

第1章 控制系统数学模型

本课程的任务是系统分析和系统设计。而不论是系统分析还是系统设计，本课程所研究的内容是基于系统的数学模型来进行的。因此，本章首先介绍控制系统的数学模型。

本章内容为：

- 1、状态空间表达式
- 2、由微分方程求出系统状态空间表达式
- 3、传递函数矩阵
- 4、离散系统的数学模型
- 5、线性变换
- 6、组合系统的数学描述
- 7、利用**MATLAB**进行模型之间的变换

1.1 状态空间表达式

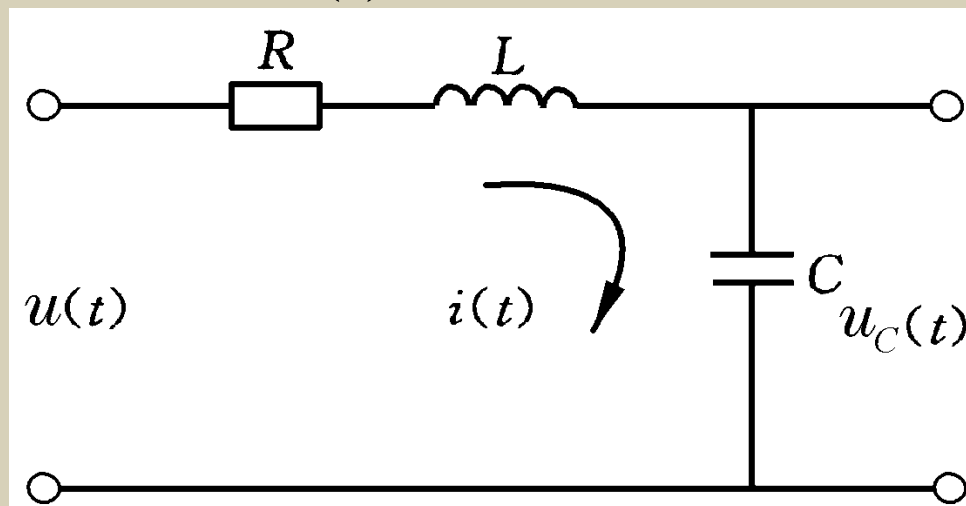
1.1.1 状态、状态变量和状态空间

状态——动态系统的状态是一个可以确定该系统行为的信息集合。这些信息对于确定系统未来的行为是充分且必要的。

状态变量——确定系统状态的最小一组变量，如果知道这些变量在任意初始时刻 t_0 的值以及 $t \geq t_0$ 的系统输入，便能够完整地确定系统在任意时刻 t 的状态。（状态变量的选择可以不同）

状态空间——以所选择的一组状态变量为坐标轴而构成的正交线性空间，称为状态空间。

例：如下图所示电路， $u(t)$ 为输入量， $u_C(t)$ 为输出量。



建立方程：
$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_C(t) = u(t) \qquad i = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

初始条件：
$$i(t) \Big|_{t=t_0} = i(t_0) \qquad u_C(t) \Big|_{t=t_0} = u_C(t_0)$$

$i(t)$ 和 $u_C(t)$ 可以表征该电路系统的行为，就是该系统的一组状态变量

1.1.2 状态空间表达式

前面电路的微分方程组可以改写如下，并且写成矩阵形式：

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{u_C(t)}{L} + \frac{u(t)}{L}$$

$$\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{di(t)}{dt} \\ \frac{du_C(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

该方程描述了电路的状态变量和输入量之间的关系，称为该电路的状态方程，这是一个矩阵微分方程。

$$u_C(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix}$$

如果将电容上的电压作为电路的输出量，则该方程是联系输出量和状态变量关系的方程，称为该电路的输出方程或观测方程。这是一个矩阵代数方程。

系统的状态方程和输出方程一起，称为系统状态空间表达式，或称为系统动态方程，或称系统方程。

设: $x_1 = i(t) \quad x_2 = u_C(t)$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [0 \quad 1]$$

则可以写成状态空间表达式:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \right\}$$

推广到一般形式:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \right\}$$

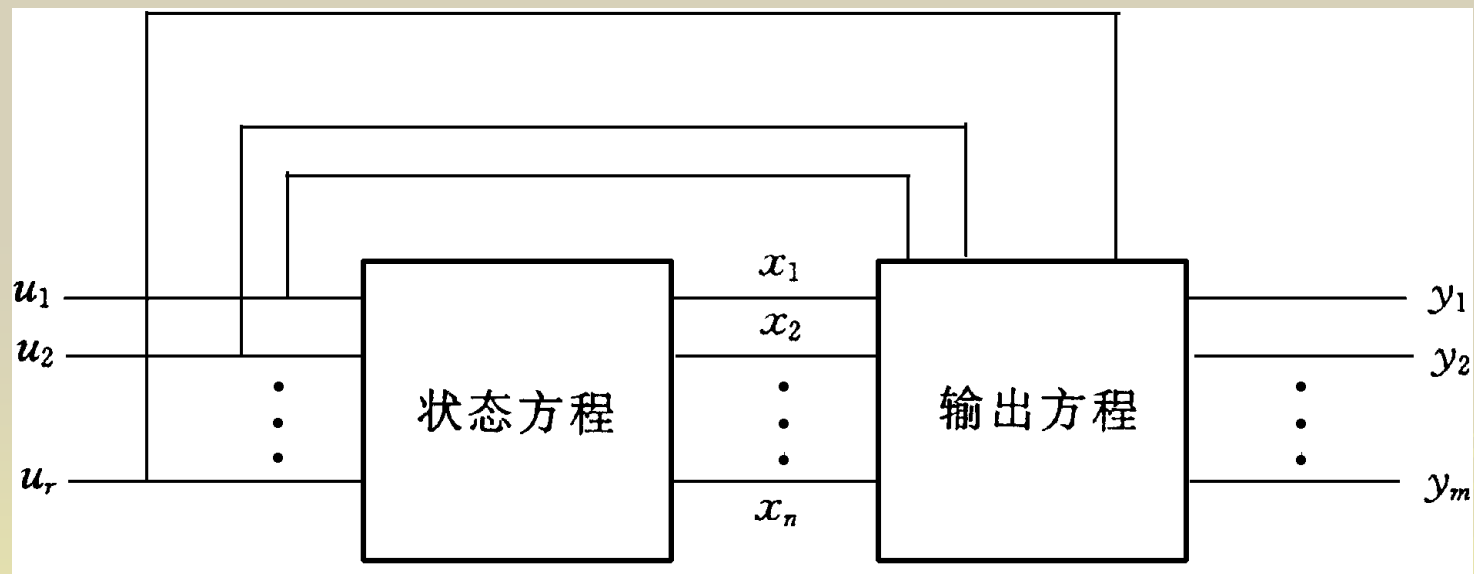
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & a_{nr} \end{bmatrix}_{n \times r}$$

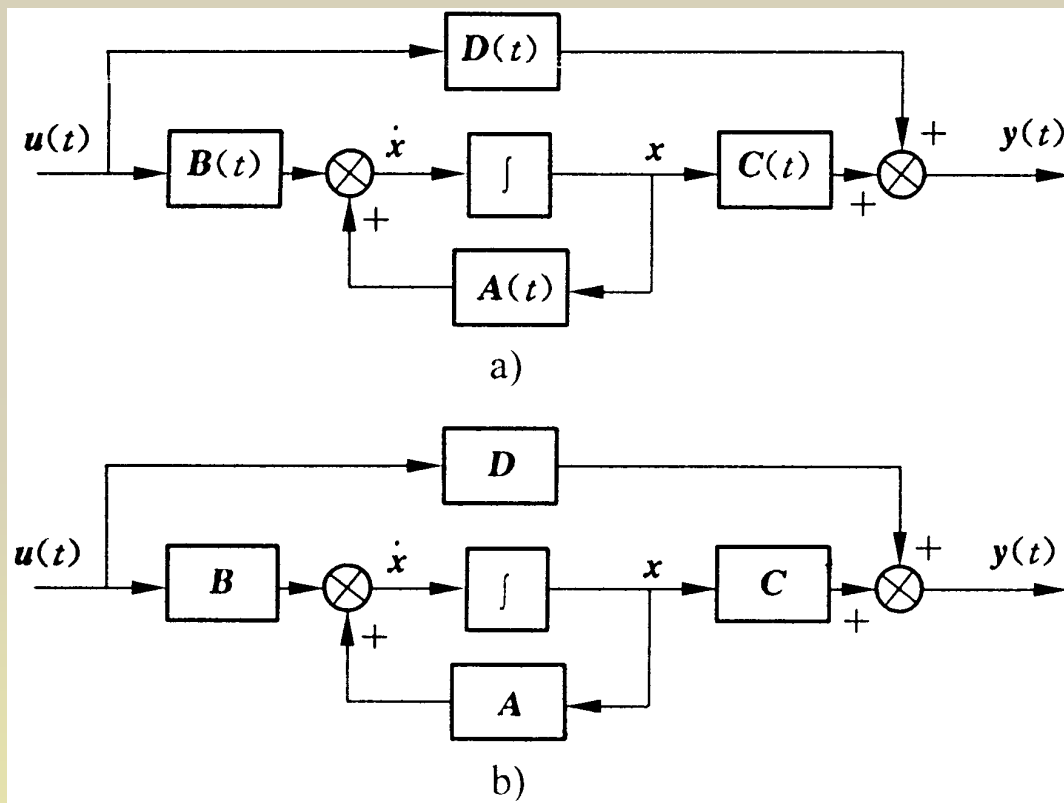
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

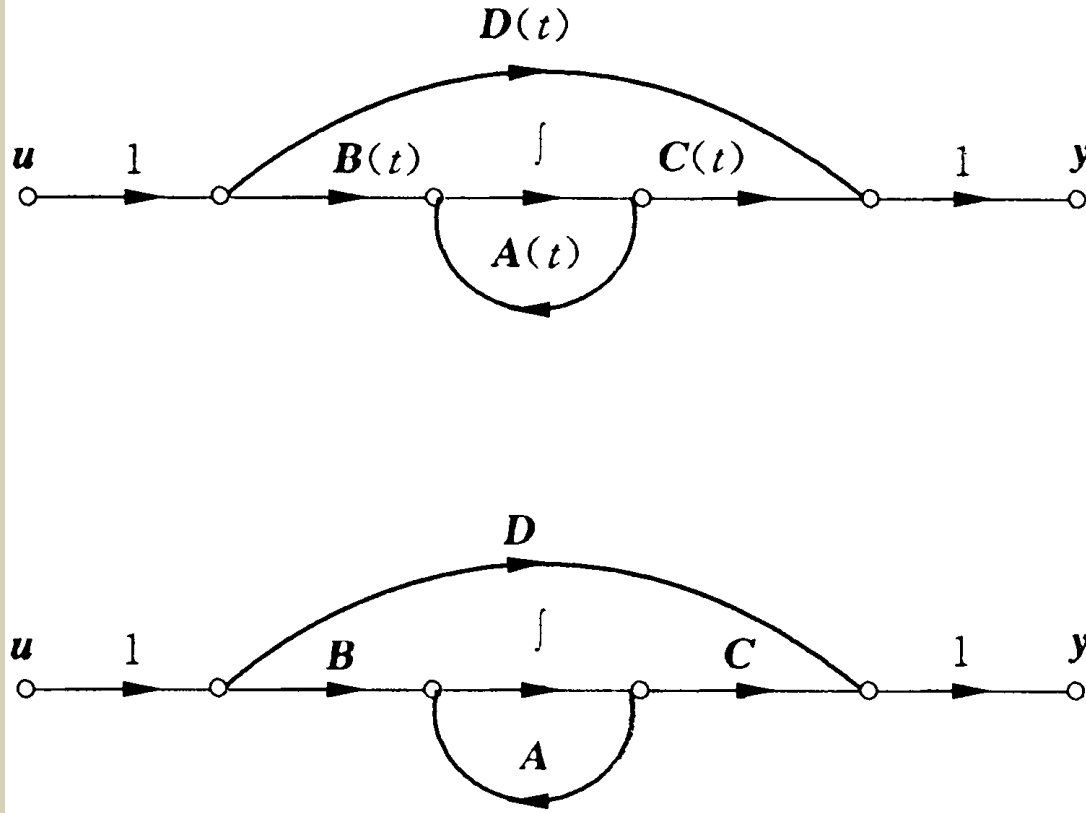
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix}_{m \times r}$$



