

前 言

随着现代科学技术的不断进步,机械设备向大型化、高速化、连续化和自动化发展,工业产品向高、精、尖发展已成为不争的事实。机械结构的振动问题日益受到关注,研究和解决各种振动问题成为当前工程技术领域的重要课题。以往结构设计只做简单的静力校核的方法在许多情况下已不能满足要求,而应当根据结构的动态特性进行产品设计。随着计算机技术和实验测试技术的飞速进步,人类已经拥有解决机械振动问题的方法和手段。作为现代工程技术人员,应该而且必须具备必要的机械振动知识。

本书是在多年教学基础上编写的,曾作为讲义在南京工业大学机械学院内部使用。编写时考虑了当前工科院校高年级本科生数学和力学的实际水平,对传统机械振动教材做了必要的取舍,主要讨论离散系统的线性振动理论,简要介绍了非线性振动理论。离散系统的线性振动理论用途最广,而且较易学习。考虑到学生的数学基础,本书没有涉及连续体振动问题,而是着重介绍了机械振动理论在工程实践中的应用。

全书共分6章。第1章介绍了机械振动的基本概念和学习所需的一些数学、力学知识。第2章全面介绍了单自由度系统的振动理论,包括自由振动,简谐强迫振动,周期振动、瞬态振动和随机振动;介绍了单自由度系统振动理论的工程应用,包括隔振防振、动平衡技术、转子临界转速及振动机械的运用;简单介绍了单自由度非线性系统振动。通过第2章的学习可了解掌握振动学的基本理论及对其重要性的认识。第3章介绍了二自由度系统自由振动、强迫振动及动力吸振器,涉及多自由度有关耦合、振型和主坐标的概念。第4章对多自由度系统振动理论给予较完整的叙述。包括运动方程的建立、坐标变换,多自由度系统振动问题求解的振型叠加法、求固有频率的矩阵迭代法和其他方法。第5章介绍了机械振动实验基础知识,包括振动实验设备和测试仪器的技术特点、振动特性参数的测量方法和信号分析技术基础。第6章介绍机械振动理论在机械故障诊断中的应用,介绍了旋转机械的状态监测和振动信号处理技术、转子各种故障的机理和振动信号特征,齿轮和滚动轴承等典型零部件的故障机理和

特征。同时,书中给出了一定量的思考题和习题。

本书由顾海明、周勇军合编;顾海明主编。顾海明编写了本书第2、4、5、6章,周勇军编写了第1、3章。研究生原成泽、顾佳玲、牛福春和朱翔参加了本书绘图及部分文字工作。

编写过程中得到了南京工业大学教务处和机械学院领导及许多老师的支持。编写时参考了大量国内外出版的有关书籍资料。作者在此向他们表示衷心的感谢。

由于作者水平所限,书中难免有错误和不当之处,欢迎读者批评指正。

编 者

2006 年 11 月

于南京工业大学

目 录

第 1 章 机械振动的基本概念	001
1.1 机械振动的研究内容及研究方法	001
1.1.1 机械振动的研究内容	001
1.1.2 机械振动的研究方法	001
1.2 机械振动的定义和表示方法	002
1.2.1 简谐振动	003
1.2.2 简谐振动的矢量表示法	004
1.2.3 简谐振动的复数表示法	005
1.3 构成机械振动系统的基本要素	006
1.3.1 质量	007
1.3.2 弹性	007
1.3.3 阻尼	007
1.4 谐波分析	007
习题与思考题.....	010
第 2 章 单自由度系统的振动	011
2.1 单自由度系统的自由振动	011
2.1.1 无阻尼单自由度系统的自由振动	011
2.1.2 固有频率、等效质量和等效刚度	014
2.1.3 具有黏性阻尼单自由度系统的自由振动	020
2.2 单自由度系统的强迫振动	023
2.2.1 简谐激振力作用下系统的响应	023
2.2.2 转子偏心质量激振下系统的响应	029
2.2.3 支承简谐运动激振下系统的响应	030
2.2.4 机械阻抗的基本概念	032
2.2.5 简谐力做的功	033
2.3 非简谐激振产生的强迫振动	035
2.3.1 非简谐周期激振的响应	035
2.3.2 任意激振的响应	035
2.3.3 频谱分析	039
2.4 单自由度系统振动理论的应用	042
2.4.1 振动的衰减与隔离措施	042
2.4.2 转轴的临界转速	044

2.4.3 转子的平衡	046
2.4.4 振动机械的应用	049
2.5 单自由度非线性系统振动简介	052
2.5.1 非线性振动的基本特性	052
2.5.2 非线性振动的分析方法	054
习题与思考题	057
第3章 二自由度系统振动的理论与应用	060
3.1 二自由度系统振动的运动方程	060
3.2 无阻尼二自由度系统的振动	061
3.2.1 无阻尼二自由度系统的自由振动	061
3.2.2 与自由振动有关的几种现象	065
3.2.3 无阻尼二自由度系统的强迫振动	067
3.3 有阻尼二自由度系统的振动	070
3.3.1 有阻尼二自由度系统的自由振动	070
3.3.2 有阻尼二自由度系统的强迫振动	071
3.3.3 求强迫振动方程稳态解的复数法	072
3.4 动力消振器	074
3.4.1 无阻尼动力消振器	074
3.4.2 有阻尼的消振器	076
3.5 坐标的耦合与解耦	078
3.5.1 广义坐标与耦合	078
3.5.2 解耦与主坐标	080
习题与思考题	081
第4章 多自由度系统的振动	083
4.1 多自由度系统的振动微分方程	083
4.1.1 作用力方程与刚度系数	083
4.1.2 位移方程和柔度系数	084
4.1.3 拉格朗日方程的应用	087
4.1.4 固有频率和主振型	090
4.2 主坐标与正则坐标	097
4.2.1 主振型的正交性	097
4.2.2 振型矩阵与正则振型矩阵	098
4.2.3 主坐标与正则坐标	101
4.3 多自由度系统对初始条件的响应	103
4.3.1 无阻尼系统对初始条件的响应	103
4.3.2 多自由度系统的阻尼	107
4.3.3 有阻尼系统对初始条件的响应	108
4.4 多自由度系统的对激振的响应	109
4.4.1 无阻尼系统对简谐激振的响应	109

4.4.2 系统对一般激振的响应	111
4.4.3 有阻尼系统对激振的响应	113
4.5 多自由度系统固有频率及主振型的计算	116
4.5.1 矩阵迭代法	116
4.5.2 邓柯莱法	121
4.5.3 瑞利法	122
习题与思考题	123
第5章 实验振动分析基础	125
5.1 概述	125
5.2 机械振动实验常用仪器设备	126
5.2.1 测振传感器	126
5.2.2 激振设备	128
5.2.3 数据采集和分析设备	129
5.3 振动特性参数的测量	130
5.3.1 测量前应考虑的问题	130
5.3.2 振动基本参数的测量	131
5.3.3 结构的动力参数的测量	131
5.3.4 实验模态分析	133
5.4 信号分析技术基础	134
5.4.1 振幅特征的描述	135
5.4.2 相关函数分析	135
5.4.3 功率谱分析	138
5.4.4 传递函数和相干函数	139
习题与思考题	141
第6章 振动理论在机器故障诊断中的应用	142
6.1 机器故障诊断技术概述	142
6.1.1 机器故障诊断的内容	142
6.1.2 机器故障诊断的主要方法	143
6.1.3 机器振动信号的处理	143
6.2 机器的振动故障诊断	144
6.2.1 旋转机械常用的状态监测和分析图形	144
6.2.2 几种旋转机械的振动评定标准	147
6.2.3 旋转机械典型故障的振动诊断	149
6.3 机器典型零部件的振动故障诊断	155
6.3.1 齿轮故障的基本形式与特征	155
6.3.2 滚动轴承故障及其特征	158
6.3.3 振动信号处理的一些特殊方法	162
习题与思考题	166
主要参考文献	168

第1章 机械振动的基本概念

1.1 机械振动的研究内容及研究方法

1.1.1 机械振动的研究内容

机械振动问题广泛地存在于机械工程的各个领域内,常见的问题有:如何提高机械系统的抗振能力;如何防止系统产生共振;如何避免系统的自振;不平衡惯性力引起振动的平衡问题;减振与隔振;冲击与冲击隔离;噪声控制和振动利用等。

随着近代振动理论的迅速发展,以及电子计算机和测试仪器的发展和完善,振动分析的方法和手段发生了飞跃性变革,任何复杂的机械和结构几乎都可以进行工程所需精度的分析。

许多振动现象是有益于人类的,例如电磁波的激发、乐器的发声和各种振动机械的运用等。但是在多数情况下,振动却带来有害的影响。由于振动,降低了机器的动态精度和使用性能。由于振动,导致机械使用寿命的降低和灾难性事故的发生。此外,由于振动而产生的噪声公害日益严重,使人烦躁、厌倦和疲劳,降低工作效率,影响人体健康。因此,研究振动对机械的使用和设计具有重要的实际意义,随着大型复杂的高速旋转机械的不断增多和工业发展水平的不断提高,这种研究的迫切性也就越来越显现了。

在振动研究中,一般把被研究的对象,小到一个零件,大到一个庞大的工程结构或机器,称为系统;把外界对系统的作用或机器运动所产生的力称为激振或输入;把系统在激振作用下产生的动态变化称为响应或输出。机械振动这门学科就是分析系统、激振和响应这三者之间的关系。随着测试仪器的发展和完善,振动的实验研究已发展成一种独立的解决问题的手段。振动问题的理论分析和实验研究,这两种方法的相互补充,为解决复杂机械振动问题创造了有利的条件。

振动研究所要解决的问题可归纳为以下几类:

