

高等数学 I 习题课 16

级数

上海科技大学

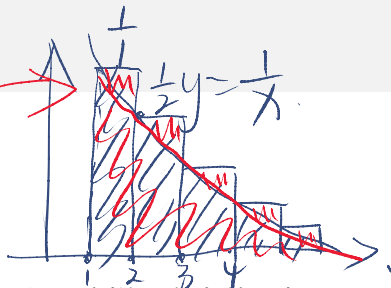
2025.12.30

目录

- ① 数项级数
- ② 正项级数
- ③ 交错级数

在开始之前...

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$



$$< \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

- 既然我们已经有了积分这样强有力的分析工具，为什么还需要级数这样一种间断的求和方法？
- 电子设备只能将实时信号转化为离散形式，再进行处理与分析

目录

1 数项级数

2 正项级数

3 交错级数

定义

给定数列 $\{a_n\}$ ，称和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$


 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i$

为**无穷级数**，简称**级数**。和式中的每一项称为级数的项， a_n 称为级数的通项或一般项。

有限项和

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$



称为级数的前 n 项部分和。

敛散性

$$n \rightarrow +\infty, \ln n = \left(S_n \right) \rightarrow +\infty$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln n.$$

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 则称级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且收敛到 S .

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

若 $\{S_n\}$ 发散则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

级数的线性运算

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S, c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c a_n = cS$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = T \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S + T$$

敛散性的不变性

$$(1, -1), (1, +), (1, -), (1, -)$$

- 增、删、改有限项，级数的敛散性不变

- ★ 若级数收敛到 S ，则对其相邻若干项加括号并为一项后，级数仍然收敛到 S

- 收敛到 0
- 若级数收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ $\rightarrow a_n$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} \left(\underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_0 - \underbrace{\frac{1}{3} + \dots}_0 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

例

判断以下级数的敛散性，并求收敛级数的和

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{6^n}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$U) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{6^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)}{1 - \frac{1}{2}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{1}{3} \right) \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right)}{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1} &= \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \cdots \\
 &= \ln \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{\cancel{3}}{4} \cdots \frac{\cancel{n}}{n+1} = \ln \frac{1}{n+1} \\
 &\rightarrow -\infty \quad \text{D}
 \end{aligned}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \rightarrow \text{diverge.}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{\overset{\downarrow}{n}} \cdot \textcircled{(-1)} \\
 &= e^{-1} = \frac{1}{e}.
 \end{aligned}$$

目录

1 数项级数

2 正项级数

3 交错级数

收敛原理

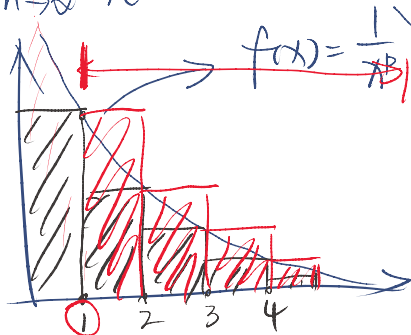
- 正项级数: $\forall n, a_n \geq 0$ 的级数
- 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界
- 推论: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足: $\exists N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n \geq 0$, 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

p 级数当 $p > 1$ 收敛. 当 $p \leq 1$ 发散.讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0. \Leftrightarrow p > 0.$$

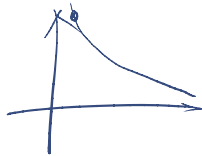
$$A < \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$



$$A > \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx.$$

$$\int x^{-p} dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} + C \quad p \neq 1$$

$F(x)$



$$A < F(+\infty) - \underbrace{F(0)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p < 1 \\ p > 1 \end{array} \right. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} = \infty$$

$$F(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} = 0$$

$$F(0) = -\infty$$

$$\underbrace{A} > F(+\infty) - F(1) = \underbrace{F(+\infty)} - \frac{1}{-p+1} \quad \underbrace{p > 1}$$

比较判别法

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均为正项级数, 且 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 使得当 $n > N$ 时,

$$a_n \leq b_n$$

那么:

- 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;
- 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

比较判别法的极限形式

$$(1-\delta)S \sim (1+\delta)S$$



$$k_1 b_n < a_n < k_2 b_n \quad (1-\delta) < \frac{a_n}{b_n} < (1+\delta)$$

设 $a_n \geq 0$ 且 $b_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}^+$), 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ (或 $+\infty$), 那么