如果矩阵 A , B , C , D 中的所有元素都是实常数时, 则称这样的系统为线性定常 (LTI, 即: **Linear Time-Invariant**) 系统。

如果这些元素中有些是时间 t 的函数, 则称系统为线性时变系统。





严格地说，一切物理系统都是非线性的。可以用下面的状态方程和输出方程表示。如果不显含 t ，则称为非线性定常系统。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{aligned} \right\}$$

1.1.3 状态变量的选取

(1) 状态变量的选取可以视问题的性质和输入特性而定

(2) 状态变量选取的非惟一性

在前面的例子中，如果重新选择状态变量 $x_1 = u_C$ $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{u}_C$

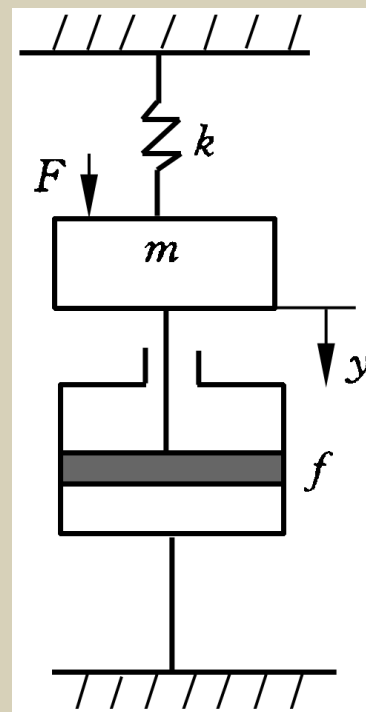
则其状态方程为
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u$$

输出方程为：
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(3) 系统状态变量的数目是惟一的

1.1.4 状态空间表达式建立的举例

例1-1 建立右图所示机械系统的状态空间表达式
(注: 质量块 m 的重量已经和弹簧 k 的初始拉伸相抵消)



根据牛顿第二定律
$$\sum F = F - ky - f \frac{dy}{dt} = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

即:
$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + ky = F$$

选择状态变量 $x_1 = y \quad x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1$

则:
$$\dot{x}_1 = x_2$$

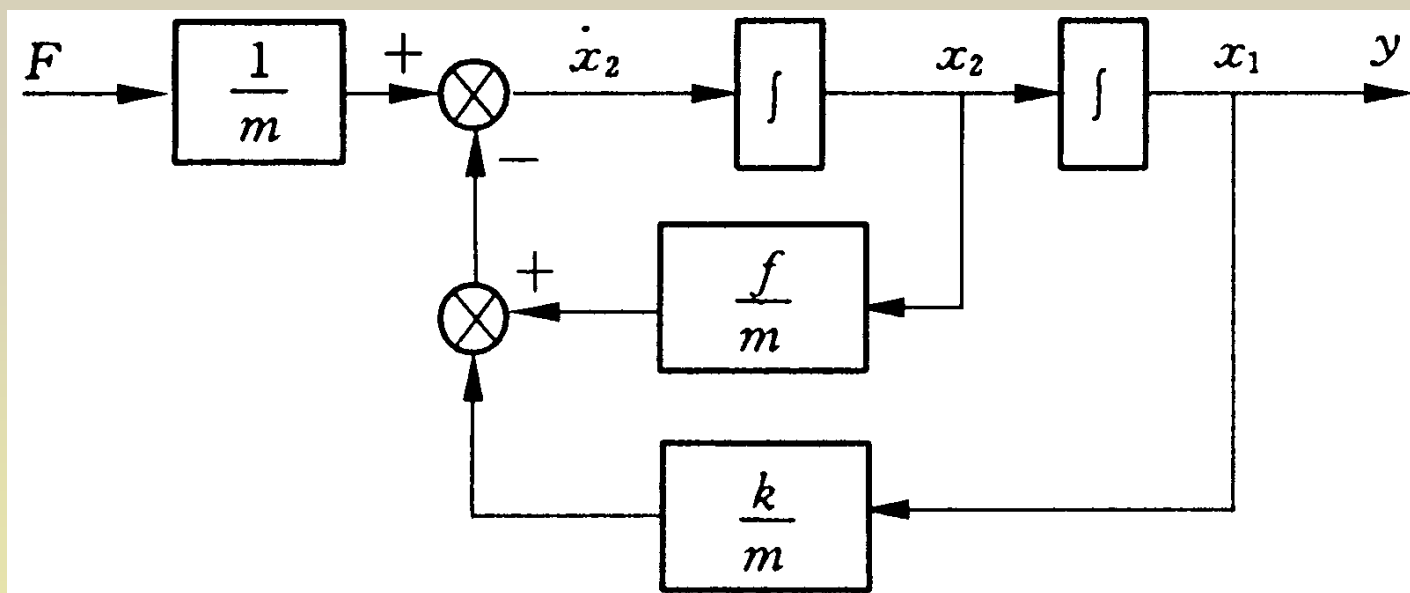
$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m} y - \frac{f}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{m} F = -\frac{k}{m} x_1 - \frac{f}{m} x_2 + \frac{1}{m} F$$

机械系统的系统方程为

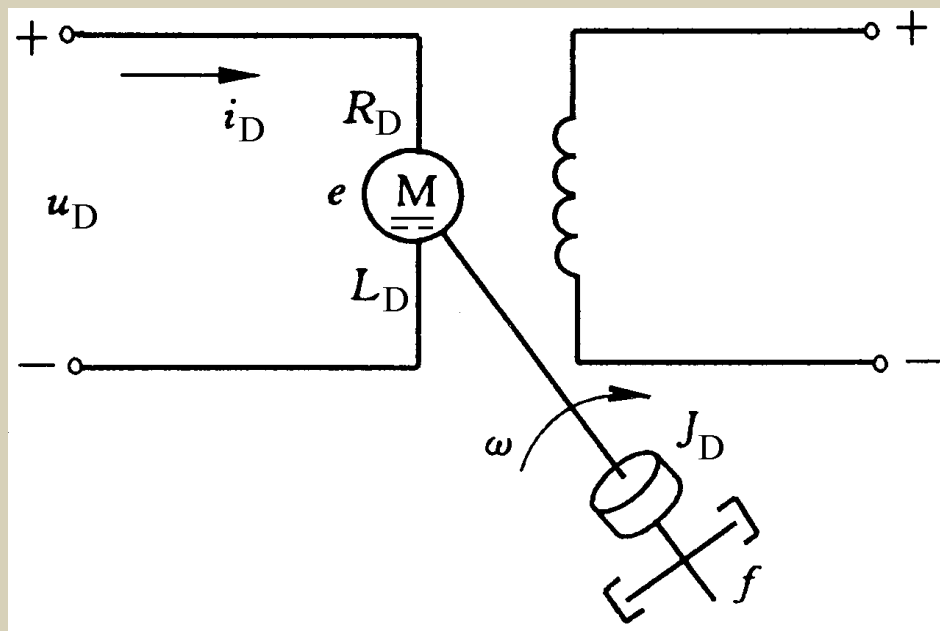
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

该系统的状态图如下



例1-2 建立电枢控制直流他励电动机的状态空间表达式



电枢回路的电压方程为

$$L_D \frac{di_D}{dt} + R_D i_D + K_e \omega = u_D$$

系统运动方程式为

$$K_m i_D - f \omega = J_D \frac{d\omega}{dt}$$

（式中， K_e 为电动势常数； K_m 为转矩常数； J_D 为折合到电动机轴上的转动惯量； f 为折合到电动机轴上的粘性摩擦系数。）

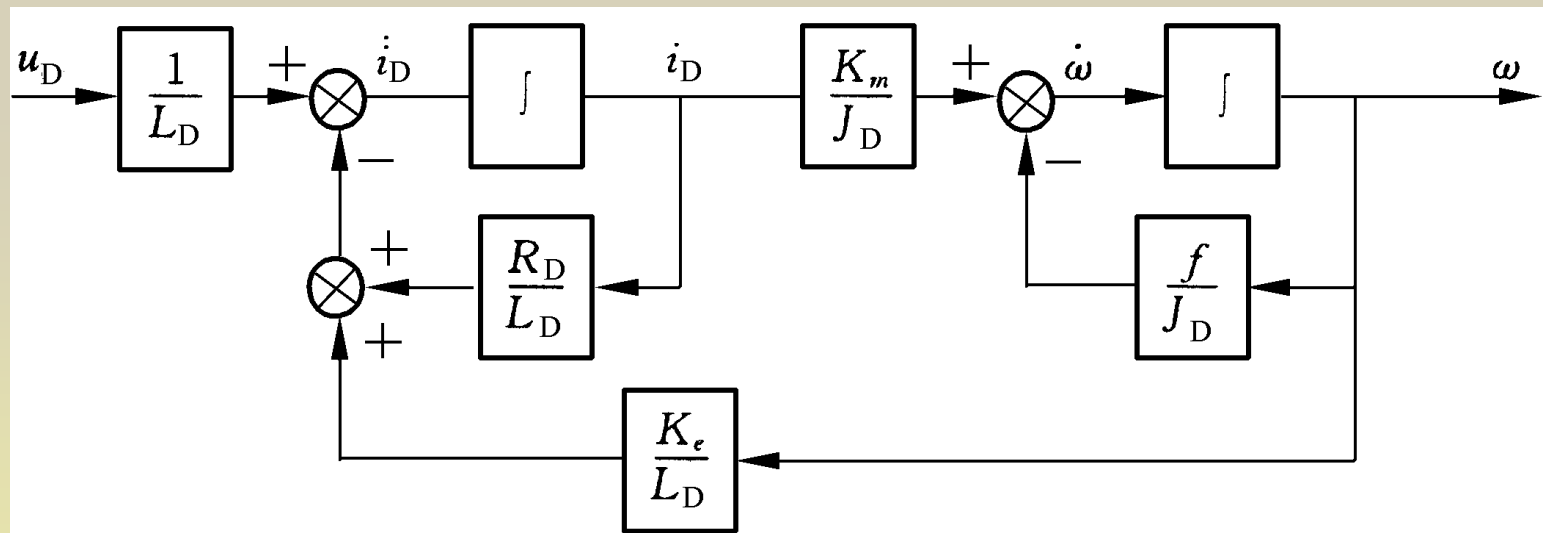
可选择电枢电流 i_D 和角速度 ω 为状态变量，电动机的电枢电压 u_D 为输入量，角速度 ω 为输出量。

状态空间表达式

$$\begin{bmatrix} \frac{di_D}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_D}{L_D} & -\frac{K_e}{L_D} \\ \frac{K_m}{J_D} & -\frac{f}{J_D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_D \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_D} \\ 0 \end{bmatrix} u_D$$