(1) 响应分析。已知输入和系统的参数,求系统的响应,即求系统的振动位移、振动速度和振动加速度响应,为设计计算机械结构强度、刚度、允许的振动能量水平提供依据。

(2) 系统设计。已知系统的激振,设计合理的系统参数,满足预定要求的动态响应。

(3) 系统识别。在已知输入和输出的情况下求系统参数,对已有的机械系统进行激振,测得在激振下的响应,然后识别系统的结构参数。

(4) 环境预测。已知系统的输出及系统的参数,确定系统的输入,以判别系统的环境特性。

1.1.2 机械振动的研究方法

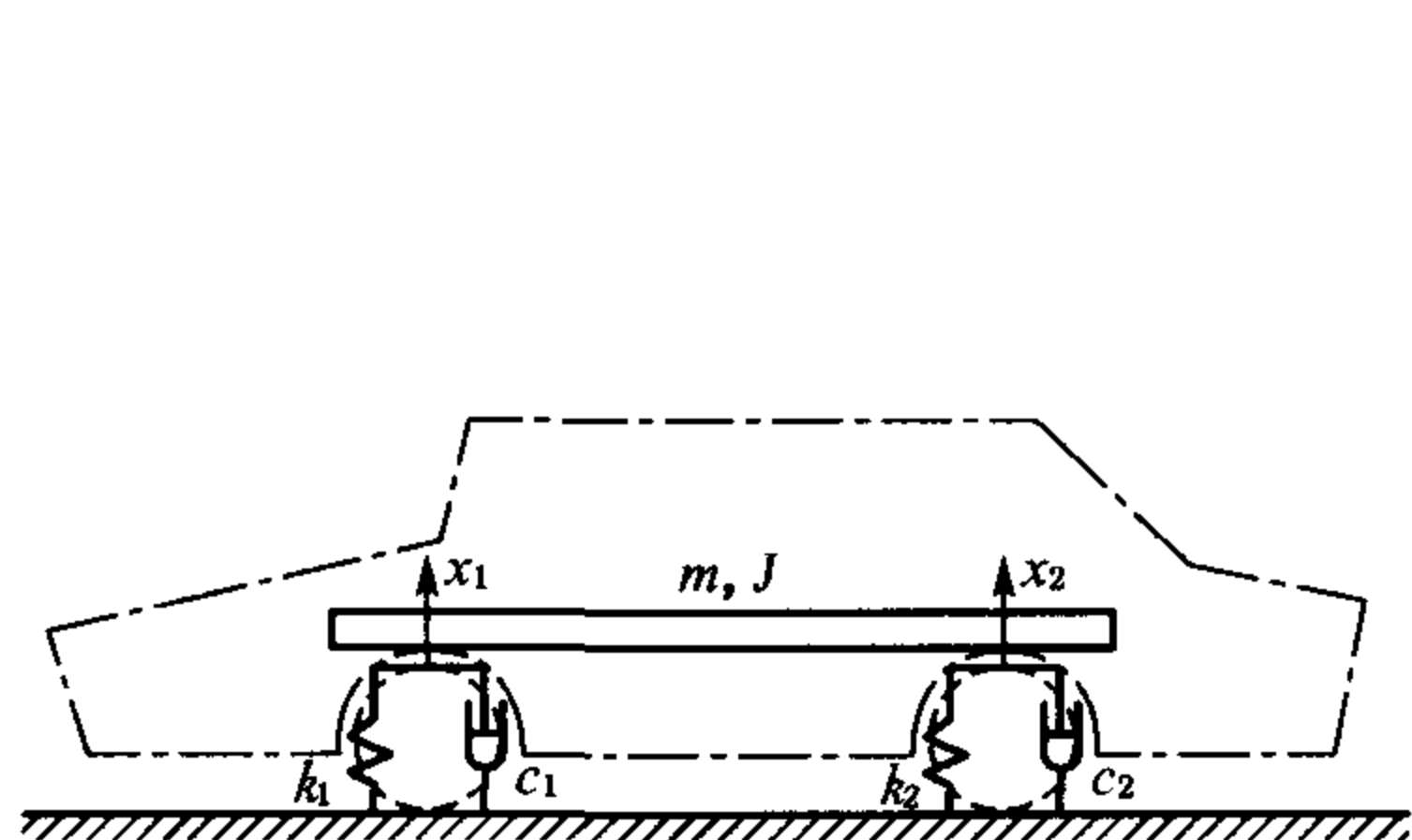
研究机械系统的振动问题,一般分为下列几个步骤:

1) 建立力学模型

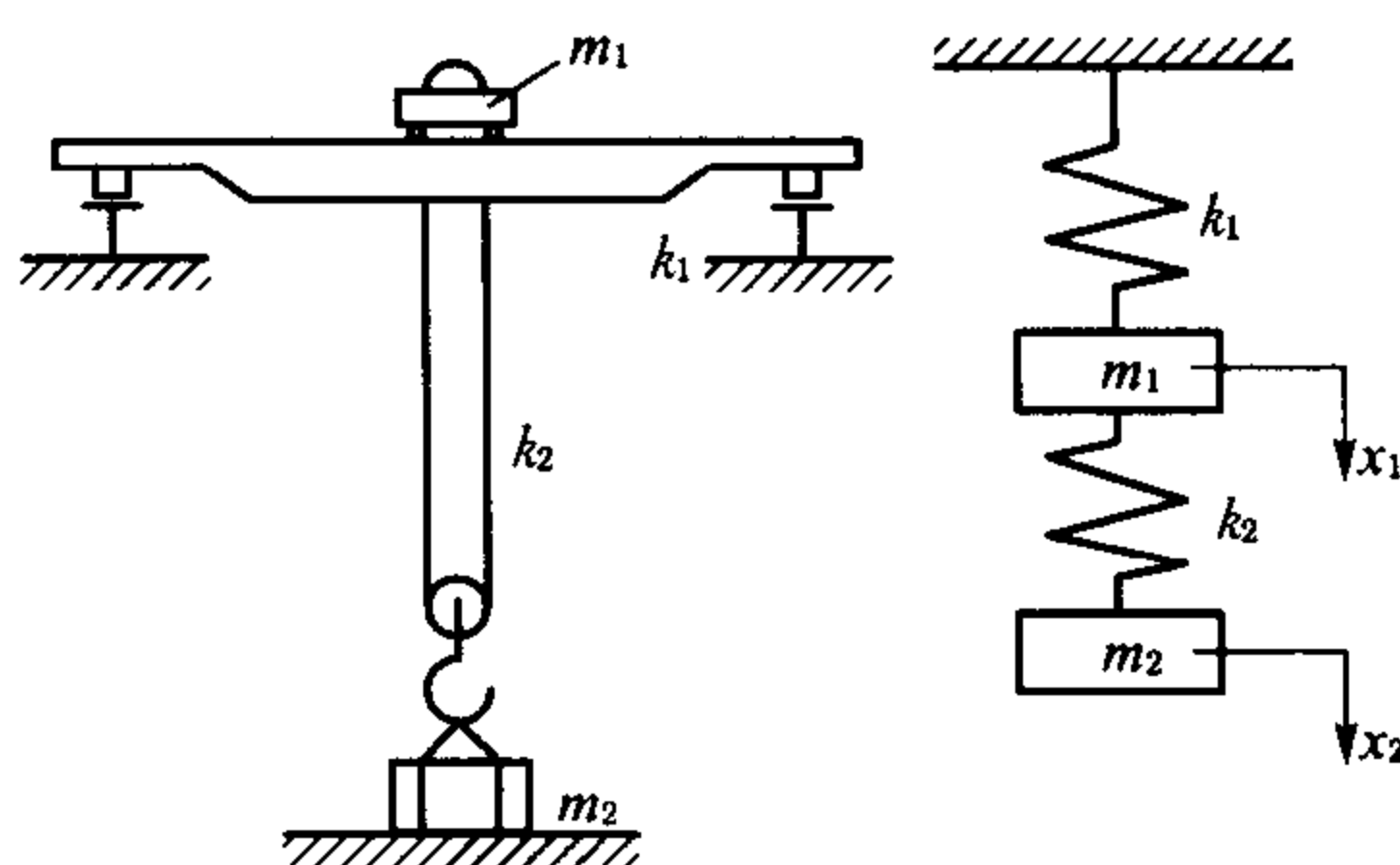
实际的机械振动系统往往是很复杂的,为便于分析和计算,必须抓住主要因素,而略去一些次要因素,将实际系统简化和抽象为动力学模型。简化的程度取决于系统本身的复杂程度、要求计算结果的准确性以及采用的计算工具和计算方法等。

动力学模型要表示系统的主要动态特性及外部激振情况。机械系统本身结构的动态特性参数是质量、刚度(或弹性)和阻尼,如何进行简化是值得认真研究的。

如图 1-1(a)表示一辆汽车沿道路行驶时车身振动的力学模型,它是一个二自由度系统,其中弹簧常数就是悬架和轮胎的等效刚度,阻尼器表示减振器、悬架和轮胎的等效阻尼,车身的惯性简化为平移质量 m 和绕质心的转动惯量 J 。图 1-1(b)表示一桥式起重机起吊重物时的情况,研究突然吊起重物时绳索及桥架结构中的动力响应,可简化为双质量弹簧系统,其中 m_1 是小车质量加二分之一桥架质量, m_2 为重物的质量; k_1 是桥架跨中的刚度; k_2 是绳索的刚度。建立的力学模型与实际的机械系统越接近,则分析的结果与实际情况越接近。



(a) 汽车车身振动



(b) 起重机突然起吊时的振动

图 1-1 不同实验系统的力学模型

2) 建立数学模型

应用物理定律对所建立的力学模型进行分析,导出描述系统特性的数学方程。通常振动问题的数学模型表现为微分方程的形式。

3) 方程的求解

为得到描述系统运动的数学表达式,就需对数学模型求解。通常这种数学表达式是位移为时间函数的形式。它表明系统运动、系统性质和激振(含初始干扰)的关系。

4) 分析结论

根据方程的解提供的规律和系统的工作要求及结构特点,可以作出设计和改进的决断,以获得问题的最佳解决方案。

1.2 机械振动的定义和表示方法

机械振动是一种特殊形式的运动。在这种运动过程中,机械系统将围绕其平衡位置作往复运动。从运动学的观点看,机械振动是指机械系统的位移、速度、加速度在某一数值附近随时间的变化规律。这种规律如果是确定的,则可用函数关系式

$$x = f(t) \quad (1-1)$$

来描述其运动。也可以用函数图形来表示,图 1-2 就是以 x 为纵坐标、 t 为横坐标表示的几种典型的机械振动。图 1-2(a)表示在相等的时间间隔内物体作往复运动,称为周期运动。运动往复一次所需的时间间隔称为周期 T ,其单位以秒(s)计。周期振动可用时间的周期函数表示为

$$f(t) = f(t + nT) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1-2)$$

以一定周期持续进行的等幅振动称为稳态振动,而最简单的周期振动是简谐振动。

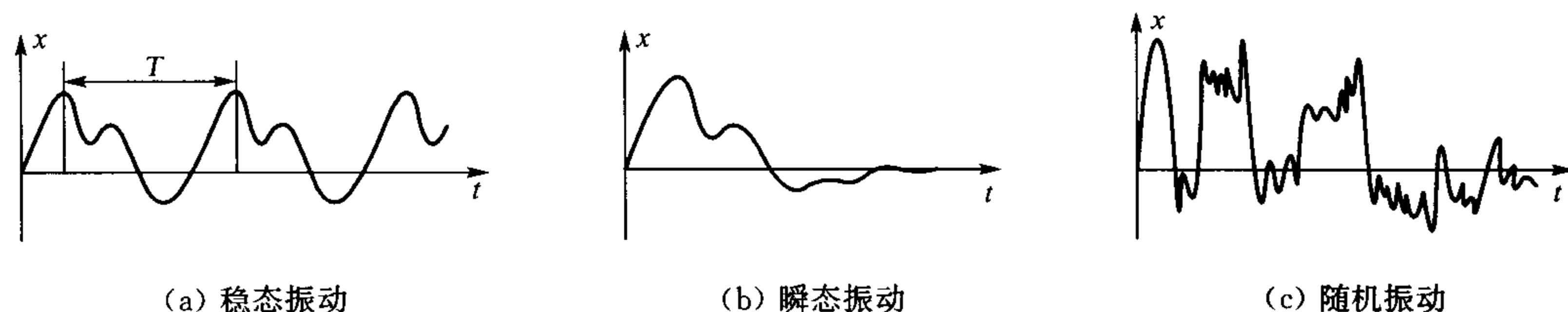


图 1-2 几种典型的机械振动

图 1-2(b)表示机械系统受到冲击后产生的振动,这种振动没有一定的周期,故不能用周期函数来表示,称为非周期振动,它往往经过一定周期后逐渐消失,故又称为瞬态振动。

图 1-2(c)表示机械系统在随机激振下产生的振动,这种运动不能用时间函数来描述,称为随机振动。

上面几种振动中,周期振动和瞬态振动可以用方程(1-1)来描述。这就是说运动是确定的,只要给定任一瞬时 t ,就可得到确定的 x 值。而随机振动是一种不能预知运动物理量大小的振动,它不是时间的确定性函数,根据其运动参数的某些规律性,可用数理统计的方法来进行研究。

1.2.1 简谐振动

简谐振动是最简单的周期振动。其振动位移可用下面正弦函数(或余弦函数)来表示:

$$x = A \sin \frac{2\pi}{T} t \quad (1-3)$$

式中: T ——周期。

A ——振动位移的最大值,称为振幅。

这种按时间的正弦函数(或余弦函数)所作的运动称为简谐振动。简谐振动常用做匀速圆周运动的点在铅垂轴上的投影来表示,如图 1-3。一长度为 A 的线段 OP ,由水平位置开始,以等角速度 ω 绕 O 点做反时针方向转动,任一瞬时 t , P 点在铅垂轴上的投影为

