathbf{H}\mathbf{u}(1) = \mathbf{G}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{u}(0) + \mathbf{H}\mathbf{u}(1) \\ k=2 \quad \mathbf{x}(3) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(2) + \mathbf{H}\mathbf{u}(2) = \mathbf{G}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}^2\mathbf{H}\mathbf{u}(0) + \mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{u}(1) + \mathbf{H}\mathbf{u}(2) \\ &\vdots \\ k=k-1 \quad \mathbf{x}(k) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) = \mathbf{G}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-i-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(i)\end{aligned}$$

系统方程的解为

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{G}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-i-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(i) \quad (70)$$

系统的输出为

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{G}^k\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-i-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(i) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad (71)$$

2.7.3 线性时变离散系统方程的解

系统方程为

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k)\end{aligned}\tag{72}$$

若系统的解存在且唯一，则解为

$$\mathbf{x}(k) = \phi(k, k_0)\mathbf{x}(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k-1} \phi(k, i+1)\mathbf{H}(i)\mathbf{u}(i)\tag{73}$$

（用迭代法可以证明）

系统的输出为

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\phi(k, k_0)\mathbf{x}(k_0) + \mathbf{C}(k)\sum_{i=k_0}^{k-1} \phi(k, i+1)\mathbf{H}(i)\mathbf{u}(i) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k)\tag{74}$$

2.8 用MATLAB求解系统方程

2.8.1 线性齐次状态方程的解

使用MATLAB可以方便地求出状态方程的解。我们通过例子来说明。

例2-16 已知线性系统齐次状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \text{初始条件} \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

求系统状态方程的解。

解 用以下MATLAB程序计算齐次状态方程的解，其中collect()函数的作用是合并同类项，而ilaplace()函数的作用是求取拉普拉斯逆变换，函数det()的作用是求方阵的行列式。

```
syms s t x0 x tao phi phi0; % 声明符号变量
A=[0 1;-2 -3]; I=[1 0;0 1];
E=s*I-A; C=det(E); D=collect(inv(E));
phi0=ilaplace(D)
x0=[1;0]; x=phi0*x0
```

程序执行结果

```
phi0 =
```

```
[ -exp(-2*t)+2*exp(-t),      exp(-t)-exp(-2*t)]  
[ -2*exp(-t)+2*exp(-2*t),    2*exp(-2*t)-exp(-t)]
```

```
x =
```

```
[ -exp(-2*t)+2*exp(-t)]  
[ -2*exp(-t)+2*exp(-2*t)]
```

这表示

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

2.8.2 线性非齐次状态方程的解

通过以下例子说明。

例2-17 已知系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u(t) = 1(t)$$

解 用以下MATLAB程序求系统方程的解。其中，语句 `phi=subs(phi0,'t',(t-tao))` 表示将符号变量phi0中的自变量t用(t-tao)代换就构成了符号变量phi，而语句 `x2=int(F,tao,0,t)` 表示符号变量F对tao在0到t的积分区间上求积分，运算结果返回到x2。

```
syms s t x0 x tao phi phi0; % 声明符号变量
A=[0 1;-2 -3]; I=[1 0;0 1]; B=[0; 1];
E=s*I-A; C=det(E); D=collect(inv(E));
phi0=ilaplace(D); x0=[1;0]; x1=phi0*x0;

phi=subs(phi0,'t',(t-tao));
F=phi*B*1; x2=int(F,tao,0,t);
x=collect(x1+x2)
```

程序执行结果为

```
x =  
[ -1/2*exp(-2*t)+exp(-t)+1/2]  
[          -exp(-t)+exp(-2*t)]
```

这表示

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0.5 + e^{-t} - 0.5e^{-2t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} \end{bmatrix}$$

2.8.3 连续系统状态方程的离散化

在MATLAB中，函数c2d（）的功能就是将连续时间的系统模型转换成离散时间的系统模型。其调用格式为：

sysd=c2d(sysc,T,method)。其中，输入参量**sysc**为连续时间的系统模型；**T**为采样周期（秒）；**method**用来指定离散化采用的方法。

‘zoh’——采用零阶保持器；

‘foh’——采用一阶保持器；

‘tustin’——采用双线性逼近方法；

‘prewarm’——采用改进的tustin方法；

‘matched’——采用SISO系统的零极点匹配方法；
当method为缺省时（即：调用格式为sysd=c2d(sysc,T)时），默认的方法是采用零阶保持器。

例2-18 某线性连续系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

采用零阶保持器将其离散化，设采样周期为0.1秒。求离散化的状态方程模型。

解 输入以下语句，其中D=zeros(2)表示，将D赋值为2×2维的全零矩阵。

```
A=[0 1 0;0 0 1;-6 -11 -6];B=[1 0;2 -1;0 2];C=[1 -1 0;2 1 -1];  
D=zeros(2);T=0.1;  
G=ss(A,B,C,D); Gd=c2d(G,T)
```

语句执行的结果为

```
a =  
      x1      x2      x3  
x1    0.9991    0.0984    0.004097  
x2   -0.02458    0.9541    0.07382  
x3   -0.4429   -0.8366    0.5112
```

```
b =  
      u1      u2  
x1    0.1099   -0.004672  
x2    0.1959   -0.0902  
x3   -0.1164    0.1936
```

```
c =  
      x1  x2  x3  
y1     1  -1   0  
y2     2   1  -1
```

```
d =  
      u1  u2  
y1     0   0  
y2     0   0
```

```
Sampling time: 0.1  
Discrete-time model.
```

计算结果表示系统离散化后的
状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9991 & 0.0984 & 0.0041 \\ -0.0246 & 0.9541 & 0.0738 \\ -0.4429 & -0.8366 & 0.5112 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.1099 & -0.0047 \\ 0.1959 & -0.0902 \\ -0.1164 & 0.1936 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$

第2章 结束