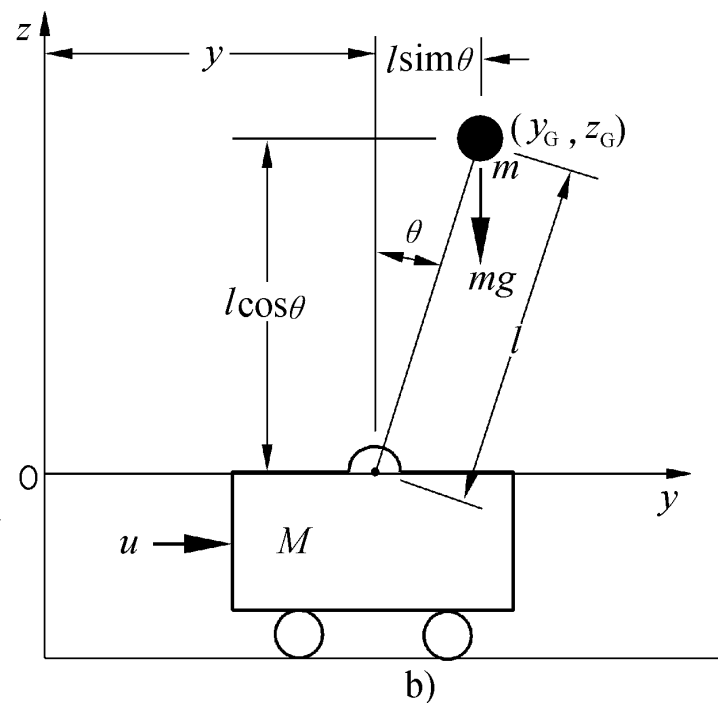
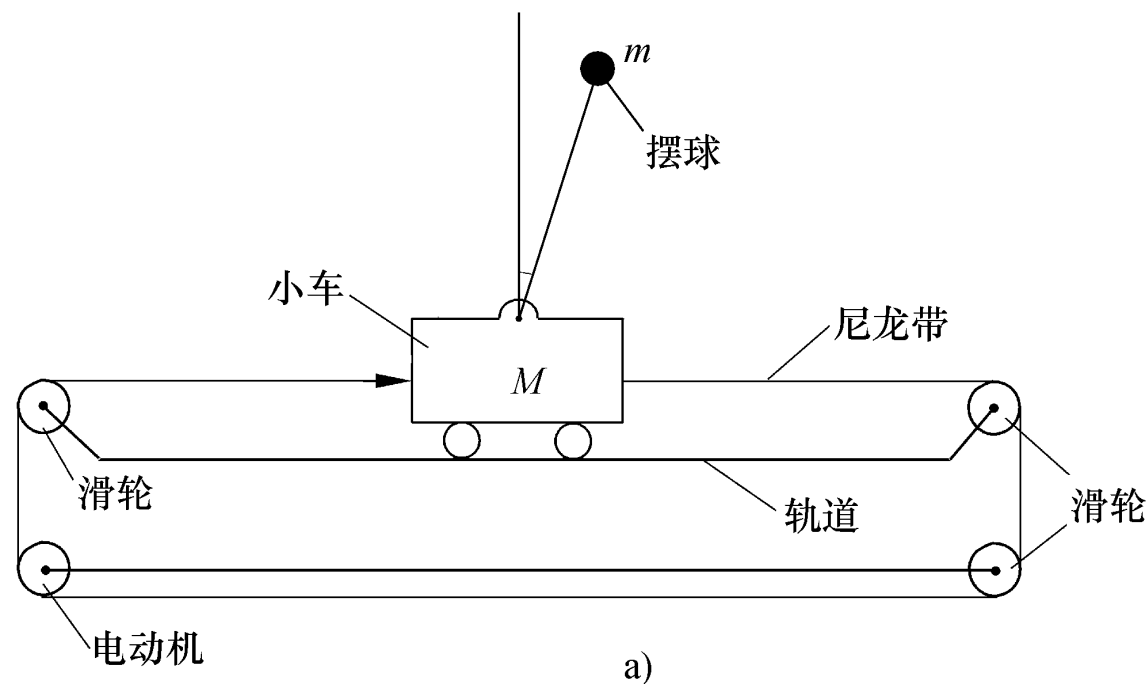
状态图如下：

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_D \\ \omega \end{bmatrix}$$



例1-3 建立单极倒立摆系统的状态空间表达式。

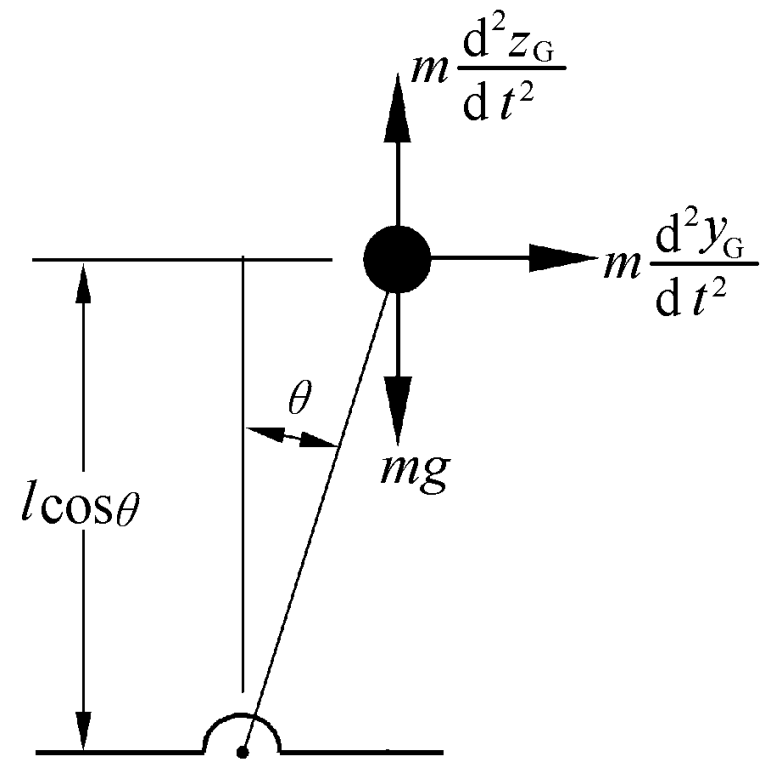
单级倒立摆系统是控制理论应用的一个典型的对象模型。



设小球的重心坐标为: (y_G, z_G)

$$\text{则} \quad y_G = y + l \sin \theta \quad z_G = l \cos \theta$$

在水平方向, 应用牛顿第二定律: $M \frac{d^2 y}{dt^2} + m \frac{d^2}{dt^2} (y + l \sin \theta) = u$



转动方向的力矩平衡方程式：

$$m \frac{d^2 y_G}{dt^2} \cdot (l \cos \theta) - m \frac{d^2 z_G}{dt^2} \cdot (l \sin \theta) = mg \cdot (l \sin \theta)$$

$$\left[m \frac{d^2}{dt^2} (y + l \sin \theta) \right] \cdot l \cos \theta - \left[m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) \right] \cdot l \sin \theta = mg \cdot l \sin \theta$$

而有：

$$\frac{d}{dt}(\sin \theta) = (\cos \theta) \cdot \dot{\theta}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\sin \theta) = (-\sin \theta) \cdot \dot{\theta}^2 + \cos \theta \cdot \ddot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}(\cos \theta) = (-\sin \theta) \cdot \dot{\theta}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\cos \theta) = (-\cos \theta) \cdot \dot{\theta}^2 + (-\sin \theta) \cdot \ddot{\theta}$$

线性化：当 $|\theta|$ 和 $|\dot{\theta}|$ 较小时，有 $\sin \theta \approx \theta$ $\cos \theta \approx 1$ $\theta \cdot \dot{\theta}^2 \approx 0$

化简后，得

$$(M + m)\ddot{y} + ml\ddot{\theta} \approx u$$

$$m\ddot{y} + ml\ddot{\theta} \approx mg\theta$$

求解得：

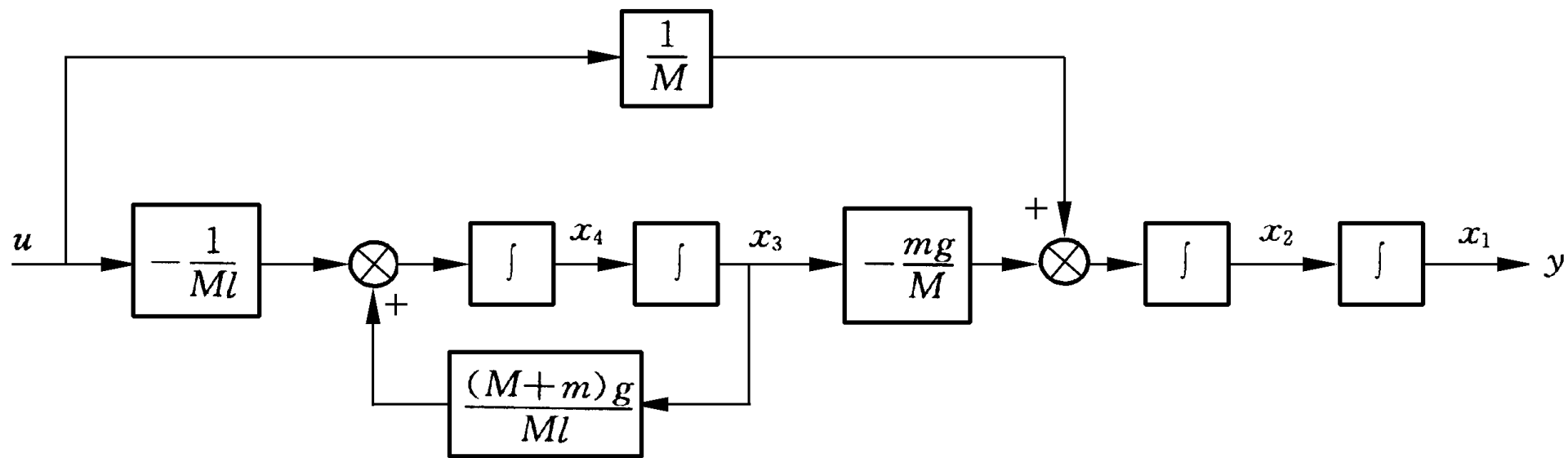
$$\ddot{y} = -\frac{mg}{M}\theta + \frac{1}{M}u \qquad \ddot{\theta} = \frac{(M + m)g}{Ml}\theta - \frac{1}{Ml}u$$

选择状态变量 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}$, $x_3 = \theta$, $x_4 = \dot{x}_3 = \dot{\theta}$

u 为系统输入, y 为系统输出

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u ; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

状态图为



1.2 由微分方程求状态空间表达式

一个系统，用线性定常微分方程描述其输入和输出的关系。通过选择合适的状态变量，就可以得到状态空间表达式。

这里分两种情况：

1、微分方程中不含输入信号导数项，（即**1.2.1** 中的内容）

2、微分方程中含有输入信号导数项，（即**1.2.2** 中的内容）

1.2.1 微分方程中不含有输入信号导数项

首先考察三阶系统，其微分方程为

$$\ddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = b_0u$$

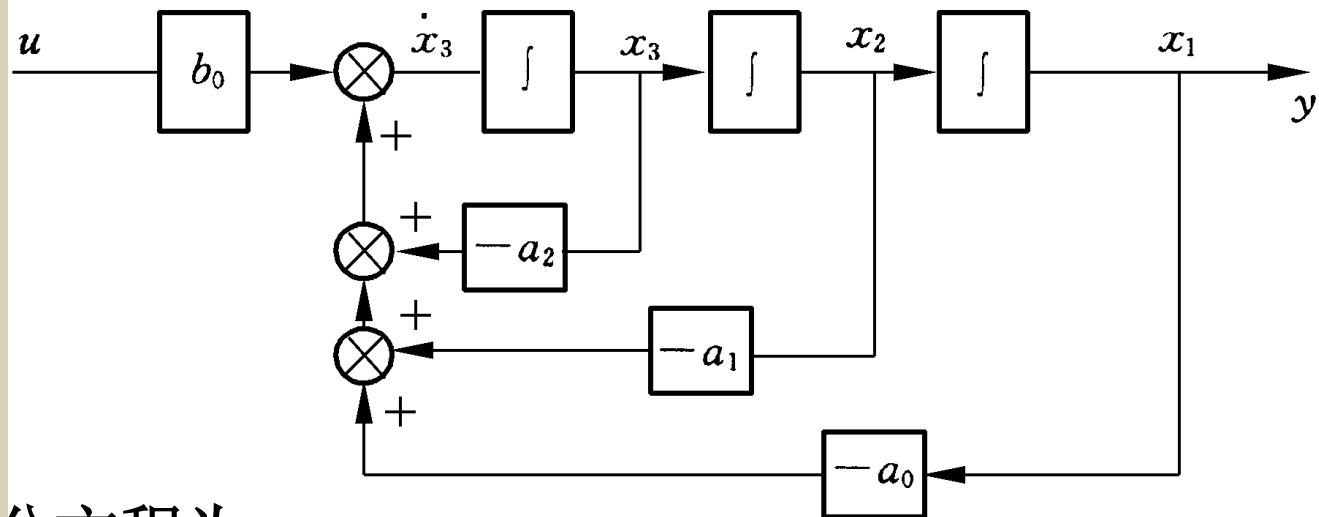
选取状态变量 $x_1 = y$ $x_2 = \dot{y}$ $x_3 = \ddot{y}$