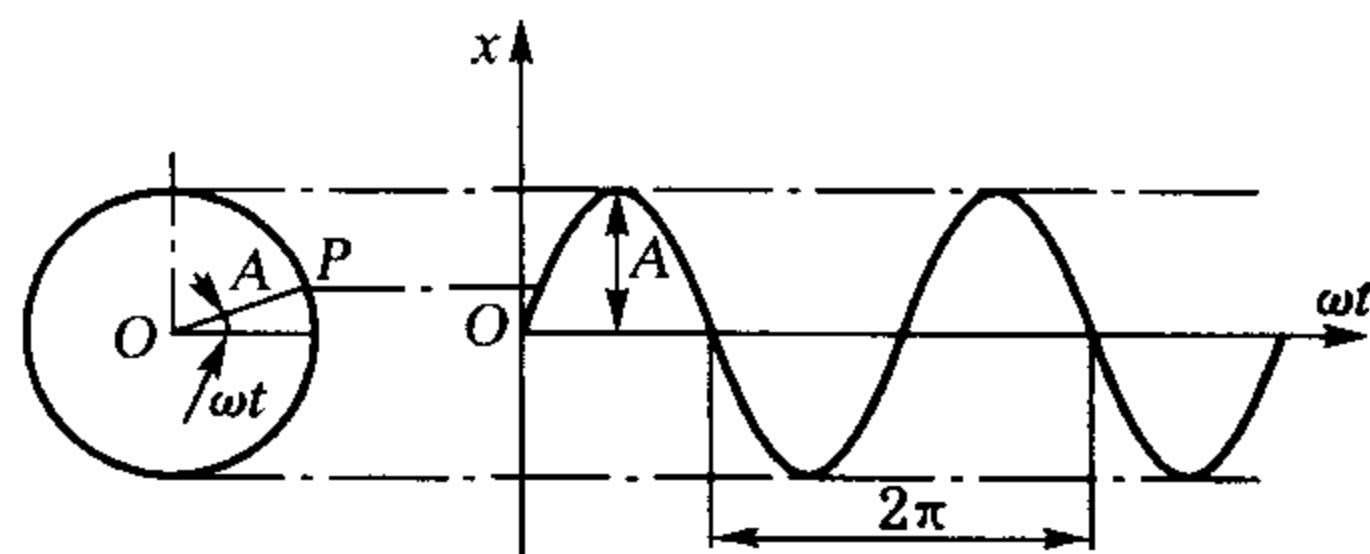


图 1-3 匀速圆周运动的点的投影

$$x = A \sin \omega t \quad (1-4)$$

式中: ω ——圆频率, ω 的单位为 rad/s。

ωt ——相位,表示 OP 在时间 t 的转角。

由于 OP 转过 2π rad 为一个周期,故上式应满足

$$A\sin\omega(t+T) = A\sin(\omega t + 2\pi)$$

即 $\omega T = 2\pi$ 或 $\omega = \frac{2\pi}{T}$

代入(1-4)式,就得到和(1-3)式同样的形式,通常用(1-4)式表示简谐振动。

在周期振动中,周期的倒数定义为频率,以 f 表示

$$f = \frac{1}{T} \quad (1-5)$$

频率 f 的单位为 $1/s$,称为赫兹,写为 Hz,即每秒钟振动的次数,它和 ω 的关系为

$$\omega = 2\pi f \quad (1-6)$$

如果图 1-3 中做匀速圆周运动的点不是从水平位置开始,则其位移表达式具有一般形式

$$x = A\sin(\omega t + \varphi) \quad (1-7)$$

式中 φ 为初相位,表示做匀速圆周运动的点的初始位置。

对位移表达式求一阶导数和二阶导数,就可得简谐振动的速度和加速的表达式

$$\dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \varphi) = \omega A \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1-8)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) = \omega^2 A \sin(\omega t + \varphi + \pi) \quad (1-9)$$

由此可见,只要位移是简谐函数,则速度和加速度也是简谐函数,而且与位移具有相同的频率,但速度的相位比位移超前 $\pi/2$,加速度比位移超前 π 。

从(1-7)式和(1-9)式可得

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad (1-10)$$

这表明在简谐运动中,加速度的大小与位移成正比,而其方向与位移相反,加速度的方向始终指向静平衡位置。

1.2.2 简谐振动的矢量表示法

简谐振动可用旋转矢量表示。设有一个模为 A 的旋转矢量 OP 以等角速度 ω 从水平位置开始作逆时针旋转,如图 1-4 所示。任一瞬时 t ,旋转矢量 OP 在铅垂轴上的投影为

$$x = A\sin\omega t \quad (1-11)$$

它表示一简谐振动。其在水平轴上的投影为一余弦函数,也表示一简谐振动,故任一简谐振动都可以用一旋转矢量的投影来表示。旋转矢量的模 A 即为振幅,其旋转角速度 ω 即为简谐振动的圆频率。

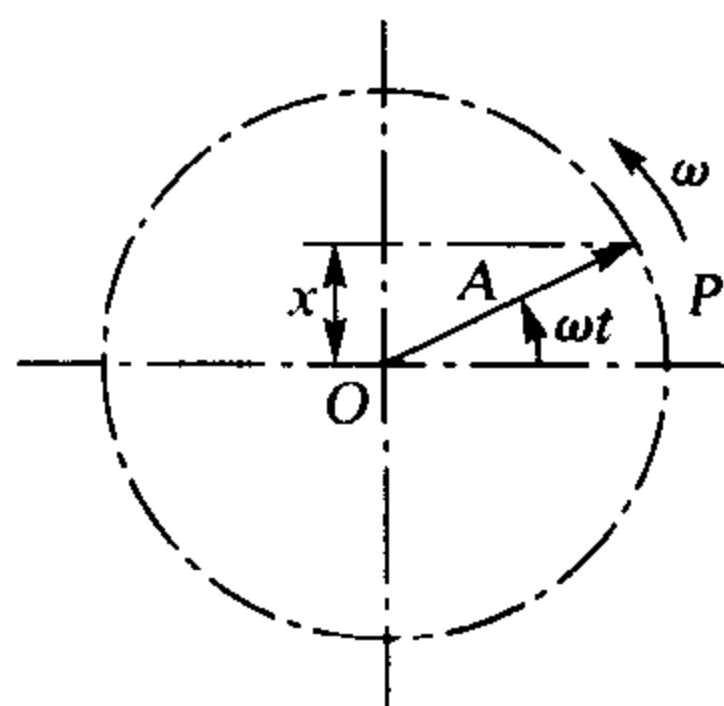


图 1-4 旋转矢量的投影

当一个简谐振动是两个同频率的简谐振动所合成时,则这个简谐振动可以用两个代表原简谐振动的旋转矢量的合成矢量来表示。如某一振动的表达式为

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t \quad (1-12)$$

可改写成

$$x = a\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + b\sin\omega t$$

等式右边的两项可以看成是旋转矢量 a 和 b 在铅垂轴上的投影,而且 a 比 b 超前 $\pi/2$ 相位,故两个矢量是相互垂直的,都可以角速度 ω 同步旋转。图 1-5 表示了这两个矢量。

根据矢量合成原理,将矢量 a 和矢量 b 合成旋转矢量 A , A 与 b 之间的夹角为 φ , A 在铅垂轴上投影为

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1-13)$$

将(1-13)式展开为

$$x = A \sin \varphi \cos \omega t + A \cos \varphi \sin \omega t \quad (1-14)$$

由图 1-5 可知

$$a = A \sin \varphi, b = A \cos \varphi \quad (1-15)$$

将(1-15)式代入(1-14)式得

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

因此(1-12)式和(1-13)式表示同一个简谐振动,在数学上两式是可以互换的,由图 1-5 中还可看出两式常数之间的关系为

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \tan \varphi = \frac{a}{b} \quad (1-16)$$