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 有相同的敛散性;

(2) 当 $l = 0$ 时, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛可得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(3) 当 $l = +\infty$ 时, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散可得 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

p-判别法

$$b_n \rightarrow \frac{1}{n^p} \quad \frac{a_n}{b_n}$$

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n = l$ (或 $+\infty$), 那么

(1) 当 $0 \leq l < +\infty$, 且 $p > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 当 $0 < l \leq +\infty$, 且 $p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

b_n 收敛

b_n 发散

例 11.9, 11.10

判断下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 - n + 1}} \quad a_n$$

$$U.D. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 - n + 1}} \cdot n^{\frac{3}{2}} = 1. \quad l=1 \quad p=\frac{3}{2}.$$

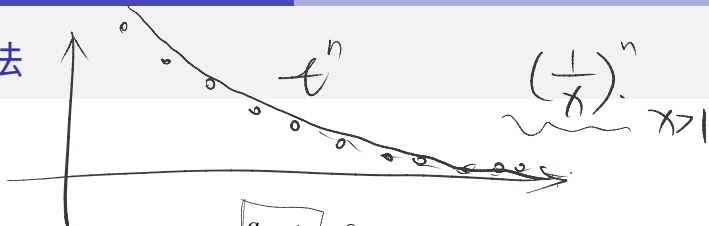
$$a_n \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$(2) \underbrace{a^{\ln \frac{1}{n}}}_{=} = e^{\ln a \cdot \ln \frac{1}{n}} = \underbrace{\left(\frac{1}{n} \right)^{\ln a}}_{=}$$

$$p = \ln a \quad n^{\ln a}$$

$$\begin{cases} \ln a > 1 \\ a > e \\ \text{收敛.} \end{cases} \quad \begin{cases} \ln a \leq 1 \\ 0 < a \leq e \\ \text{发散.} \end{cases}$$

比值判别法



设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ (或 $+\infty$), 那么

(1) 当 $0 \leq l < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 当 $1 < l < +\infty$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

注意: $l = 1$ 则不可用此方法判断

$$a_{n+1} = l a_n$$

$$a_{n+2} = l a_{n+1} = l^2 \cdot a_n$$

$$a_{n+k} = l^k a_n$$

$$a_n = 1 \quad l = 1 \quad \frac{1}{n} \checkmark$$

根值判别法

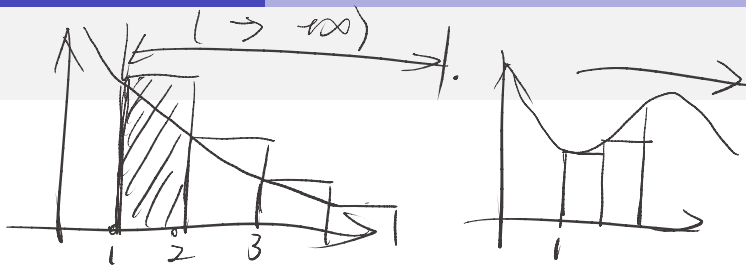
设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ (或 $+\infty$)，那么

$l < 1$
 $a_n \neq l^n$
 $l > 1$

- (1) 当 $0 \leq l < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；
- (2) 当 $1 < l < +\infty$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

注意： $l = 1$ 则不可用此方法判断

积分判别法



设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数，若非负函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调减少，且

$\forall n \in \mathbb{Z}^+, a_n = f(n)$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 的敛散性相同。

例

判断下列级数的敛散性：

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(2n \arcsin \frac{1}{n} \right)^{n/2}$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2 + 1}$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 = \frac{1}{3} < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n^3}{n}} = e^{\frac{\ln n \cdot 3}{n}} = \frac{1}{3} < 1$$

$$2n \arctan n > 1$$

$$\frac{1 - 2n \arctan n}{(n^2 + 1)^2}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{3}{e} > 1$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(2n \arcsin \frac{1}{n}\right)^{n/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n \arcsin \frac{1}{n}}$$

$$= \sqrt{2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}} = \sqrt{2} > 1.$$

$$(4) \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1} dx = \int_1^{+\infty} \arctan x d \arctan x = \frac{(\arctan x)^2}{2} \Big|_1^{+\infty}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\pi^2}{32} < 1.$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{(2n-3)!!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} = 2 > 1.$$