则有 $\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = x_3$ $\dot{x}_3 = -a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3 + b_0u$

写成矩阵形式
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

状态图如下：



一般情况下， n 阶微分方程为：

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_0u$$

选择状态变量如下：

$$x_1 = y$$

$$\dot{x}_1 = x_2 = \dot{y}$$

$$\dot{x}_2 = x_3 = \ddot{y}$$

⋮

$$\dot{x}_{n-1} = x_n = y^{(n-1)}$$

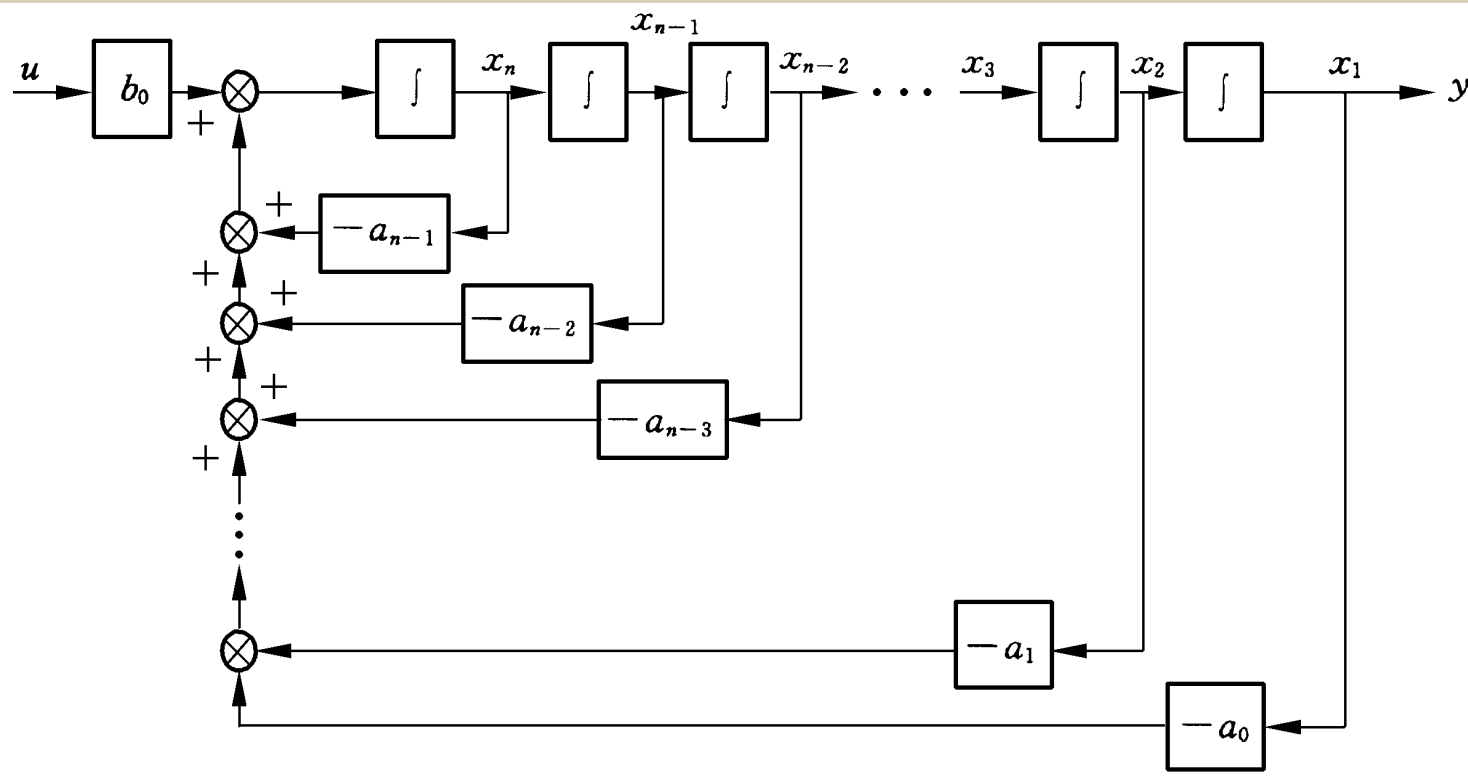
$$\dot{x}_n = y^{(n)} = -a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n + b_0u$$

写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

系统的状态图如下:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$



1.2.2 微分方程中含有输入信号导数项

(一) 待定系数法

首先考察三阶系统，其微分方程为

$$\ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_1 y + a_0 y = b_3 \ddot{u} + b_2 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

选择状态变量：

$$x_1 = y - \beta_0 u$$

$$x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u$$

$$x_3 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u$$

其中，待定系数为：

$$\beta_0 = b_3$$

$$\beta_1 = b_2 - a_2 \beta_0$$

$$\beta_2 = b_1 - a_1 \beta_0 - a_2 \beta_1$$

$$\beta_2 = b_0 - a_0 \beta_0 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_2$$

于是

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u$$

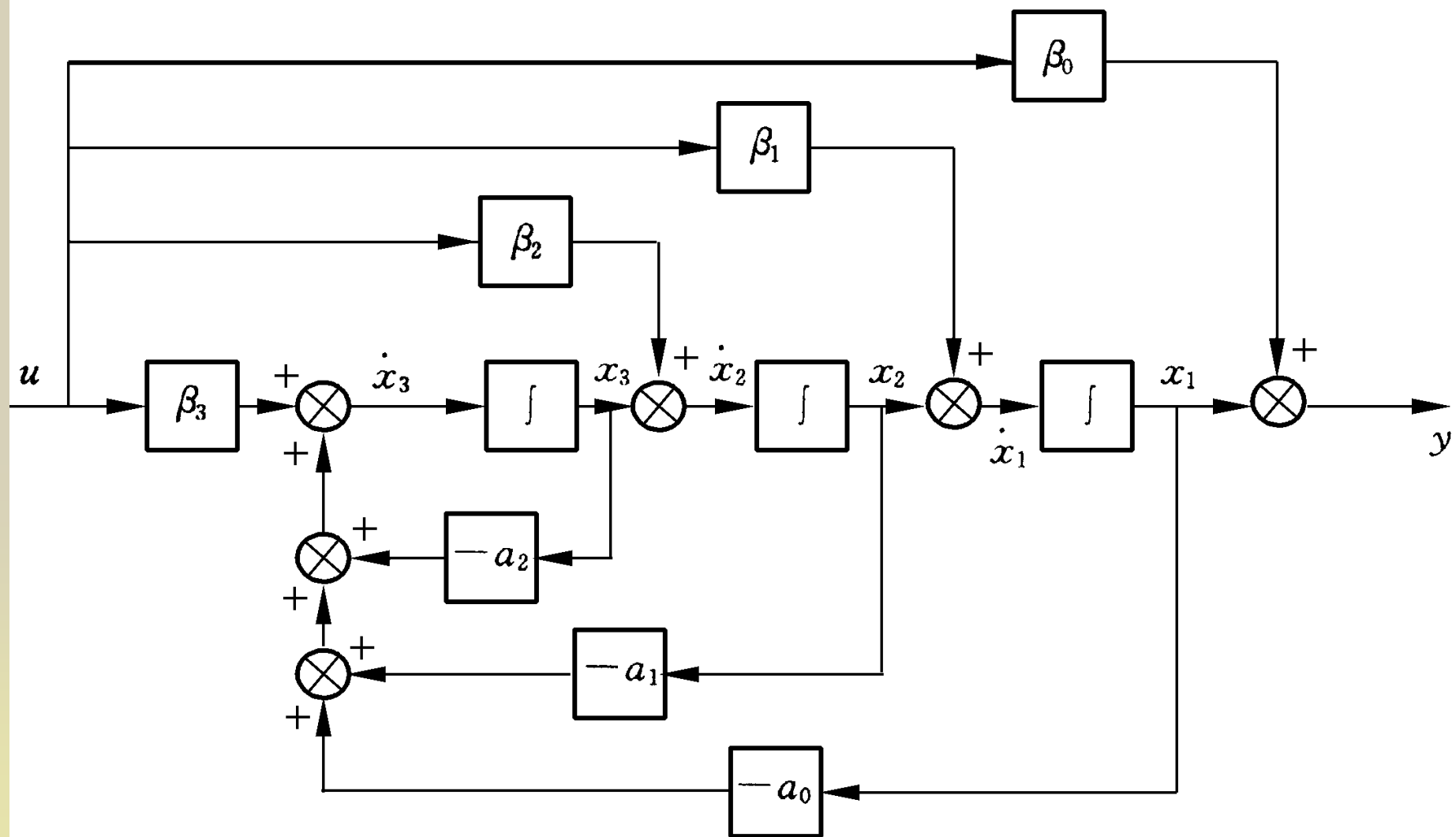
$$\dot{x}_3 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 + \beta_3 u$$

写成矩阵形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} u = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

$$y = x_1 + \beta_0 u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \beta_0 u = \mathbf{C}\mathbf{x} + du$$

系统的状态图



一般情况下， n 阶微分方程为：

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_nu^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0u$$