从物理概念上说,两个同频率的简谐振动可以合成一个与原来频率相同的简谐振动;反之,一个简谐振动也可以分解为两个频率相同的简谐振动。

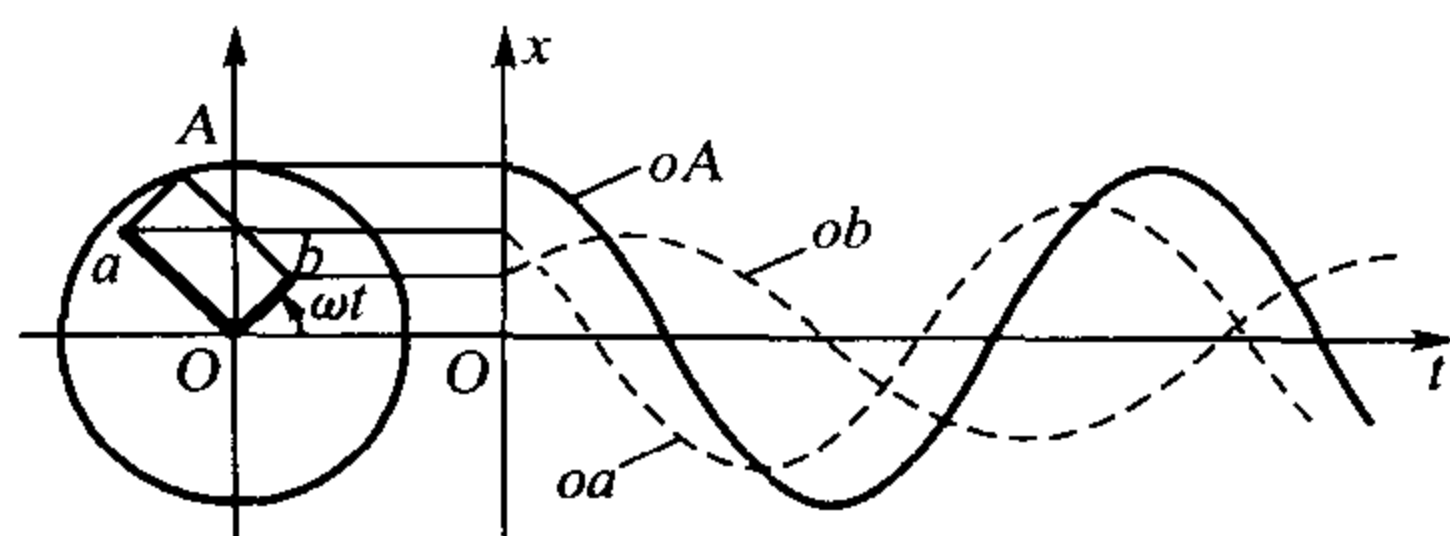


图 1-5 简谐运动的叠加

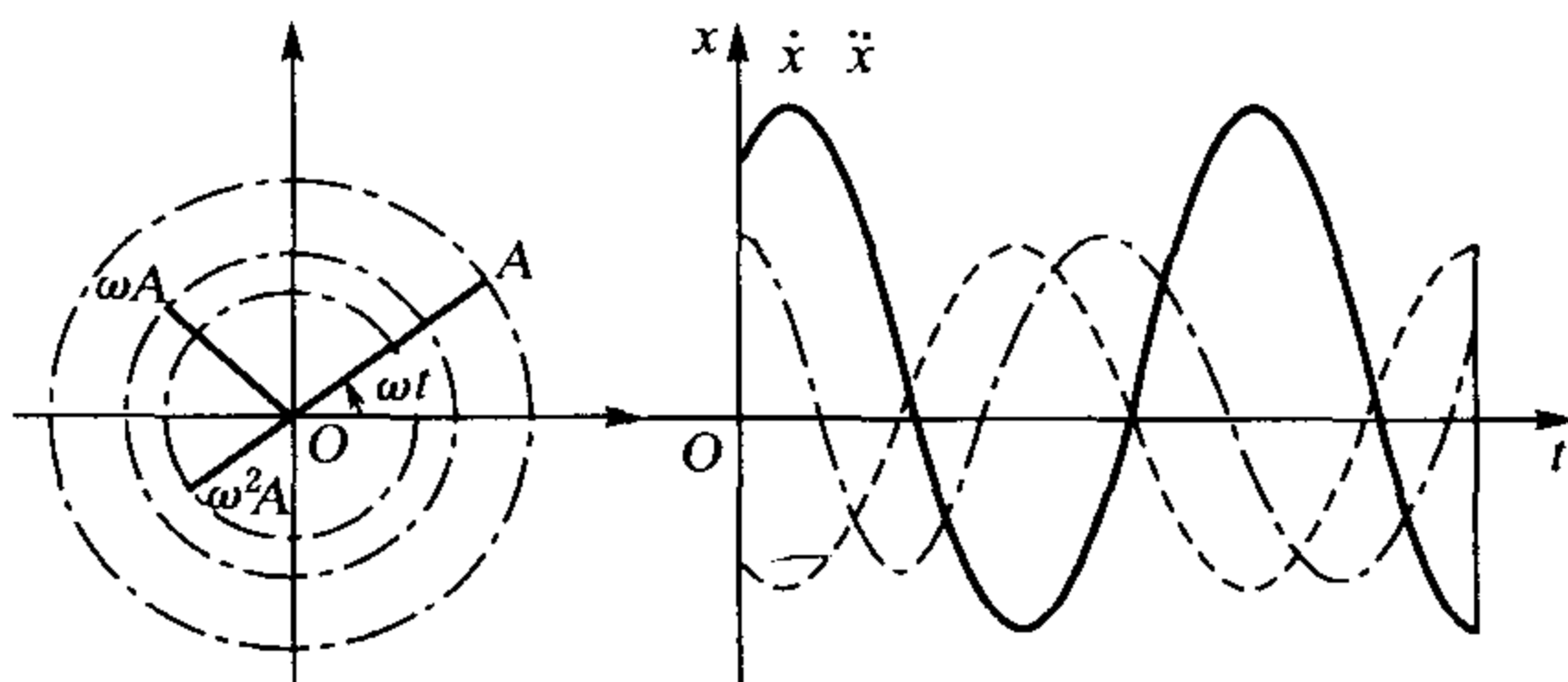
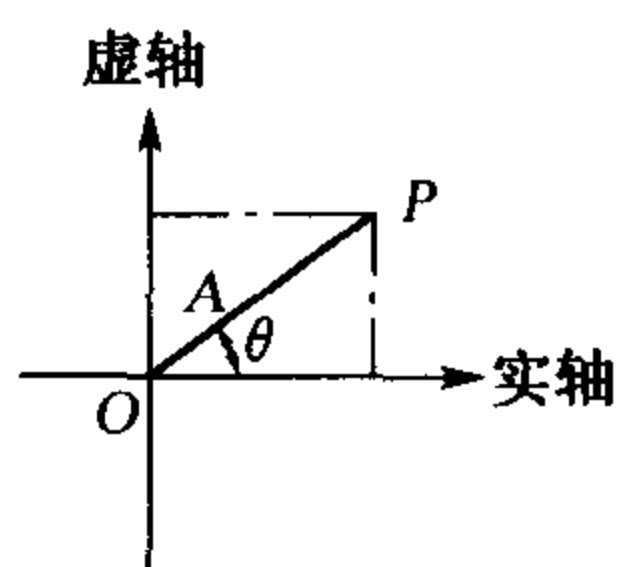


图 1-6 位移、速度及加速度的空间关系

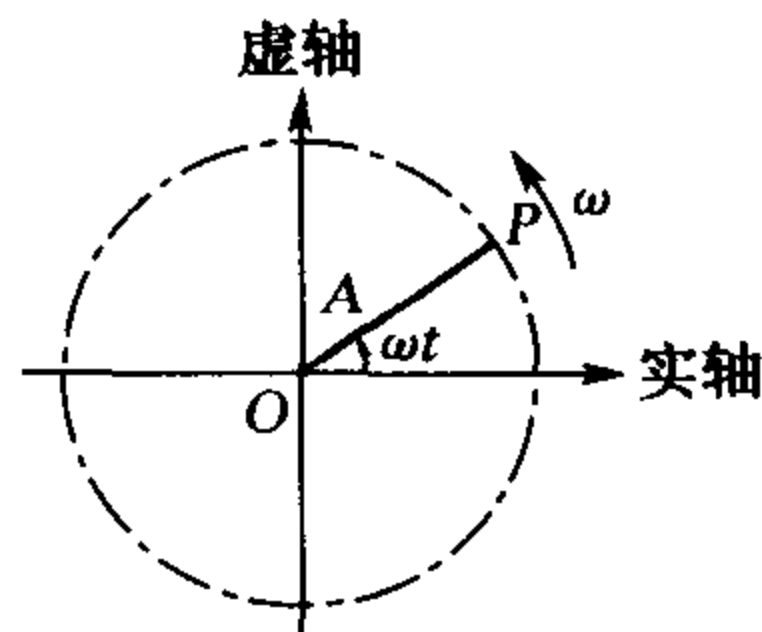
如果振动的位移是简谐函数,则振动的速度和加速度也必然是简谐函数,故速度和加速度也可以用旋转矢量来表示。根据(1-7)式至(1-9)式,这 3 个矢量之间的关系如图 1-6 所示。

1.2.3 简谐振动的复数表示法

在复平面上的一个矢量 OP 代表复平面上复数 Z 。如图 1-7(a)所示。这个矢量的模 A 就是复数 Z 的模,其位置由幅角 θ 确定,若 j 表示虚轴上的单位长度,则其表达式为



(a) 复矢量



(b) 旋转复矢量

图 1-7 简谐振动的复矢量表示

$$Z = A(\cos \theta + j \sin \theta) = A \exp(j\theta) \text{ 或写作 } e^{j\theta}$$

如果使复矢量 OP 绕 O 点以等角速度 ω 在复平面内逆时针旋转, 就成为一复数旋转矢量, 如图 1-7(b) 所示。它在任一瞬时的幅角 $\theta = \omega t$, 则此复数表达式为

$$Z = A(\cos \omega t + j \sin \omega t) = A \exp(j\omega t) \text{ 或写作 } Ae^{j\omega t}$$

如前所述, 我们同样可以用一复数旋转矢量在复平面的实轴上或虚轴上的投影来表示简谐振动。复数旋转矢量 OP 在虚轴上的投影为

$$x = A \sin \omega t = I_m Z = I_m [A \exp(j\omega t)]$$

符号 $I_m Z$ 指取复数 Z 虚数部分的值, 它表示简谐振动, 一般对复数表达式

$$x = A \exp(j\omega t) \quad (1-17)$$

不作特别说明时, 则表示取虚数部分。

运用复数运算法则, 可以方便地合成两个同频率的简谐振动。现将

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t = a \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + b \sin \omega t$$

以复数形式表示为

$$x = a \exp\left[j\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right] + b \exp(j\omega t)$$

由复数相加原理得

$$x = A \exp[j(\omega t + \varphi)]$$

式中

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{a}{b}$$

速度和加速度同样可用复数旋转矢量表示, 并用复数求导的方法得到位移、速度和加速度之间的关系, 设 $x = A \exp(j\omega t)$, 则

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = j\omega A \exp(j\omega t)$$

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}(\dot{x}) = -\omega^2 A \exp(j\omega t)$$

因 $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$, $e^{j\pi} = -1$, 故上两式可写成

$$\dot{x} = A\omega \exp\left[j\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right] \quad (1-18)$$

$$\ddot{x} = A\omega^2 \exp[j(\omega t + \pi)] \quad (1-19)$$

可见位移、速度和加速度在复平面上关系与图 1-7 所示一致。

1.3 构成机械振动系统的基本要素

机械系统之所以会产生振动是因为它本身具有质量和弹性。阻尼则使振动受到抑制。从能量观来看, 质量可储存动能, 弹性可储存势能, 阻尼则消耗能量。当外界对系统做功时, 系统的质量就吸收动能, 使质量获得速度; 弹簧就获得变形能, 具有了使质量回到原来位置的能力。这种能量的不断转换就导致系统的振动, 系统如果没有外界不断地输入能量, 则由

于阻尼的存在,振动现象将逐渐消失。因此,质量、弹性和阻尼是振动系统的三要素。此外,在重力场中,当质量离开平衡位置后就具有了势能,同样产生恢复力。如单摆,虽然没有弹簧,但可看成等效弹簧系统。

现将质量、弹簧和阻尼器的特性讨论如下。

1.3.1 质量

在力学模型中,质量被抽象为不变形的刚体。根据牛顿第二运动定律,若对质量作用一力 F_m ,则此力与质量在与 F_m 相同方向获得的加速度 \ddot{x} 成正比。表示为

$$F_m = m\ddot{x} \quad (1-20)$$

式中的比例常数 m 为刚体质量,是惯性的一种量度。对于扭振系统,广义力为扭矩 M ,广义加速度为角加速度 $\ddot{\phi}$,则扭矩与角加速度成正比表示为

$$M = J\ddot{\phi} \quad (1-21)$$

式中的比例常数 J 为刚体绕其旋转中心轴的转动惯量,质量 m 和转动惯量 J 是表示力(力矩)和加速度(角加速度)关系的元件。

1.3.2 弹性

在力学模型中,弹簧被抽象为无质量而具有线性弹性的元件。弹性元件在振动系统中提供使系统恢复到平衡位置的弹性力,又称恢复力。恢复力与弹性元件两端的相对位移的大小成正比。

$$F_g = -k(x_2 - x_1) \quad (1-22)$$

式中负号表示弹性恢复力 F_g 与相对位移的方向相反, k 为比例常数,通常称为弹簧常数或弹簧刚度。扭转弹簧产生的是恢复力矩,扭转弹簧的位移是角度。

1.3.3 阻尼

在力学模型中,阻尼器被抽象为无质量而具有线性阻尼系数的元件。在振动系统中,阻尼元件提供系统运动的阻尼力,其大小与阻尼器两端相对速度成正比

$$F_d = -c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (1-23)$$

式中负号表示阻尼力的方向与阻尼器两端相对速度的方向相反, c 为比例常数,称为阻尼系数,满足(1-23)式表示的这种阻尼称为黏性阻尼,系数 c 称为黏性阻尼系数。

在国际单位制(SI)中,质量的单位为千克(kg);转动惯量的单位为千克·米²(kg·m²);力的单位为牛顿(N);位移的单位为米(m);扭矩的单位为牛·米(N·m)。速度的单位为米/秒(m/s);直线弹簧刚度的单位为牛/米(N/m);扭转弹簧刚度的单位为牛·米/弧度(N·m/rad);阻尼系数 c 的单位为牛·秒/米(N·s/m)。

1.4 谐波分析

简谐振动是最简单的周期振动,而实际问题中更多的是非简谐的周期振动或非周期振动,如图 1-8 所示。

任何一个周期函数,只要满足一定的条件,都可以展开成傅立叶级数。

把一个周期函数展开成一个傅立叶级数,即展开成一系列简谐函数之和,这个过程称为频谱分析或谐波分析。

设一周期函数为 $F(t)$, 其周期为 T , 展成傅立叶级数为

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (1-24)$$

式中 $\omega_0 = 2\pi/T$ 称为基频, a_0 、 a_n 和 b_n 均为待定常数,称为傅立叶系数,只要 $F(t)$ 是已知的,它们可从三角函数正交性得到

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos n\omega_0 t dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin n\omega_0 t dt \end{aligned} \quad (1-25)$$