习题 11 T10

$$(6) \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx^2 = -\frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} \Big|_1^{+\infty}$$

证明:

$$0 - (-\frac{1}{2} \cdot e^{-1}) = \frac{1}{2e}$$

(1) 若 $a_n \geq 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛

$$S^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)^2 = \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 + 2a_1a_2 + \cdots + 2a_{n-1}a_n \right)$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \Rightarrow S^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

习题 11 T10

证明:

(2) 若 $a_n \geq 0$, 且数列 $\{na_n\}$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = l. \quad \exists N, \delta, \forall n > N, \quad 0 < na_n < l + \delta$$

$$a_n < \frac{M}{n} \quad a_n^2 < \frac{M^2}{n^2} \quad \sum_{n=N}^{\infty} a_n^2 < M^2 \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

习题 11 T10

证明:

(3) 若 $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 和

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ 都收敛;

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_A \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}_B = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_n b_n + \underbrace{a_1 b_2 + a_1 b_3 + \cdots}_{\geq 0}) \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

习题 11 T10

证明:

(4) 若 $a_n \geq 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 收敛

$\sum a_n^2$ 收敛. $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛.

$$\sum \frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{2} \left(\underbrace{\sum a_n^2}_{\Delta} + \underbrace{\sum \frac{1}{n^2}}_{\Delta} \right).$$

习题 11 T10

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = l$$

(5) 若数列 $\{na_n\}$ 收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\underbrace{a_1}_{-a_0} - \underbrace{a_0}_{-a_1} + \underbrace{2a_2}_{-a_1} - \underbrace{a_1}_{-a_2} + \underbrace{3a_3}_{-3a_2} - \underbrace{3a_2}_{-3a_3} + \cdots + \underbrace{na_n}_{-na_{n-1}} - \underbrace{na_{n-1}}_{-na_n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-a_0 - a_1 - a_2 - \cdots - a_{n-1} \right) + na_n$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} na_n$$

目录

- 1 数项级数
- 2 正项级数
- 3 交错级数**

Leibniz 判别法



各项正负相间，即形如 $\pm \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ ($a_n > 0$) 的级数称为交错级数。

若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 满足：

(1) $0 < a_{n+1} \leq a_n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$)

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

单调递减，趋于0。

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛，且其余项级数满足

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k \right| \leq a_{n+1}$$

绝对收敛与条件收敛

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是任意项级数. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛;

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

绝对收敛级数的性质

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 那么任意交换其各项的次序所得的新级数仍绝对收敛, 且其和不变.

条件收敛的级数无此性质.

例

考察交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ 的敛散性.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad p = \frac{1}{2}. \text{ 发散.}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{A} 0. \Rightarrow \text{收敛.}$$

例

判断下列级数的敛散性，并说明是绝对收敛还是条件收敛

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln \frac{n}{n+1}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-3n}{3+4n} \right)^n$$

$$(4) \sum_{n=2}^{\infty} \sin \left(n\pi + \frac{1}{\ln n} \right)$$

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} \Rightarrow$ 不绝对收敛. $\ln(1+\frac{1}{n})$ 条件收敛.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{(2n-2)!!}{(2n-5)!!} = \frac{2n-3}{2n} = 1 - \frac{3}{2n} < 1 \quad \text{收敛}$$

$$(3) \quad \left(\frac{1-3n}{3+4n} \right)^n = \left(\frac{3n-1}{3+4n} \right)^n (-1)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{4n+3} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{4n+3} = \frac{3}{4} < 1 \quad \begin{array}{l} \text{绝对} \\ \text{收敛} \end{array}$$

$$(4) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \sin\left(n\pi + \frac{1}{n\pi}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} \cdot \cos \frac{1}{n\pi} + \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n\pi}\right) \right)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin\left(\frac{1}{n\pi}\right) \quad \text{条件收敛}$$

$$\frac{\infty}{2} \sin\left(\frac{1}{\ln n}\right), \quad n=2 \quad \frac{1}{\ln 2} < \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\left(\frac{1}{\ln n}\right) \sim \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$$