选择 n 个状态变量为

$$x_1 = y - \beta_0u$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1u$$

$$x_3 = \dot{x}_2 - \beta_2u$$

$$\vdots$$

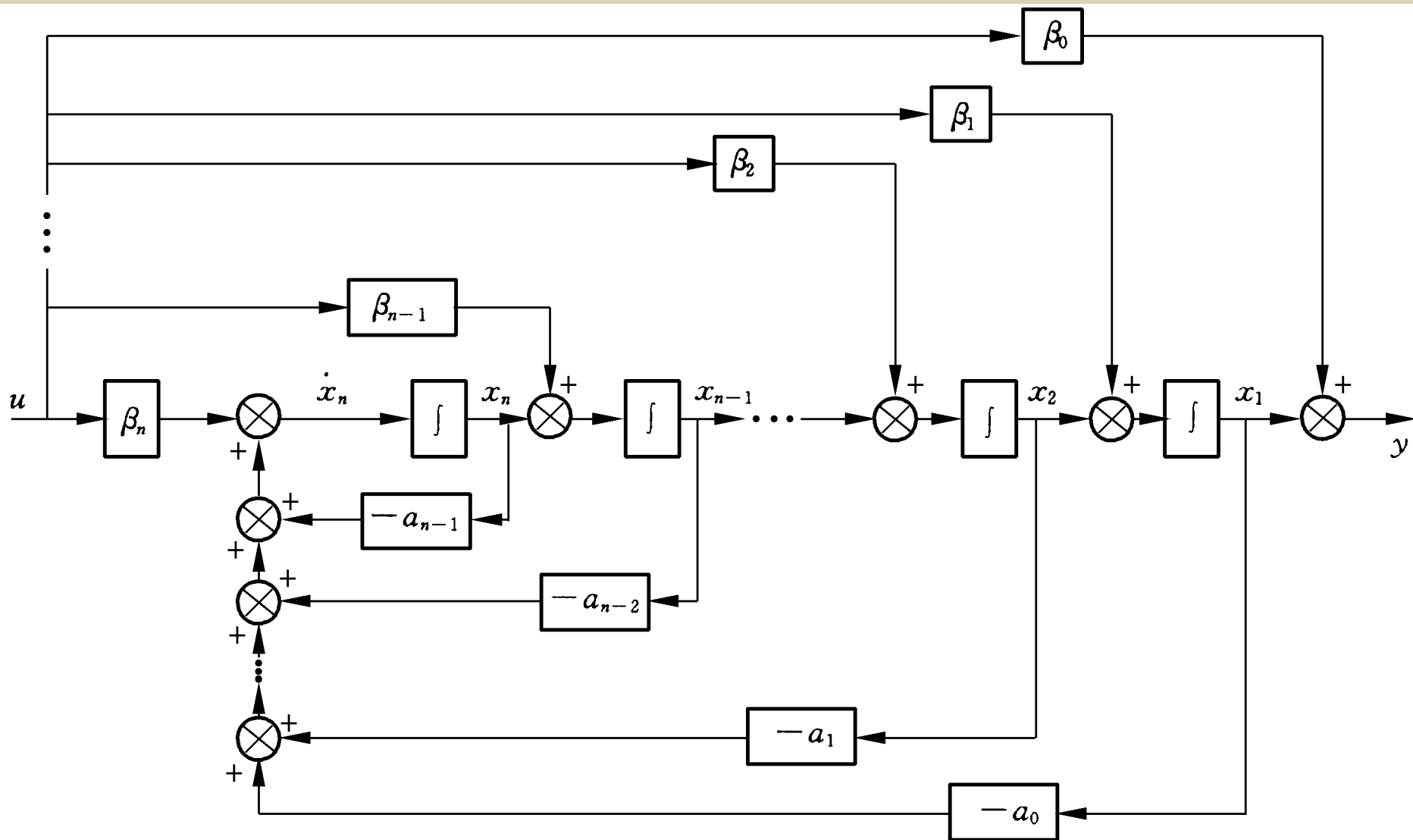
$$x_n = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1}u$$

系统方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u$$

系统状态图如下



(二) 辅助变量法

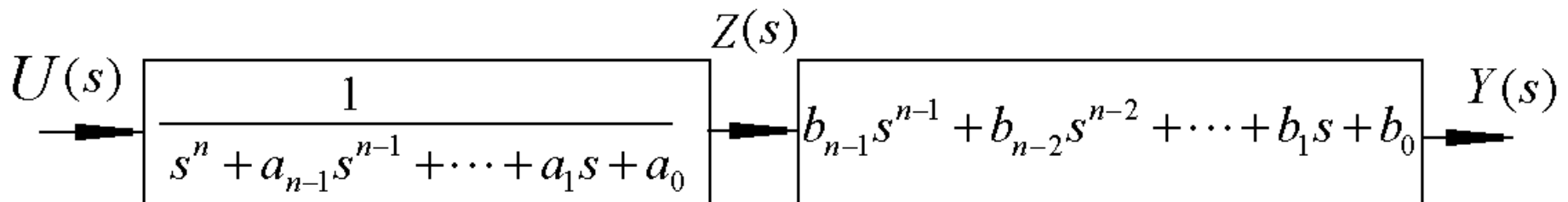
设 n 阶微分方程为:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0u$$

Laplace变换, 求传递函数

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

引入辅助变量 z



返回到微分方程形式:

$$z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{z} + a_0z = u$$

以及 $b_{n-1}z^{(n-1)} + \cdots + b_1\dot{z} + b_0z = y$

选择状态变量如下:

$$x_1 = z$$

$$\dot{x}_1 = x_2 = \dot{z}$$

$$\dot{x}_2 = x_3 = \ddot{z}$$

⋮

$$\dot{x}_{n-1} = x_n = z^{(n-1)}$$

$$\dot{x}_n = z^{(n)} = -a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n + b_0u$$

$$y = b_{n-1}z^{(n-1)} + \cdots + b_1\dot{z} + b_0z = b_0x_1 + b_1x_2 + \cdots + b_{n-1}x_n$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

注：如果输入项的导数阶次和输出项导数阶次相同，则有 d 。

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_n s^n + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0} = d + \frac{b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}$$

例1-4 已知描述系统的微分方程为

$$\ddot{y} + 18\ddot{y} + 192\dot{y} + 640y = 160\dot{u} + 640u$$

试求系统的状态空间表达式。

解 (1) 待定系数法

选择状态变量如下 $x_1 = y - \beta_0 u$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u$$

$$x_3 = \dot{x}_2 - \beta_2 u$$

其中

$$\beta_0 = b_3 = 0$$

$$\beta_1 = b_2 - a_2\beta_0 = 0$$

$$\beta_2 = b_1 - a_1\beta_0 - a_0\beta_1 = 160 - 192 \times 0 - 640 \times 0 = 160$$

$$\beta_3 = b_0 - a_0\beta_0 - a_1\beta_1 - a_2\beta_2 = 640 - 18 \times 160 = -2240$$

于是系统的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -192 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 160 \\ -2240 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(2) 辅助变量法 引入辅助变量 z

$$\ddot{z} + 18\dot{z} + 192z = u$$

$$y = 160\dot{z} + 640z$$

选择状态变量

$$x_1 = z \quad x_2 = \dot{z} = \dot{x}_1 \quad x_3 = \ddot{z} = \dot{x}_2$$

于是系统的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -192 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 640 & 160 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

1.3 传递函数矩阵

传递函数——系统初始松弛（即：初始条件为零）时，输出量的拉氏变换式与输入量的拉氏变换式之比。

1.3.1 传递函数

单入-单出线性定常系统的状态空间表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + du$$

在初始松弛时，求**Laplace**变换，并且化简
状态变量对输入量(输入到状态)的传递函数

$$\mathbf{G}_{xu}(s) = [\mathbf{sI} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b} = \frac{\text{adj}[\mathbf{sI} - \mathbf{A}]}{\det[\mathbf{sI} - \mathbf{A}]} \mathbf{b}$$

输出量对输入量(输入到输出)的传递函数（即：传递函数）

$$g_{yu}(s) = \mathbf{C}[\mathbf{sI} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b} + d = \mathbf{C} \frac{\text{adj}[\mathbf{sI} - \mathbf{A}]}{\det[\mathbf{sI} - \mathbf{A}]} \mathbf{b} + d$$

例1-5 系统状态方程式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

求系统传递函数。

解： $g(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\text{adj} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix}}{s^2 + 5s + 6} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s+1}{s^2 + 5s + 6}$$

1.3.2 传递函数矩阵

状态空间表达式为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \right\}$$

进行拉普拉斯变换

$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{x}(s) = \mathbf{B}\mathbf{u}(s) + \mathbf{x}(0)$$

如果 $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ 存在, 则 $\mathbf{x}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(s) + [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{x}(0)$

如果 $\mathbf{x}(0) = 0$, 则 $\mathbf{x}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(s) = \mathbf{G}_{xu}(s)\mathbf{u}(s)$

状态变量对输入向量(输入到状态)的传递函数矩阵:

$$\mathbf{G}_{xu}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} = \frac{\text{adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]}{\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]} \mathbf{B}$$

而

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(s) + \mathbf{D}\mathbf{u}(s) \\
 &= \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(s) + \mathbf{D}\mathbf{u}(s) \\
 &= \{\mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}\} \mathbf{u}(s) = \mathbf{G}_{yu}(s) \mathbf{u}(s)
 \end{aligned}$$

输出对输入向量(输入到输出)的传递函数矩阵:

$$\mathbf{G}_{yu}(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C} \frac{\text{adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]}{\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]} \mathbf{B} + \mathbf{D}$$

其结构为

$$\mathbf{G}_{yu}(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \cdots & g_{1r}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \cdots & g_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m1}(s) & g_{m2}(s) & \cdots & g_{mr}(s) \end{bmatrix}$$

式中, $g_{ij}(s)$ 表示只有第 j 个输入作用时, 第 i 个输出量 $y_i(s)$ 对第 j 个输入量 $u_j(s)$ 的传递函数。

例1-7 线性定常系统状态空间表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

求系统的传递函数矩阵。

解

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{yu}(s) &= \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+4 & -3 \\ 1 & 1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 3} \begin{bmatrix} s+2 & 3 \\ -(s+1) & s(s+4) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.3.3 正则（严格正则）有理传递函数（矩阵）

如果当 $s \rightarrow \infty$ 时， $g_{ij}(\infty)$ 是有限常量，则称有理函数 $g_{ij}(s)$ 是正则的。若 $g_{ij}(\infty) = 0$ ，则称 $g_{ij}(s)$ 是严格正则的。

非正则传递函数描述的系统在实际的控制工程中是不能应用的，因为这时系统对高频噪声将会大幅度放大。例如微分器 $g(s) = s$

为非正则系统，假如输入信号带有高频污染 $u(t) = \cos t + 0.01 \cos 1000t$
经过微分器输出 $y(t) = \frac{d}{dt}u(t) = -\sin t - 10 \sin 1000t$

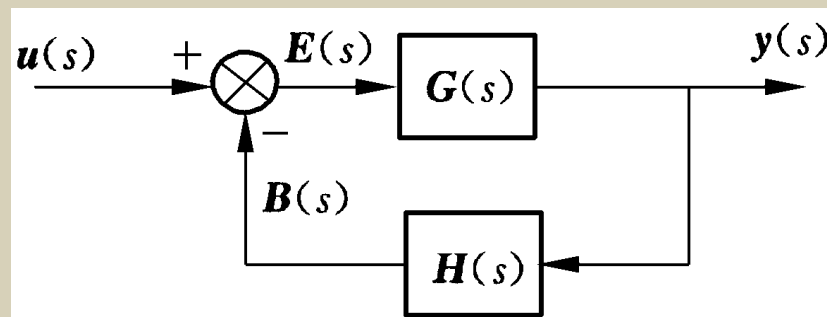
可见，在微分器输入端，噪声的幅值只是有效信号幅值的百分之一，输出端噪声的幅值却是有效信号幅值的**10倍**，信噪比变得很小。

1.3.4 闭环系统传递函数矩阵

$$E(s) = u(s) - B(s)$$

$$B(s) = H(s)y(s) = H(s)G(s)E(s)$$

$$y(s) = [I + G(s)H(s)]^{-1} G(s)u(s)$$



于是闭环系统的传递矩阵为

$$G_H(s) = [I + G(s)H(s)]^{-1} G(s)$$

或

$$G_H(s) = G(s)[I + H(s)G(s)]^{-1}$$

1.3.5 传递函数（矩阵）描述和状态空间描述的比较

- 1) 传递函数是系统在初始松弛的假定下输入-输出间的关系描述，非初始松弛系统，不能应用这种描述；状态空间表达式即可以描述初始松弛系统，也可以描述非初始松弛系统。
- 2) 传递函数仅适用于线性定常系统；而状态空间表达式可以在定常系统中应用，也可以在时变系统中应用。
- 3) 对于数学模型不明的线性定常系统，难以建立状态空间表达式；用实验法获得频率特性，进而可以获得传递函数。
- 4) 传递函数仅适用于单入单出系统；状态空间表达式可用于多入多出系统的描述。
- 5) 传递函数只能给出系统的输出信息；而状态空间表达式不仅给出输出信息，还能够提供系统内部状态信息。