(1-24)式也可写成

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (1-26)$$

式中

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \varphi_n = \arctan \frac{a_n}{b_n} \quad (1-27)$$

可见,周期函数可用傅立叶级数展开为各阶谐波分量的叠加来表示。组成各谐波分量的频率是基频的整数倍,即 $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0 \cdots n\omega_0$, 而不含有其他频率的谐波分量。

为了把谐波分析的结果形象化,可把 A_n 、 φ_n 与 ω_0 之间的变化关系用图形来表示,如图 1-9 所示。这种图形称为周期函数的频谱,这种分析称为频谱分析。由于只有在 $n\omega_0$ ($n=1, 2, 3 \cdots$) 各点 A_n 和 φ_n 才有一定的数值,所以周期函数的频谱图是一组离散的铅垂线。

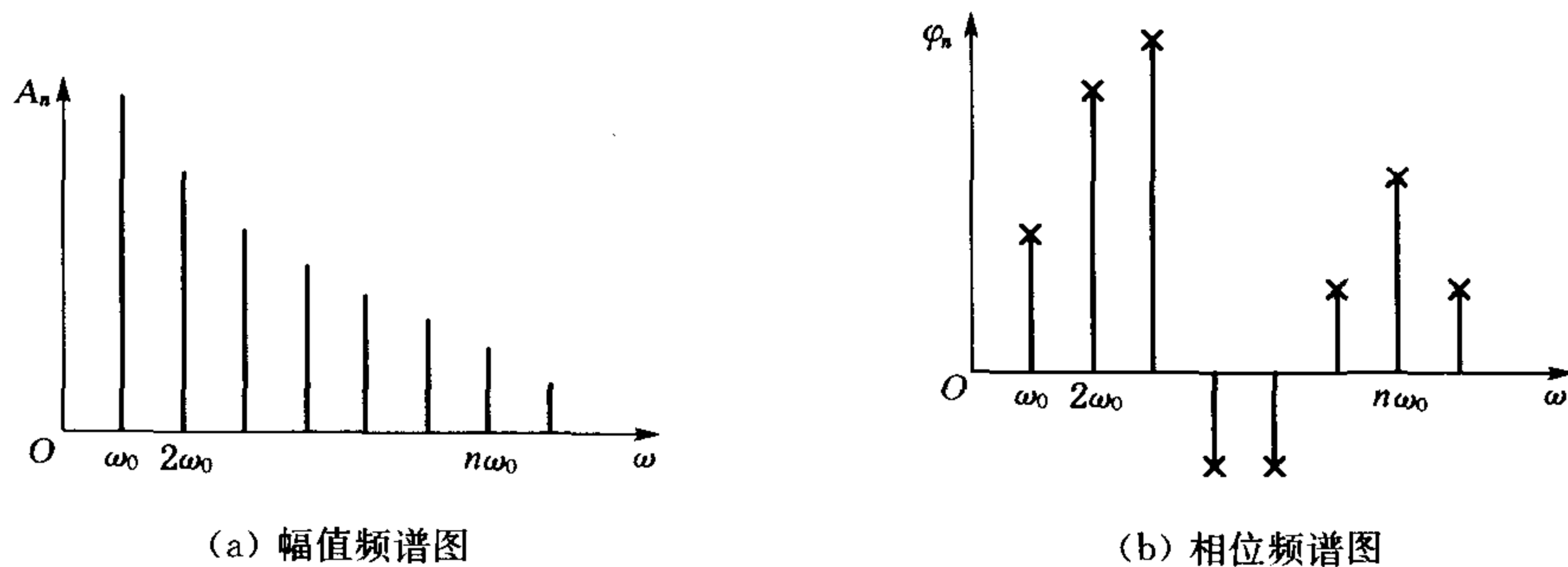


图 1-9 周期函数的频谱图

【例 1-1】 一周期为 T 、振幅为 F_0 的矩形波,如图 1-10(a)所示。在一个周期内的函数表达式为

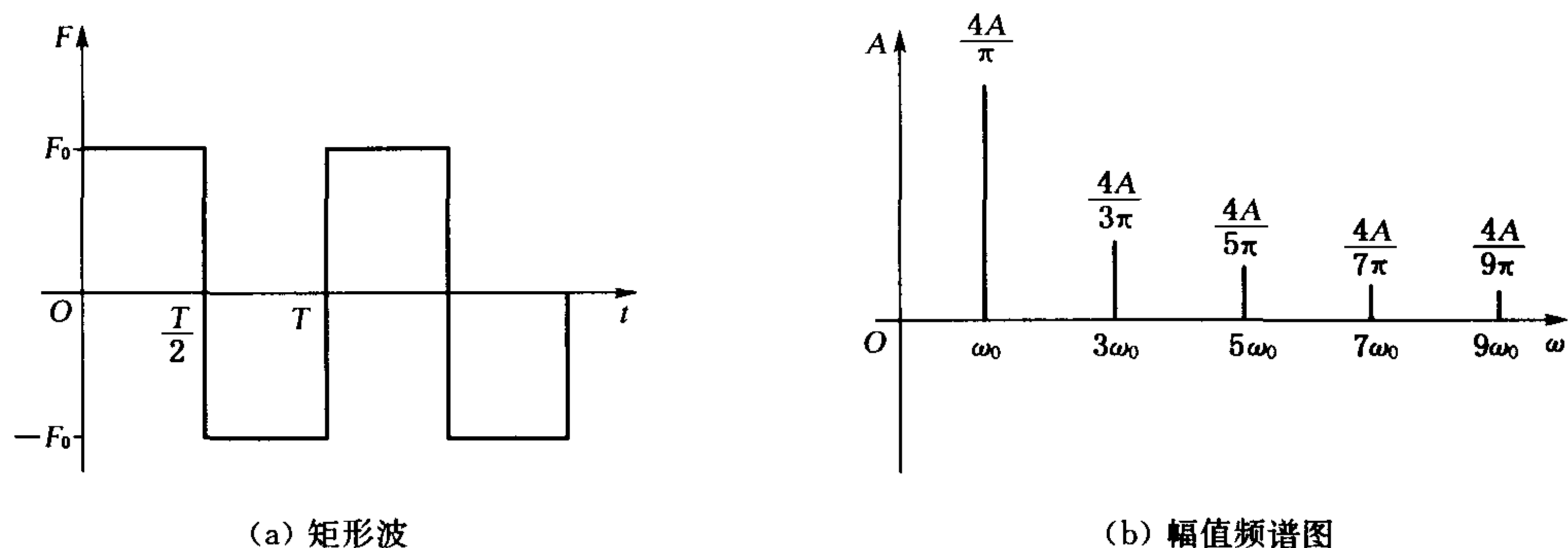


图 1-10 矩形波及幅值频谱图

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -F_0 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

试作傅立叶分解,并画出一个周期内的幅值频谱图。

解:由(1-25)式求出各傅立叶级数

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} F_0 dt - \int_{\frac{T}{2}}^T F_0 dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos n\omega_0 t dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{4F_0}{n\pi} \quad (n = 1, 3, 5 \dots)$$

故矩形波的傅立叶级数为

$$F(t) = \frac{4F_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega_0 t$$

各次谐波的幅值为

$$A_1 = \frac{4F_0}{\pi}, A_3 = \frac{4F_0}{3\pi}, A_5 = \frac{4F_0}{5\pi} \dots$$

幅值频谱图如图 1-10(b)所示。

由以上频谱分析可知,其基频为 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 。由幅值频谱图可看出,基频的谐波分量占主要成分,其幅值最大。在基频分量上叠加上三阶谐波分量后,所给出的波形已接近于矩形波。若再叠加上五阶谐波分量,已近似于矩形波。其叠加情况如图 1-11 所示。在实际问题中为了使分析简化,常用有限项谐波分量的叠加来代替周期波。

以上介绍了将周期函数展成傅立叶级数进行分析的方法,后面还要介绍非周期函数也可以通过傅立叶积分进行频谱分析。

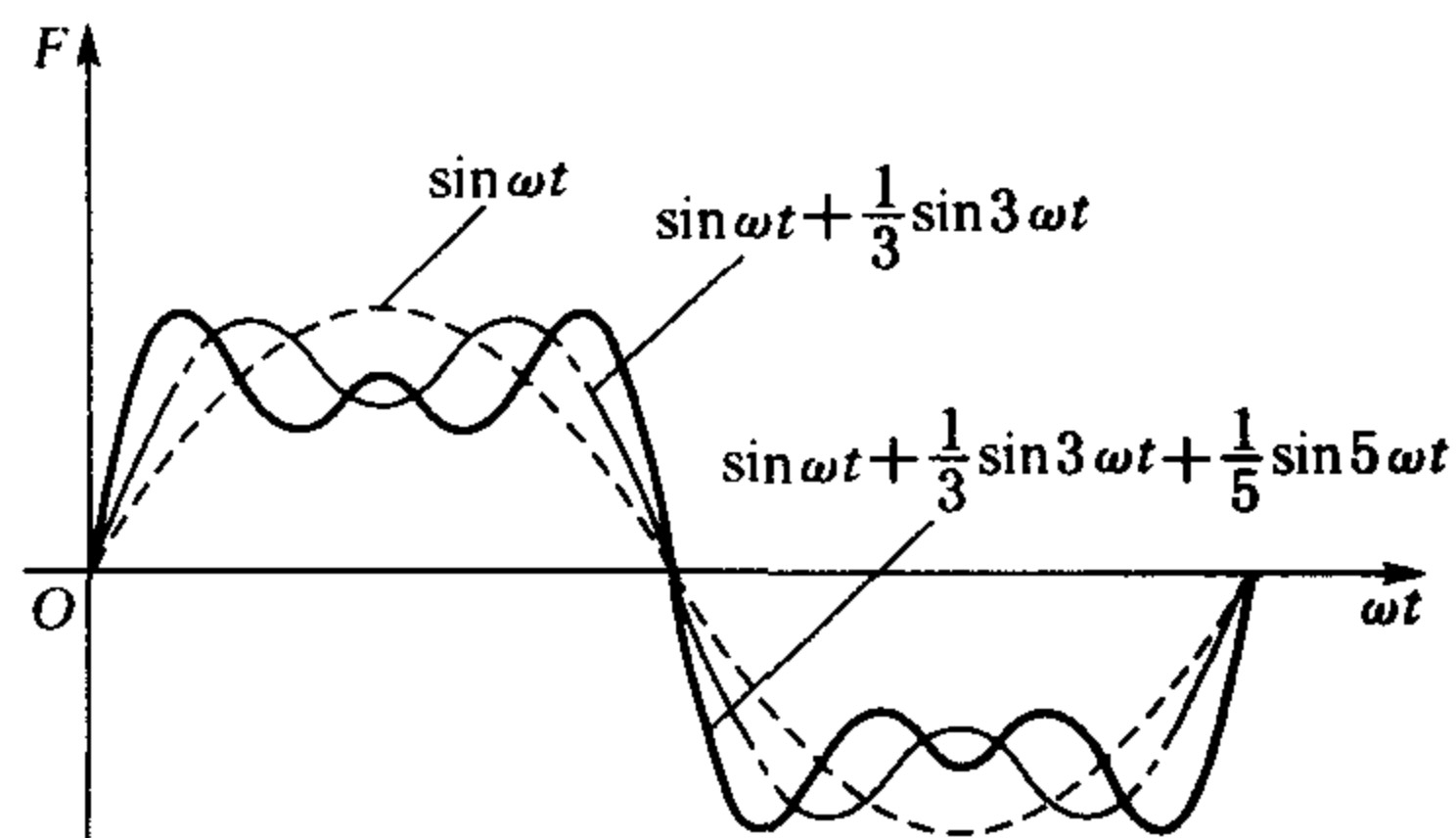


图 1-11 谐波的叠加

习题与思考题

1.1 构成机械振动系统的基本要素是什么？

1.2 某结构按频率 25 Hz 作简谐振动时的最大加速度为 $6g$ ($g=9.8 \text{ m/s}^2$)。求此结构的振幅和最大速度。

1.3 某机器振动规律为 $x=0.5\sin\omega t+0.3\cos\omega t$, 单位为 cm, $\omega=20\text{rad/s}$ 。振动是否简谐振动？振幅多大？最大速度和最大加速度多大？试用旋转矢量表示出它们之间的关系。