综上所述，传递函数（矩阵）和状态空间表达式这两种描述各有所长，在系统分析和设计中都得到广泛应用。

1.4 离散系统的数学描述

1.4.1 状态空间表达式

1. 差分方程中不含有输入量差分项

首先，考察三阶差分方程

$$y(k+3) + a_2y(k+2) + a_1y(k+1) + a_0y(k) = b_0u(k)$$

选取状态变量 $x_1(k) = y(k)$

$$x_2(k) = y(k+1) = x_1(k+1)$$

$$x_3(k) = y(k+2) = x_2(k+1)$$

$$x_3(k+1) = y(k+3) = -a_2x_3(k) - a_1x_2(k) - a_0x_1(k) + b_0u(k)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(k)$$

可以表示为 $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$

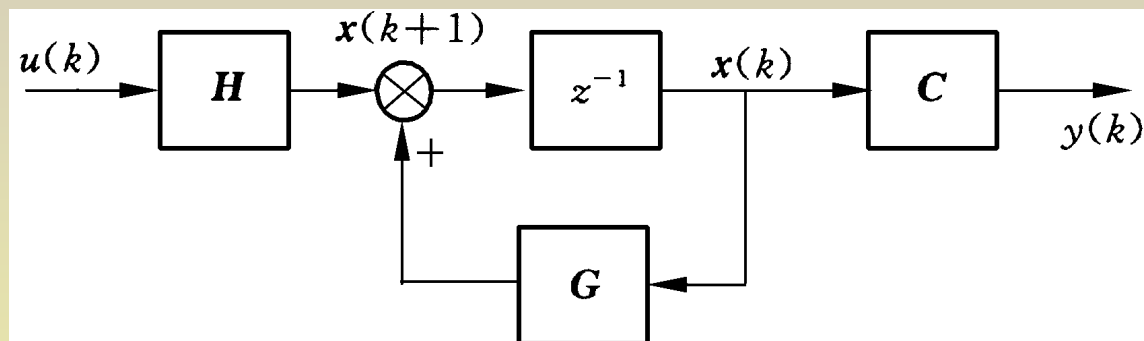
其中

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

输出方程

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

或者 $y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$ 其中 $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



推广到n阶线性定常差分方程所描述的系统

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_1y(k+1) + a_0y(k) = b_0u(k)$$

选取状态变量 $y(k)$, $y(k+1)$, $\cdots \cdots$, $y(k+n-1)$

系统状态方程

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(k)$$

输出方程

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

2. 差分方程中含有输入量差分项

先考察3阶线性定常差分方程

$$\begin{aligned} & y(k+3) + a_2y(k+2) + a_1y(k+1) + a_0y(k) \\ &= b_3u(k+3) + b_2u(k+2) + b_1u(k+1) + b_0u(k) \end{aligned}$$

选择状态变量

$$x_1(k) = y(k) - \beta_0u(k)$$

$$x_2(k) = y(k+1) - \beta_0u(k+1) - \beta_1u(k) = x_1(k+1) - \beta_1u(k)$$

$$\begin{aligned} x_3(k) &= y(k+2) - \beta_0u(k+2) - \beta_1u(k+1) - \beta_2u(k) \\ &= x_2(k+1) - \beta_2u(k) \end{aligned}$$

待定系数为：

$$\beta_0 = b_3$$

$$\beta_1 = b_2 - a_2\beta_0$$

$$\beta_2 = b_1 - a_1\beta_0 - a_2\beta_1$$

$$\beta_3 = b_0 - a_0\beta_0 - a_1\beta_1 - a_2\beta_2$$

系统状态方程为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} u(k)$$

即：

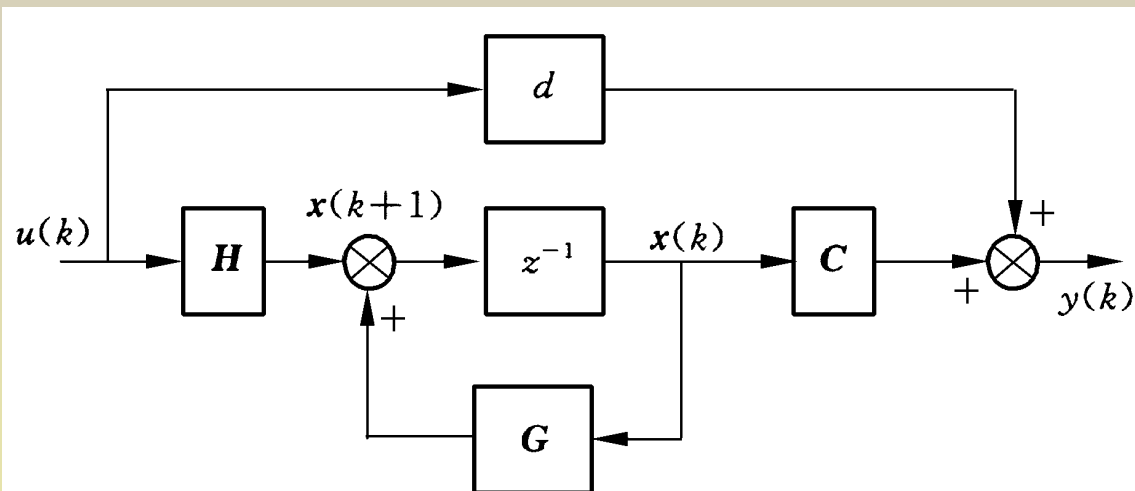
$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

输出方程为

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \beta_0 u(k)$$

即：

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + du(k)$$



多输入-多输出线性时变离散系统状态空间表达式

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k)$$

当 $\mathbf{G}(k)$ 、 $\mathbf{H}(k)$ 、 $\mathbf{C}(k)$ 和 $\mathbf{D}(k)$ 的诸元素与时刻 k 无关时，即得线性定常离散系统状态空间表达式

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

1.4.2 脉冲传递函数（矩阵）

对线性定常离散系统状态空间表达式进行 $\mathbf{z}$ 变换

$$\mathbf{z}\mathbf{x}(z) - \mathbf{z}\mathbf{x}(0) = \mathbf{G}\mathbf{x}(z) + \mathbf{H}\mathbf{u}(z)$$

$$[\mathbf{z}\mathbf{I} - \mathbf{G}]\mathbf{x}(z) = \mathbf{H}\mathbf{u}(z) + \mathbf{z}\mathbf{x}(0)$$

如果 $[\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{G}]^{-1}$ 存在，则

$$\mathbf{x}(z) = [\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{H}\mathbf{u}(z) + [\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{z}\mathbf{x}(0)$$

如果初始松弛，则

$$\mathbf{x}(z) = [s\mathbf{I} - \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{H} \mathbf{u}(z) = \mathbf{G}_{xu}(z) \mathbf{u}(z)$$

其中， $\mathbf{G}_{xu}(z) = [s\mathbf{I} - \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{H}$ 为系统状态对输入量的脉冲传递函数矩阵

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{C} \mathbf{x}(z) + \mathbf{D} \mathbf{u}(z) = \{\mathbf{C}[z\mathbf{I} - \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{D}\} \mathbf{u}(z) = \mathbf{G}_{yu}(z) \mathbf{u}(z)$$

系统输出向量对输入向量的脉冲传递函数矩阵

$$\mathbf{G}_{yu}(z) = \mathbf{C}[z\mathbf{I} - \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{D}$$

例1-9 已知线性定常离散系统方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -0.4 & 0.3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad \mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

求其脉冲传递函数矩阵

解

$$\mathbf{G}_{yu}(z) = \mathbf{C}[z\mathbf{I} - \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z & 1 \\ 0.4 & z - 0.3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z-1}{(z-0.8)(z+0.5)} \\ \frac{z}{(z-0.8)(z+0.5)} \end{bmatrix}$$

对于**SISO**线性定常离散系统

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{h}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + du(k) \end{aligned} \right\}$$

系统脉冲传递函数为

$$g_{yu}(z) = \mathbf{C}[z\mathbf{I} - \mathbf{G}]^{-1}\mathbf{h} + d$$

1.5 线性变换

我们知道，状态变量的选取是非唯一的。选择不同的状态变量，则得到的状态空间表达式也不相同。

由于它们都是同一个系统的状态空间描述，它们之间必然存在某种关系。这个关系就是矩阵中的线性变换关系。

求线性变换的目的：将系统矩阵变成为标准形，便于求解状态方程。

1.5.1 等价系统方程

1. 线性定常系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$\mathbf{x}$ 为 n 维状态向量； $\mathbf{u}$ 为 r 维输入向量； $\mathbf{y}$ 为 m 维输出向量；
 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{D}$ 为相应维数的矩阵。

引入非奇异变换矩阵 $\mathbf{P}$

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x} \quad \text{或者} \quad \mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{x}} \quad \text{代入方程 (1)}$$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{u} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}$$

其中

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{P}\mathbf{B} \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1} \quad \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$$

于是，系统状态方程变为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y &= \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

方程（1）与方程（2）互为等价方程

2. 线性时变系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x + D(t)u \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

引入变换矩阵 $P(t)$

$$\bar{x} = P(t)x \quad \text{或者} \quad x = P^{-1}(t)\bar{x}$$

对上式求导并代入

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \dot{P}(t)x + P(t)\dot{x} = \dot{P}(t)P^{-1}(t)\bar{x} + P(t)[A(t)x + B(t)u] \\ &= \dot{P}(t)P^{-1}(t)\bar{x} + P(t)A(t)P^{-1}(t)\bar{x} + P(t)B(t)u = \bar{A}(t)\bar{x} + \bar{B}(t)u \end{aligned}$$

可以得到

$$\bar{A}(t) = \dot{P}(t)P^{-1}(t) + P(t)A(t)P^{-1}(t) = [\dot{P}(t) + P(t)A(t)]P^{-1}(t)$$

$$\bar{B}(t) = P(t)B(t)$$

又由 $y(t) = C(t)x + D(t)u = C(t)P^{-1}(t)\bar{x} + D(t)u = \bar{C}(t)\bar{x} + \bar{D}(t)u$

可以得到 $\bar{C}(t) = C(t)P^{-1}(t) \quad \bar{D}(t) = D(t)$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}(t)\bar{x} + \bar{B}(t)u \\ y &= \bar{C}(t)\bar{x} + \bar{D}(t)u \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

方程（3）与方程（4）互为等价方程

1.5.2 线性变换的基本性质

1. 线性变换不改变系统的特征值

$$\left. \begin{array}{l} \text{线性定常系统} \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{array} \right\}$$

系统的特征方程为

$$\Delta(\lambda) = \det[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = 0$$

等价系统的特征方程为

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(\lambda) &= \det(\lambda \mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}) = \det(\lambda \mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}) \\ &= \det \mathbf{P} \cdot \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \det \mathbf{P}^{-1} = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \end{aligned}$$

可见线性变换不改变系统的特征值

2. 线性变换不改变系统的传递函数矩阵

$D = 0$ 时的传递函数矩阵

$$G_{yu}(s) = C[sI - A]^{-1} B$$

$$\begin{aligned}\bar{G}_{yu}(s) &= \bar{C}[sI - \bar{A}]^{-1} \bar{B} = CP^{-1}[sI - PAP^{-1}]^{-1} PB \\ &= C[P^{-1}(sI - PAP^{-1})P]^{-1} B = C[P^{-1}sIP - A]^{-1} B \\ &= C[sI - A]^{-1} B = G_{yu}(s)\end{aligned}$$

可见，经过线性变换，系统的传递函数矩阵不改变

1.5.3 化系数矩阵 A 为标准形

所谓标准形是指：对角形、约当形、模态形

设 λ_i 是 $n \times n$ 矩阵 A 的特征值，如果存在一个 n 维非零向量 q_i 使

$$Aq_i = \lambda_i q_i \quad (i=1,2,\dots,n) \quad \text{或} \quad (\lambda_i I - A)q_i = 0$$