1.4 设有两个简谐振动, 分别为 $3\exp(j\omega t)$ 和 $5\exp[j(2\omega t-0.5\pi)]$ 。试用复旋转矢量合成, 并写出其在实轴和虚轴上的投影。

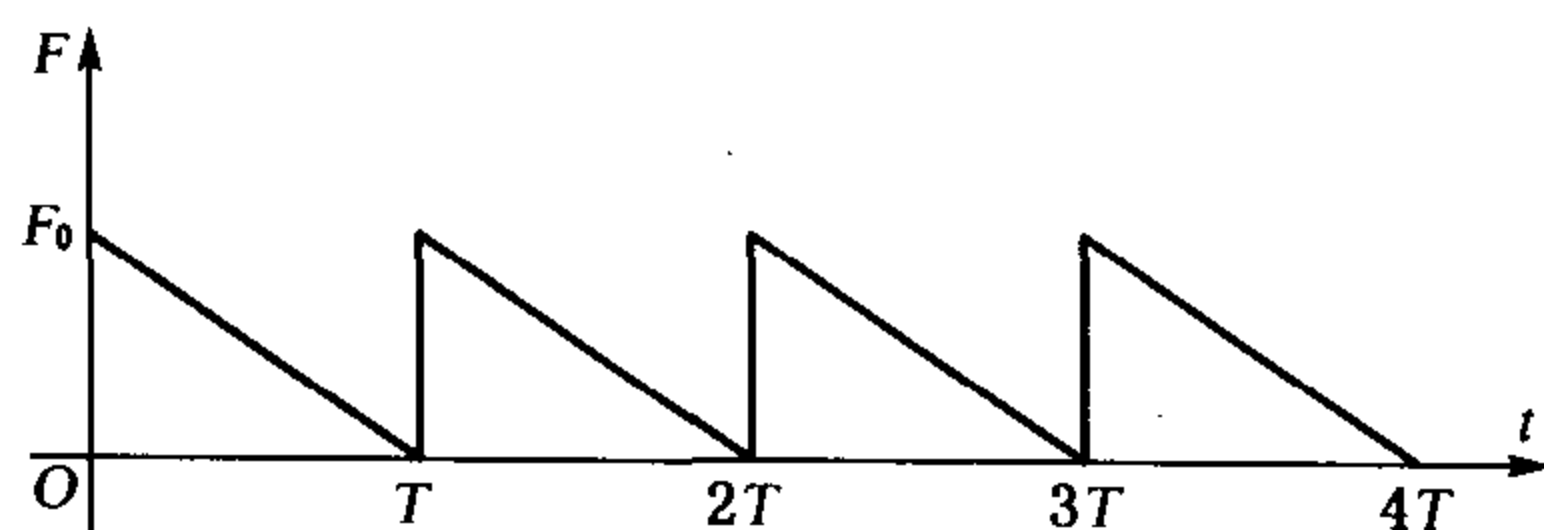
1.5 测得某结构两点振动规律为

$$x_1 = 4\cos 15t - 3\sin 15t \quad \text{cm}$$

$$x_2 = 2\sin(15t - 30^\circ) - 1.5\cos(15t - 30^\circ) \quad \text{cm}$$

用旋转矢量表示之, 并求此两点的振幅和它们之间的相位差。

1.6 将习题图 1-1 所示齿波展开成傅立叶级数。



习题图 1-1

第2章 单自由度系统的振动

2.1 单自由度系统的自由振动

简单的单自由度系统是研究多自由度系统的基础,而且单自由度系统在工程振动问题中也有实用意义。现运用牛顿运动定律来推导振动的微分方程。

2.1.1 无阻尼单自由度系统的自由振动

本节讨论微分方程的建立及其解。

1) 直线振动

无阻尼单自由度系统力学模型如图 2-1 所示,质量为 m , 弹簧刚度为 K , 弹簧在自由状态位置如图中虚线所示。连接质量块后, 弹簧受重力 mg 作用而产生压缩变形 λ_s , 同时也产生弹簧恢复力 $K\lambda_s$ 。当恢复力等于重力 mg 时, 处于静平衡状态, 即

$$mg = K\lambda_s \quad (2-1)$$

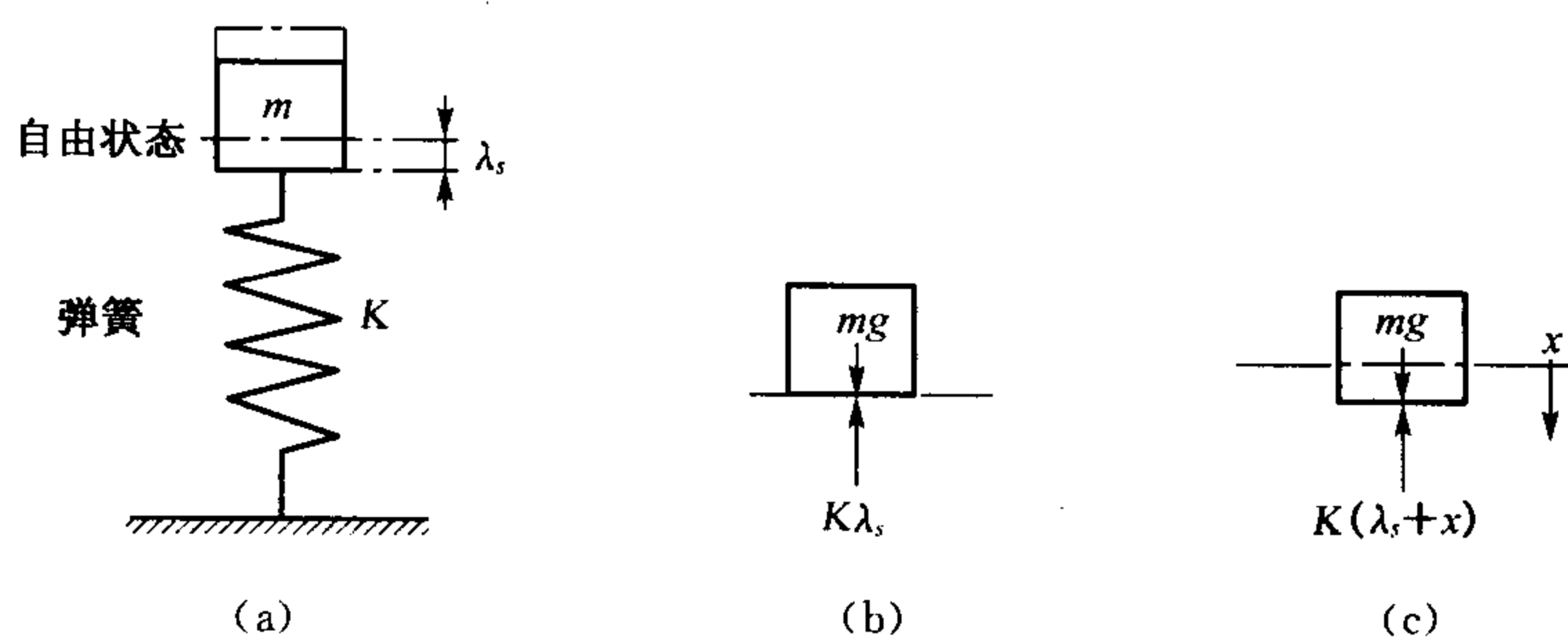


图 2-1 单自由度系统

若系统受到外界某种初始干扰,使系统平衡状态遭到破坏,则弹簧力不等于重力,这种不平衡的弹性恢复力,便使系统产生自由振动。现选静平衡位置为坐标原点,建立铅垂方向的坐标 x , 向下为正, 向上为负, 表示振动过程中质量块的位置。设质量 m 向下运动到 x , 此时弹簧恢复力为 $K(\lambda_s + x)$, 显然大于重力 mg , 由于力不平衡, 质量块在合力作用下, 将产生变速运动, 按牛顿运动定律建立运动方程, 取与 x 正方向一致的力, 加速度、速度为正, 可列如下方程:

$$\sum F = mg - K(\lambda_s + x) = m\ddot{x}$$

即

$$m\ddot{x} + Kx = 0 \quad (2-2)$$

上式即为无阻尼单自由度系统的自由振动微分方程式。由方程可知, 因 m 与 K 是正

数,故位移 x 与加速度 \ddot{x} 方向恒相反。下面求解此方程。将式(2-2)改写成

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \quad (2-3)$$

令 $\frac{K}{m} = \omega_n^2$ 并代入上式得

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (2-4)$$

该微分方程的通解为

$$x = b_1 \cos \omega_n t + b_2 \sin \omega_n t \quad (2-5)$$

b_1, b_2 这两个特定系数将由振动的初始条件决定。由上式可知,单自由度系统的自由振动由两个频率相同的简谐振动所合成,显然合成后仍为一个同频率的简谐振动,即

$$x = A \sin(\omega_n t + \varphi) \quad (2-6)$$

式中: A ——振幅,它表示质量偏离平衡位置的最大值, $A = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ 。

φ ——初相位角,单位为 rad, $\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{b_1}{b_2}$ 。

由此可知,单自由度系统不论受到什么样的初始干扰,其自由振动是一个简谐振动,振动圆频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (\text{rad/s}) \quad (2-7)$$

频率为

$$f = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (\text{Hz}) \quad (2-8)$$

振动周期为

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} \quad (\text{s}) \quad (2-9)$$

自由振动的频率只取决于系统本身的固有物理性质(质量 m , 刚度 K),而与初始条件无关,故 ω_n 称为固有圆频率, f 称为固有频率。当发生自由振动时,只要系统的 m 和 K 一定,系统振动频率或周期都是不变的定值。显而易见,当系统刚度相同时,质量大的固有频率低;当质量相同时,刚度大的固有频率高。反之亦然。

现在根据振动的初始条件来确定式(2-5)中的两个待定系数 b_1 和 b_2 。

设初始条件 $t=0$ 时, $x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0$

代入式(2-5)解出 $b_1 = x_0, b_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$, 故

$$x = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (2-10)$$

上式称系统对初始条件为 x_0, \dot{x}_0 的响应。

由式(2-10)可得

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2} \quad (2-11)$$

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{x_0 \omega_n}{\dot{x}_0} \quad (2-12)$$

可见自由振动的振幅 A 和振动的初相角 φ 仅取决于初始条件,这也是自由振动的特

性。式(2-10)和式(2-6)可由图 2-2 表示为用旋转矢量法表示的合成情况。

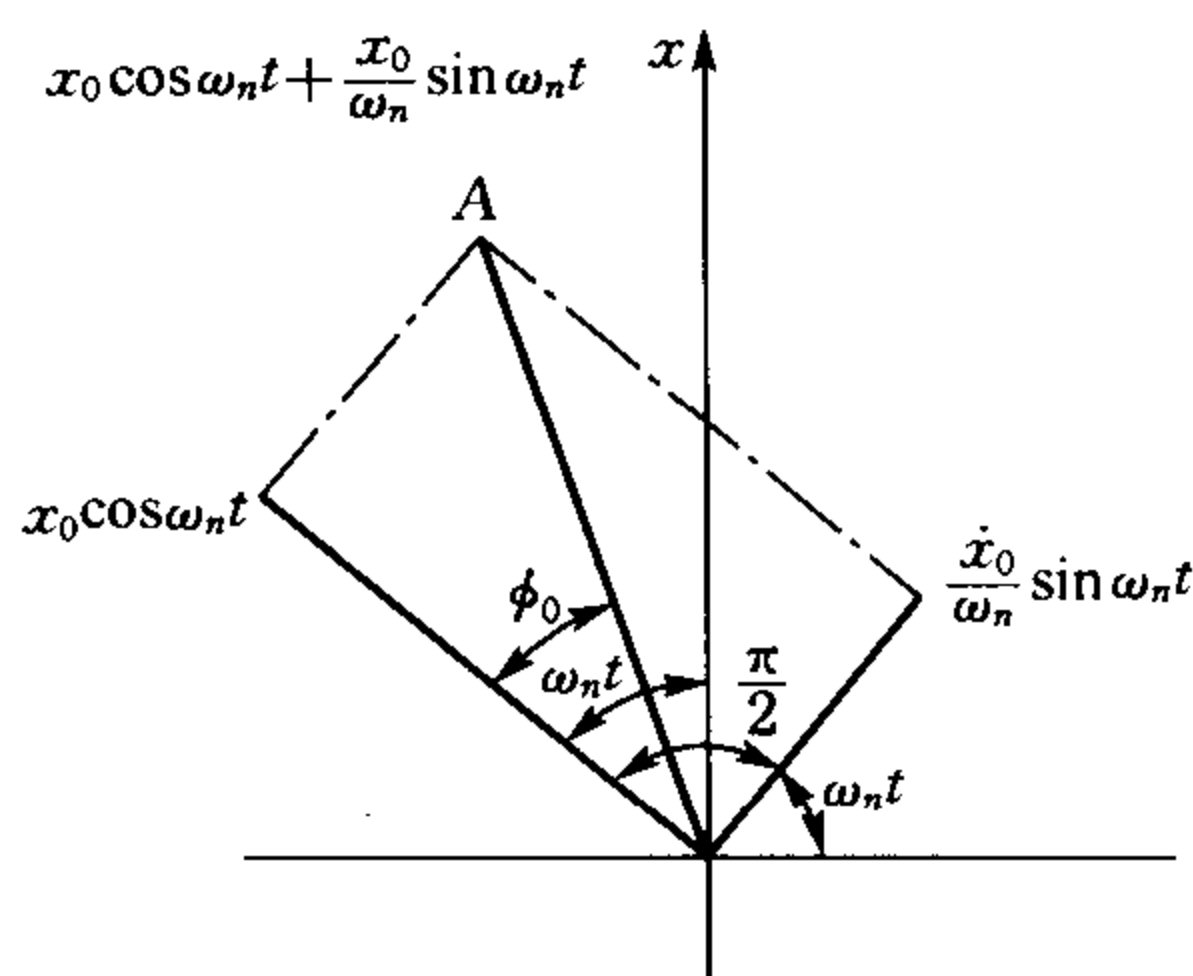


图 2-2 旋转矢量法合成

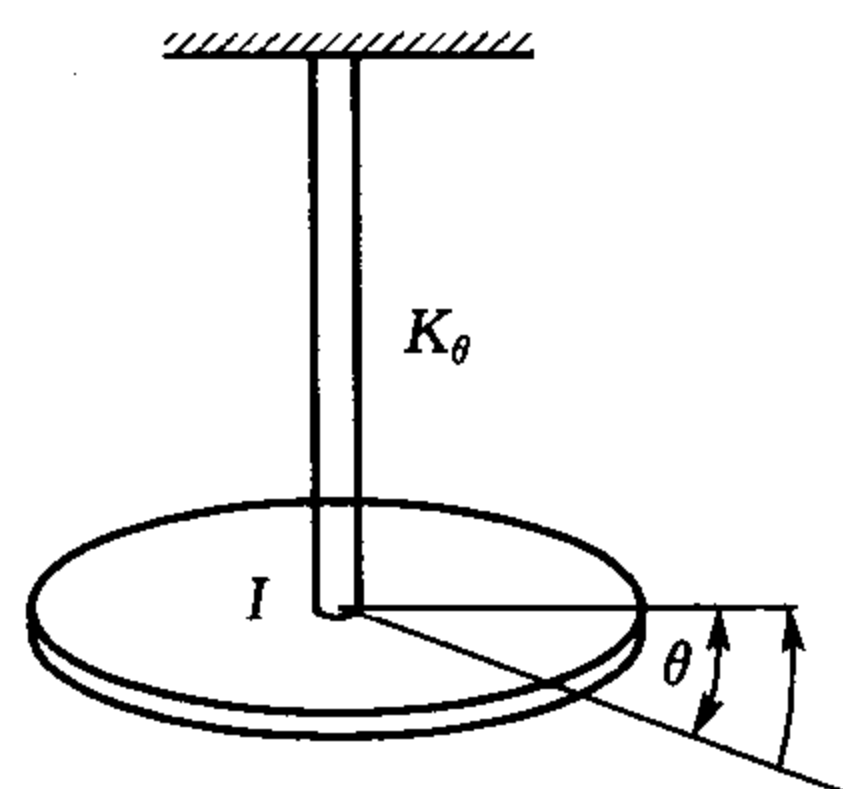


图 2-3 圆盘轴扭振

2) 扭转振动

扭转振动需要用角位移 θ 作为独立坐标来表达振动状态的圆振动问题。在这种情况下,仍用牛顿运动定律可得转动方程式

$$J\ddot{\theta} = \sum M \quad (2-13)$$

式中: J ——转动体对转动轴的转动惯量。

$\ddot{\theta}$ ——角加速度。

$\sum M$ ——施加于转动体上力矩之代数和。 M 与 θ 角位移方向一致为正,反之为负。

如图 2-3 所示,一根垂直轴,下端固定一水平圆盘。若轴本身质量不计,其扭转刚度为 K_θ ,即轴转动一单位转角所需加的力矩。圆盘的转动惯量为 J 。当系统受到某种干扰,如在圆盘平面上加一力偶,然后突然释放,系统便做扭转振动,若不计阻尼,则振动将永远继续下去。如以静平衡位置为起始位置,设 θ 角位移的振动坐标,正方向如图 2-3 中箭头所示。当圆盘朝正方向转过 θ 角时,圆盘受到一个由圆轴作用的,与 θ 方向相反的弹性恢复力矩—— $K_\theta \theta$,根据式(2-13)可得扭振微分方程式

$$J\ddot{\theta} = -K_\theta \theta \quad (2-14)$$

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0 \quad (2-15)$$

式中 $\omega_n^2 = \frac{K_\theta}{J}$,此方程与式(2-4)完全一致,故可解得

$$\theta = A \sin(\omega_n t + \varphi) \quad (2-16)$$

当初始条件 $t = 0, \theta = \theta_0, \dot{\theta} = \dot{\theta}_0$

$$A = \sqrt{\theta_0^2 + \left(\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_n}\right)^2} \quad (2-17)$$

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\theta_0 \omega_n}{\dot{\theta}_0} \quad (2-18)$$

当已知轴的长度 l ,直径 d ,材料的剪切弹性模量 G ;圆盘的质量 m ,半径 r 。则根据材料力学和理论力学公式可得

$$K_\theta = \frac{\pi d^4 G}{32l} \quad \text{和} \quad J = \frac{1}{2} m r^2$$

不同结构形式的 K_θ 、 J 要按不同公式计算。

2.1.2 固有频率、等效质量和等效刚度

本节讨论系统固有频率、等效质量和等效刚度的计算。

1) 固有频率的计算

系统的固有频率是系统振动的重要特性,在振动分析中具有重要意义。其计算可采用式(2-7)或式(2-8)。此外,还可采用以下方法。

(1) 静变形法

由式(2-1)得, $K = mg \div \lambda_s$, 代入式(2-7)得

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{mg}{\lambda_s m}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda_s}} \quad (2-19)$$

$$f = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\lambda_s}}$$

【例 2-1】如图 2-4 所示,一根长度为 l 、截面弯曲刚度为 EI 的等截面简支钢梁,有一质量为 m 的重块从梁的正中上方 h 高度落到梁上,与梁接触后,重块不与梁分开,试求发生梁自由振动的频率及振幅。梁重不计。

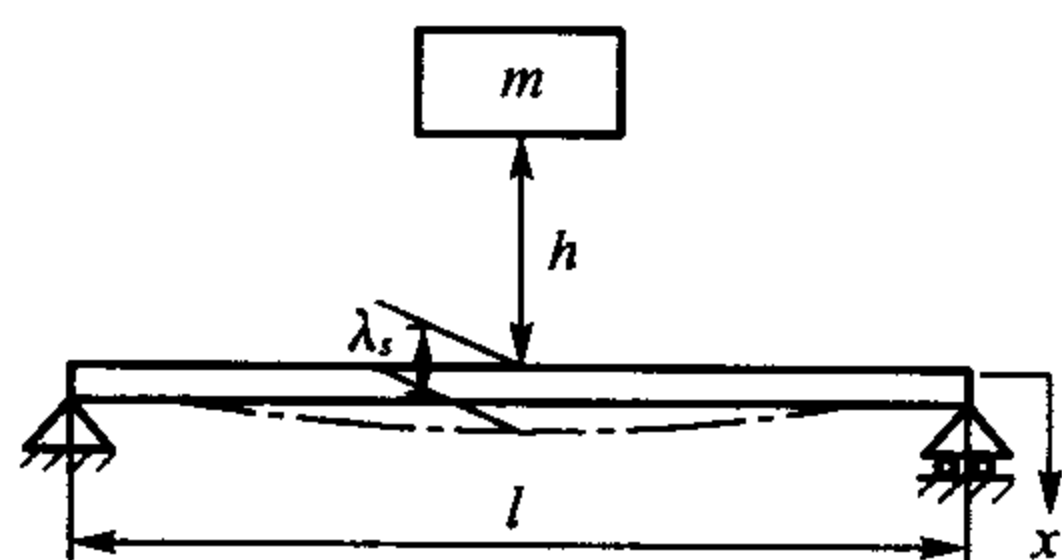


图 2-4 简支梁自由振动

解:系统可简化为单自由度系统。

由材料力学可知,简支梁中点的挠度公式为

$$\lambda_s = \frac{mgl^3}{48EI}$$

故系统的固有频率按式(2-19)即可算出

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{48EI}{ml^3}}$$

质量块打击梁的初始时刻($t=0$),位移为 λ_s ,故 $x_0 = \lambda_s$

初始速度由自由落体公式求得 $\dot{x}_0 = \sqrt{2gh}$

振幅由式(2-11)得

$$A = \sqrt{\left(\frac{mgl^3}{48EI}\right)^2 + \left[\frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\frac{48EI}{ml^3}}}\right]^2} = \frac{l}{48EI} \sqrt{m^2 g^2 l^4 + 96hmgEI}$$

【例 2-2】一卷扬机通过钢丝绳绕过固定滑轮吊起一质量为 m 的重物,钢丝绳的弹簧刚度 K 已知,卷扬机以速度 v 下降,如果突然刹车,即钢丝绳下端突然制动,求钢丝绳中所受的最大张力。如图 2-5 所示。

解:重物等速下降时,根据静平衡条件,钢丝绳内静张力 $T_1 = W = mg$,当突然刹车时,由于钢丝绳的弹性,重物在静平衡位置处将产生自由振动,动力学模型如图 2-5 所示。则固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (\text{rad/s})$$

振幅由式(2-11)可求得 $t=0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = v$ (m/s) 故