成立，则称 q_i 为 A 的对应于特征值 λ_i 的特征向量

1. 化矩阵 A 为对角阵

若 n 个特征值互异，则令 $Q = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n]$

而 $P = Q^{-1} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n]^{-1}$

$$A = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

例1-10 将矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 化为对角阵

解

$$\det[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}] = \det \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -2 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

解出 $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

变换矩阵

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

如果矩阵 A 具有这样形式

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

范德蒙特矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

变换矩阵

$$P = Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}$$

2. 化矩阵 A 为约当形

如果矩阵 A 有重特征值，并且独立特征向量的个数小于 n ，这时不能化为对角阵，只能化为约当形。

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{bmatrix}_{n \times n} = \mathbf{PAP}^{-1}$$

确定变换矩阵

$$\mathbf{A}[\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_n] = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

可以得到：

$$\begin{aligned} [\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{q}_1 &= \mathbf{0} \\ [\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{q}_2 &= -\mathbf{q}_1 \\ [\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{q}_3 &= -\mathbf{q}_2 \\ &\vdots \\ [\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{q}_n &= -\mathbf{q}_{n-1} \end{aligned}$$

变换矩阵为 $P = Q^{-1} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n]^{-1}$

例1-12 化矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ 为标准形矩阵

解

$$\det[\lambda I - A] = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -2 & 5 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2) = 0$$

得出

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 2$$

求二重特征根对应的特征向量 $[\lambda_1 I - A]q_1 = 0$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix} \right\} q_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -3 \end{bmatrix} q_1 = 0$$

得到 $\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

而由 $[\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{q}_2 = -\mathbf{q}_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{q}_2 = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{得到} \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

求特征值 λ_3 对应的特征向量 $[\lambda_3 \mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{q}_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{q}_3 = 0 \quad \text{得到} \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

因此 $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \mathbf{q}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{J} = \mathbf{PAP}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. 化矩阵 A 为模态阵

当特征值为共轭复数时，可以将矩阵化为模态阵

设特征值为 $\lambda_1 = \sigma + j\omega$ $\lambda_2 = \sigma - j\omega$

在此情况下， A 的模态形为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

设 $\mathbf{q}_1$ 为对应于 $\lambda_1 = \sigma + j\omega$ 的特征向量, 则 $(\sigma + j\omega)\mathbf{q}_1 = \mathbf{A}\mathbf{q}_1$

令 $\mathbf{q}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + j\boldsymbol{\beta}_1$

则 $\mathbf{Q} = [\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_1]$ 变换矩阵 $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} = [\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_1]^{-1}$

例1-13 将 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -17 & -4 \end{bmatrix}$ 化为模态形

解 $\Delta(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ 17 & \lambda + 4 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0$

特征值为 $\lambda_1 = -3 + j4$ $\lambda_2 = -3 - j4$

$(-3 + j4) \begin{bmatrix} \alpha_1 + j\beta_1 \\ \alpha_2 + j\beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -17 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 + j\beta_1 \\ \alpha_2 + j\beta_2 \end{bmatrix}$ 解得 $\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

因此 $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$ $\mathbf{PAP}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$

1.6 组合系统的数学描述

工程中较为复杂的系统，通常是由若干个子系统按某种方式连接而成的。这样的系统称为组合系统。

组合系统形式很多，在大多数情况下，它们由并联、串联和反馈等3种连接方式构成的。

下面以两个子系统 S_1 和 S_2 构成的组合系统进行介绍。

S_1 的系统方程为 $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}_1$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1 \mathbf{u}_1$$

传递函数矩阵为 $\mathbf{G}_1(s) = \mathbf{C}_1 [s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1]^{-1} \mathbf{B}_1 + \mathbf{D}_1$

S_2 的系统方程为 $\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_2$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_2 \mathbf{u}_2$$

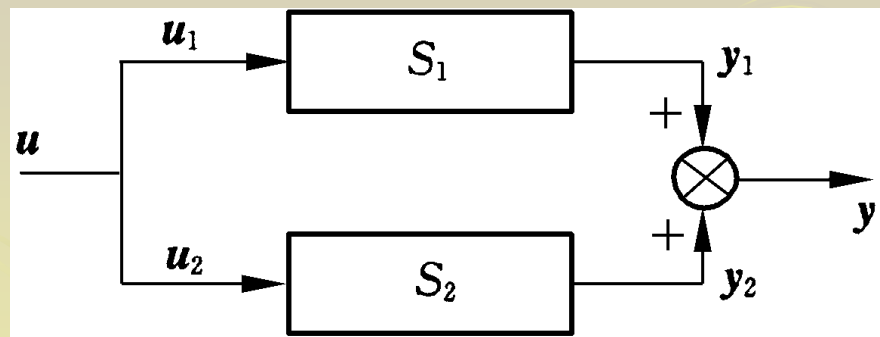
传递函数矩阵为 $\mathbf{G}_2(s) = \mathbf{C}_2 [s\mathbf{I} - \mathbf{A}_2]^{-1} \mathbf{B}_2 + \mathbf{D}_2$

1.6.1 并联连接

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$$

系统方程

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + [\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2] \mathbf{u}$$

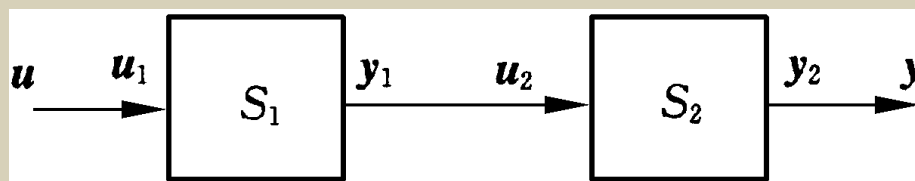


传递函数矩阵 $\mathbf{G}_{yu}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & s\mathbf{I} - \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} + [\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2]$

$$= \mathbf{C}_1 [s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1]^{-1} \mathbf{B}_1 + \mathbf{D}_1 + \mathbf{C}_2 [s\mathbf{I} - \mathbf{A}_2]^{-1} \mathbf{B}_2 + \mathbf{D}_2$$

$$= \mathbf{G}_1(s) + \mathbf{G}_2(s)$$

1.6.2 串联连接



$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1 \mathbf{u}_1 = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1 \mathbf{u}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{y}_1$$

$$= \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 (\mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1 \mathbf{u}) = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_1 \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_2 \mathbf{y}_1$$

$$= \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_2 (\mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1 \mathbf{u}) = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_2 \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_2 \mathbf{D}_1 \mathbf{u}$$

串连组合后系统方程

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2\mathbf{D}_1 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{D}_2\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{D}_2\mathbf{D}_1 u$$

传递函数矩阵 $\mathbf{y}(s) = \mathbf{G}_2(s)\mathbf{y}_1(s) = \mathbf{G}_2(s)\mathbf{G}_1(s)\mathbf{u}(s) = \mathbf{G}_{yu}(s)\mathbf{u}(s)$

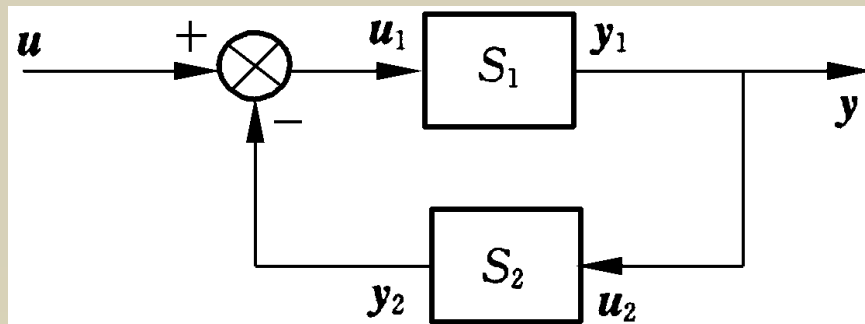
所以 $\mathbf{G}_{yu}(s) = \mathbf{G}_2(s)\mathbf{G}_1(s)$

1.6.3 反馈连接

组合后系统方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & -\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{C}_1 \quad 0] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$$



传递函数矩阵为 $\mathbf{G}_{yu}(s) = [I + \mathbf{G}_1(s)\mathbf{G}_2(s)]^{-1} \mathbf{G}_1(s)$ (1-125)

或 $\mathbf{G}_{yu}(s) = [I + \mathbf{G}_2(s)\mathbf{G}_1(s)]^{-1} \mathbf{G}_1(s)$ (1-126)

应当指出，在反馈连接的组合系统中， $[I + G_1(s)G_2(s)]^{-1}$ 或 $[I + G_2(s)G_1(s)]^{-1}$ 存在的条件是至关重要的。否则反馈系统对于某些输入就没有一个满足式 (1-125) 或式 (1-126) 的输出。就这个意义来说，反馈连接就变得无意义了。

1.7 利用MATLAB进行模型转换

MATLAB是当今世界上最优秀的科技应用软件之一，它以强大的科学计算能力和可视化功能，简单易用的编程语言以及开放式的编程环境等一些显著的优点，使得它在当今许许多多科学技术领域中成为计算机辅助分析和设计、算法研究和应用开发的基本工具和首选平台。在本书中，用它作为系统分析和设计的软件平台，更显示出独特的优势。

本节利用**MATLAB**实现数学模型的转换。

1.7.1 传递函数与状态空间表达式之间的转换

1. 连续系统状态空间表达式

可以用**ss**命令来建立状态空间模型。对于连续系统，其格式为 **sys=ss(A,B,C,D)**，其中**A**，**B**，**C**，**D**为描述线性连续系统的矩阵。

当**sys1**是一个用传递函数表示的线性定常系统时，可以用命令**sys=ss(sys1)**，将其转换成为状态空间形式。也可以用命令**sys=ss(sys1,'min')**计算出系统**sys**的最小实现。

例1-15 控制系统微分方程为

$$y^{(4)} + 10\ddot{y} + 35\dot{y} + 50y = \ddot{u} + 7\dot{u} + 24u + 24u$$

求其状态空间表达式。

解 可以先将其转换成传递函数

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s^3 + 7s^2 + 24s + 24}{s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24}$$

输入下列命令

```
num=[1 7 24 24]; den=[1 10 35 50 24]; % 分子、分母多项式
G=tf(num, den); % 获得系统的传递函数模型
sys=ss(G)
```

语句执行结果为

a =				
	x1	x2	x3	x4
x1	-10	-2.188	-0.7813	-0.1875
x2	16	0	0	0
x3	0	4	0	0
x4	0	0	2	0

b =	
	u1
x1	1
x2	0
x3	0
x4	0

```
c =
      x1      x2      x3      x4
y1      1  0.4375  0.375  0.1875
```

```
d =
      u1
y1      0
Continuous-time model.
```

这个结果表示，该系统的状态空间表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -10 & -2.188 & -0.7813 & -0.1875 \\ 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0.4375 \quad 0.375 \quad 0.1875] \mathbf{x} + [0] u$$

注意，在输入命令中，**sys=ss(G)**也可以改用**[A,B,C,D]=tf2ss(num,den)**，在本例中其作用和**sys=ss(G)**近似，也可以计算出矩阵**A、B、C、D**。

2. 离散系统的状态空间表达式

离散系统的状态空间表达式为
$$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) = Cx(k) + du(k) \end{cases}$$

和连续系统状态空间表达式的输入方法相类似，如果要输入离散系统的状态空间表达式，首先需要输入矩阵**G**、**H**、**C**、**d**，然后输入语句 $sys = ss(G, H, C, d, T)$ ，即可将其输入到**MATLAB**的**workspace**中，并且用变量名来表示这个离散系统，其中**T**为采样时间。如果**Gyu**表示一个以脉冲传递函数描述的离散系统，也可以用**ss(Gyu)**命令，将脉冲传递函数模型转换成状态空间表达式。

例1-16 假设某离散系统的脉冲传递函数为

$$G_{yu}(z) = \frac{0.31z^3 + 0.57z^2 + 0.38z + 0.89}{z^4 + 3.23z^3 + 3.98z^2 + 2.22z + 0.47}$$

采样周期为 $T = 0.1s$ ，将其输入到**MATLAB**的**workspace**中，并且绘制零、极点分布图。并且将该离散系统脉冲传递函数模型转换成状态空间表达式。

解

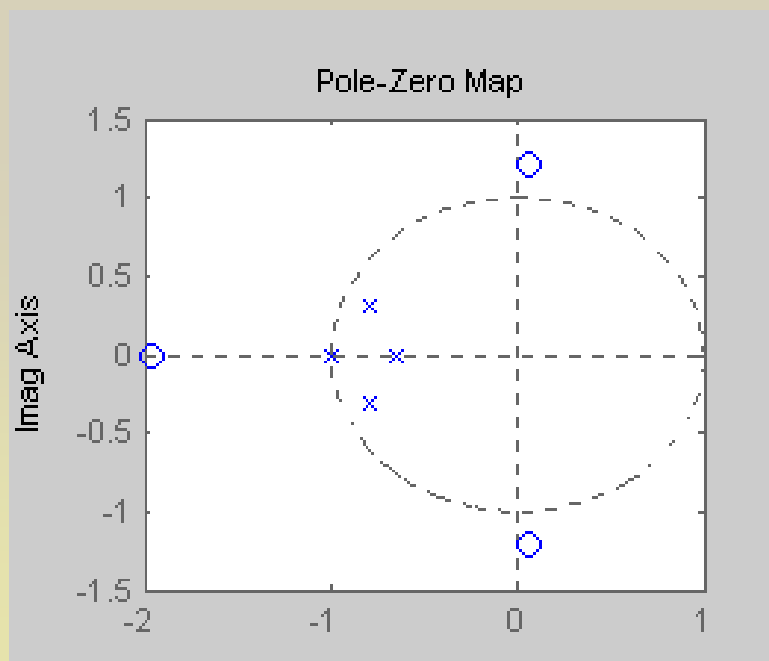
输入下列语句

```
num=[0.31 0.57 0.38 0.89];  
den=[1 3.23 3.98 2.22 0.47];  
Gyu=tf(num,den,'Ts',0.1) % 输入并且现实系统脉冲传递函数
```

语句执行的结果为

```
Transfer function:  
    0.31 z^3 + 0.57 z^2 + 0.38 z + 0.89  
-----  
    z^4 + 3.23 z^3 + 3.98 z^2 + 2.22 z + 0.47  
  
Sampling time: 0.1
```

再输入语句 `pzmap(Gyu)` 绘制出零、极点分布图如下



在执行完上述语句后，**Gyu**已经存在于**MATLAB**的**workspace**中，这时再执行语句 `sys=ss (Gyu)`

执行结果为

```
a =  
      x1      x2      x3      x4  
x1  -3.23  -1.99  -0.555  -0.235  
x2      2      0      0      0  
x3      0      2      0      0  
x4      0      0      0.5    0
```

```
c =  
      x1      x2      x3      x4  
y1  0.31  0.285  0.095  0.445
```

```
b =  
      u1  
x1      1  
x2      0  
x3      0  
x4      0
```

```
d =  
      u1  
y1      0  
  
Sampling time: 0.1  
Discrete-time model.
```

结果表示，离散系统的状态空间表达式为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -3.23 & -1.99 & -0.555 & -0.235 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = [0.31 \quad 0.285 \quad 0.095 \quad 0.445] \mathbf{x}(k)$$

1.7.2 求传递函数矩阵

在已知线性定常系统中的**A**、**B**、**C**和**D**矩阵之后，则该系统的传递函数矩阵可以按下式求出

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = C[sI - A]^{-1}B + D$$

例1-17 已知系统状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

解

输入以下语句

```
syms s;      % 声明符号变量
A=[0 1; -2 -3]; B=[1 0; 1 1]; C=[2 1;1 1;-2 -1];
D=[3 0;0 0;0 1]; I=[1 0;0 1]; F=inv(s*I-A)
G=simple(simple(C*F*B)+D)
```

其中**inv()**函数是求矩阵的逆矩阵，而**simple()**函数是对符号运算结果进行简化。

执行结果如下

```
F =  
  
[ (s+3)/(s^2+3*s+2),      1/(s^2+3*s+2)]  
[      -2/(s^2+3*s+2),      s/(s^2+3*s+2)]
```

```
G =  
  
[ 3/(s+1)+3,      1/(s+1)]  
[      2/(s+2),      1/(s+2)]  
[ -3/(s+1), -1/(s+1)+1]
```

这表示 $[sI - A]^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s + 3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$

$$G(s) = \begin{bmatrix} (3/(s+1)) + 3 & 1/(s+1) \\ 2/(s+2) & 1/(s+2) \\ -3/(s+1) & (-1/(s+1)) + 1 \end{bmatrix}$$

1.7.3. 线性变换

1. 化为对角矩阵

函数**eig()**可以计算出矩阵**A**的特征值以及将**A**阵转换成对角阵的线性变换矩阵。其语句格式为**[Q, D]=eig(A)**，则**D**为对角阵并且对角线上各元素为矩阵**A**的特征值，满足 $Q^{-1}AQ = D$ ，因为 $Q = P^{-1}$ 即： $PAP^{-1} = D$ 。

例1-18 线性控制系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

试作线性变换 $\mathbf{x} = P^{-1}\bar{\mathbf{x}} = Q\bar{\mathbf{x}}$ ，要求变换后系统矩阵**A**为对角阵。

解 先求出系统矩阵的特征值，**Q**阵可以选择为由特征值构成的范德蒙特矩阵。

输入语句

```
A=[0 1 0;0 0 1;-6 -11 -6]; eig(A)
```

可以求出**A**阵的特征值为 **-1**、**-2**和**-3**。 因此

$$Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

输入以下语句

```
A=[0 1 0;0 0 1;-6 -11 -6]; B=[0;0;1];
Q=[1 1 1;-1 -2 -3;1 4 9]; P=inv(Q);
A1=P*A*Q
B1=P*B
```

执行结果如下

A1 =

```
-1.0000    0.0000   -0.0000
 0.0000   -2.0000    0.0000
-0.0000   -0.0000   -3.0000
```

B1 =

```
 0.5000
-1.0000
 0.5000
```

由以上计算数据可得系统经过线性变换后的方程为

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 0.5 \end{bmatrix} u$$

也可以输入语句

```
A=[0 1 0;0 0 1;-6 -11 -6];[Q,D]=eig(A)
```

运行结果为

```
Q =
```

```
-0.5774    0.2182   -0.1048  
 0.5774   -0.4364    0.3145  
-0.5774    0.8729   -0.9435
```

```
D =
```

```
-1.0000         0         0  
         0   -2.0000         0  
         0         0   -3.0000
```

再计算线性变换矩阵**P**，并且验证结果如下

```
>> P=inv(Q)
```

```
P =
```

```
-5.1962   -4.3301   -0.8660  
-13.7477  -18.3303   -4.5826  
 -9.5394  -14.3091   -4.7697
```

```
>> A1=P*A*Q
```

```
A1 =
```

```
-1.0000   -0.0000    0.0000  
-0.0000   -2.0000   -0.0000  
-0.0000         0   -3.0000
```

```
>> B1=P*B
```

```
B1 =
```

```
-0.8660  
-4.5826  
-4.7697
```

可见，两种线性变换虽然不同，却都可以将**A**阵转换为对角阵

2. 化为约当矩阵

在MATLAB中用函数命令jordan()来求矩阵的约当标准形。其命令格式为：**[Q, J]=jordan(A)**。输入参量**A**是系数矩阵，输出参量**J**是矩阵**A**的约当标准形矩阵，而 $P = Q^{-1}$ 就是线性变换矩阵，满足 $J = Q^{-1} \cdot A \cdot Q = P \cdot A \cdot P^{-1}$ 。

例1-19 将 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ 化为标准形矩阵。

解 首先输入语句 `A=[0 1 0;0 0 1;2 -5 4];[Q,D]=eig(A)`

运行结果为

```
Q =  
  
   -0.5774    0.5774   -0.2182  
   -0.5774    0.5774   -0.4364  
   -0.5774    0.5774   -0.8729
```

```
D =  
  
    1.0000         0         0  
         0    1.0000         0  
         0         0    2.0000
```

可见，不满秩，即矩阵**A**的特征值中有重特征值,并且**A**的独立特征向量的个数小于**n**。

因此输入语句

```
A=[0 1 0;0 0 1;2 -5 4];[Q,J]=jordan(A)
```

语句执行结果为

Q =

1	-2	0
2	-2	-2
4	-2	-4

J =

2	0	0
0	1	1
0	0	1

计算结果表明，矩阵**A**的约当阵为 $J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

我们验证如下

```
A=[0 1 0;0 0 1;2 -5 4];Q=[1 -2 0;2 -2 -2;4 -2 -4];  
P=inv(Q);J1=P*A*Q
```

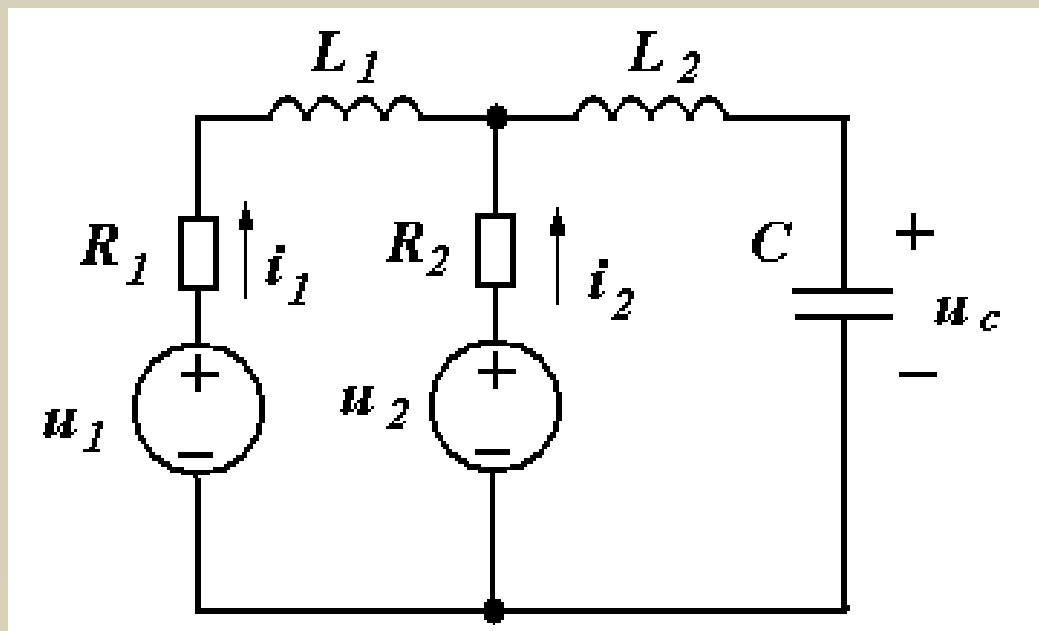
执行结果为

J1 =

2	0	0
0	1	1
0	0	1

所计算出的结果表明，满足 $J = P \cdot A \cdot P^{-1}$

补充例题：系统如图所示，初始状态松弛，其中 u_1 、 u_2 为输入， u_C 为输出。 $R_1 = 15\Omega$ 、 $R_2 = 20\Omega$ 、 $L_1 = 0.2H$ 、 $L_2 = 1H$ 、 $C = 2 \times 10^{-7}F$ 。请建立系统的状态空间表达式。



第1章 结束