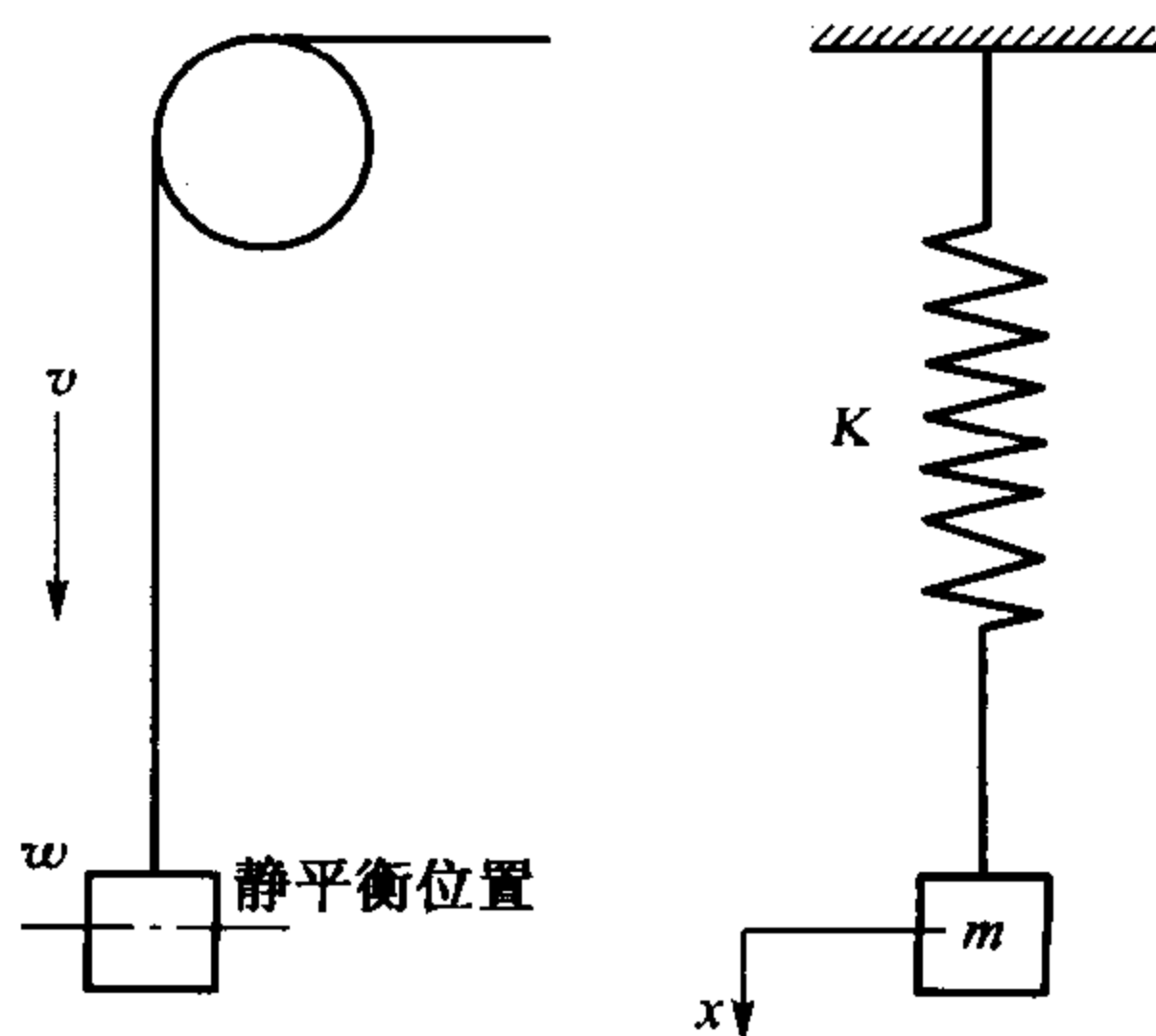


图 2-5 卷扬机及动力学模型

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2} = \frac{v_0}{\omega_n}$$

此时由于振动引起钢丝绳中最大动张力为

$$T_2 = KA$$

所以绳子中最大张力为

$$T = T_1 + T_2 = mg + KA$$

动张力很可能导致绳子的损坏。由 $T_2 = KA = K \frac{v}{\omega_n} = v\sqrt{Km}$ 可知, 当 m 、 v 不可能改变时, 只有降低 K 才能降低动张力。但钢丝的弹簧刚度 K 也是很难改变的, 实际做法是在钢丝绳下串联一个刚度较小的弹簧, 以降低系统的刚度, 即采用图 2-6 所示的弹簧减振钩来减小钢丝绳的动张力。

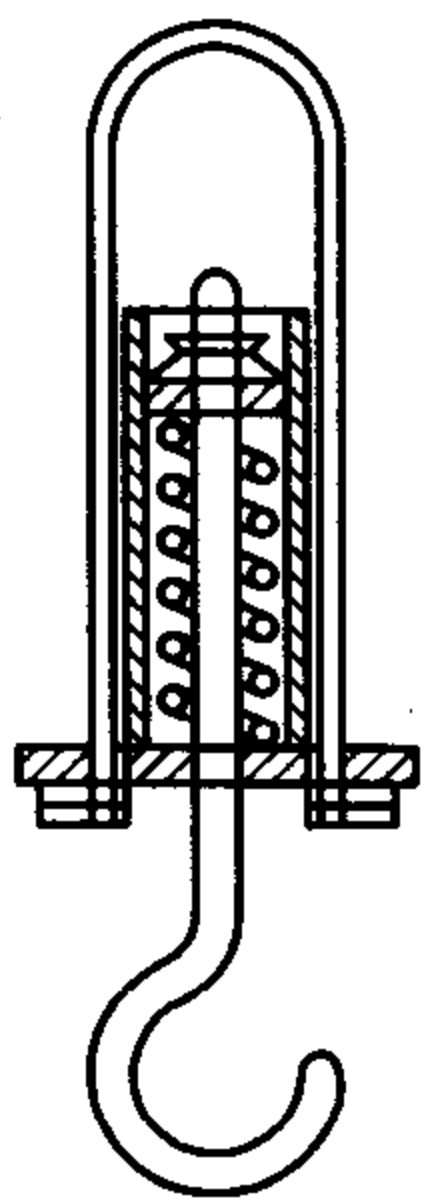


图 2-6 弹簧减振钩

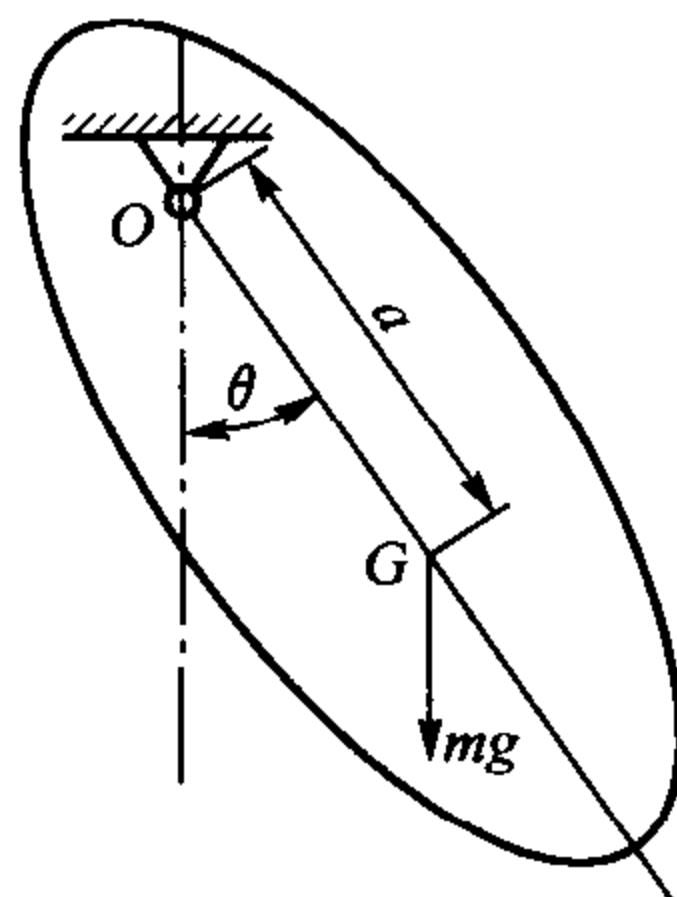


图 2-7 复摆

【例 2-3】 一个刚体由于本身重力作用而绕某一轴作微摆动称为复摆, 也称物理摆。如图 2-7 所示, 设刚体质量 m 为对悬挂轴 O 点的转动惯量为 J_0 , 重心 G 至 O 点距离为 a 。现以 θ 表示重心到平衡位置摆动的角位移, 此时重力的切向分力 $mg \sin \theta$ 将产生一恢复力矩 $mga \sin \theta$, 根据式 (2-14) 可得复摆的运动微分方程式

$$J_0 \ddot{\theta} + mga \sin \theta = 0$$

上式为非线性微分方程式, 要用椭圆积分求解。因为讨论的是微摆动, 则 $\sin \theta \approx \theta$, 上式可简化为

$$J_0 \ddot{\theta} + mga \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0$$

这与扭振是完全相同的形式, 故可得出固有圆频率和固有频率分别为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{mga}{J_0}} \quad (2-20)$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mga}{J_0}} \quad (2-21)$$

解得

$$\theta = A \sin \left(\sqrt{\frac{mga}{J_0}} t + \varphi \right)$$

根据式(2-21),若实验测出 f 后,便可求出 J_0 。又根据转动惯量移轴定律,可按下式计算出刚体绕重心轴的转动惯量 I_G

$$J_G = J_0 - \frac{mg}{g} a^2 \quad (2-22)$$

这是测定形状复杂构件的转动惯量常用的方法。

2) 能量法

考察直线振动系统的振动能量,可用 $\dot{x}dt$ 乘以式(2-2),再积分,则可得

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = C$$

C 为积分常数。显然,式中第一项为振动时的动能 T ,第二项为系统的势能 U ,即弹簧贮存的弹性势能或重力做功而产生的重力势能,故上式可写成

$$T + U = C \quad (2-23)$$

或

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0 \quad (2-24)$$

这说明系统在阻尼忽略不计时,在振动过程中没有能量损失,是一个保守系统。根据机械能守恒定律,在振动的任一瞬时,其动能与势能之和应保持不变。正是由于机械能守恒,系统才能维持持久的等幅振动。

任意选择两个振动位置,则式(2-23)可写成

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \quad (2-25)$$

现选择两个特殊位置讨论,当在平衡位置时, $x=0$,故势能为零,此时动能应为最大值,即 T_{\max} ;当振动达最大振幅时,速度 $\dot{x}=0$,故动能为零,此时势能达最大值 U_{\max} ,按上式即可得出

$$T_{\max} = U_{\max} \quad (2-26)$$

用上式可直接求系统的固有频率,称为能量法。

$$T_{\max} = \frac{1}{2}m\dot{x}_{\max}^2 = U_{\max} = \frac{1}{2}Kx_{\max}^2$$

因

$$\dot{x}_{\max} = A\omega_n, x_{\max} = A$$

故

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

某些系统不易简化成单自由度系统,若能方便地写出系统的动能和势能,则用能量法往往更为简便。

【例 2-4】 图 2-8 所示为一无定向摆,已知整个系统对轴 O 的转动惯量为 J_0 ,求系统的固有频率。

解:以摆杆偏离静平衡位置的角位移 θ 为参数,设其运动解为

$$\theta = A\sin(\omega_n t + \varphi)$$

则 $\dot{\theta} = A\omega_n \cos(\omega_n t + \varphi)$ 且

$$\theta_{\max} = A, \dot{\theta}_{\max} = A\omega_n$$

当最大角位移时,其系统最大势能包括两部分:

一是弹性势能

$$U_{1\max} = 2 \cdot \frac{1}{2}Ka^2\theta_{\max}^2 = Ka^2A^2$$

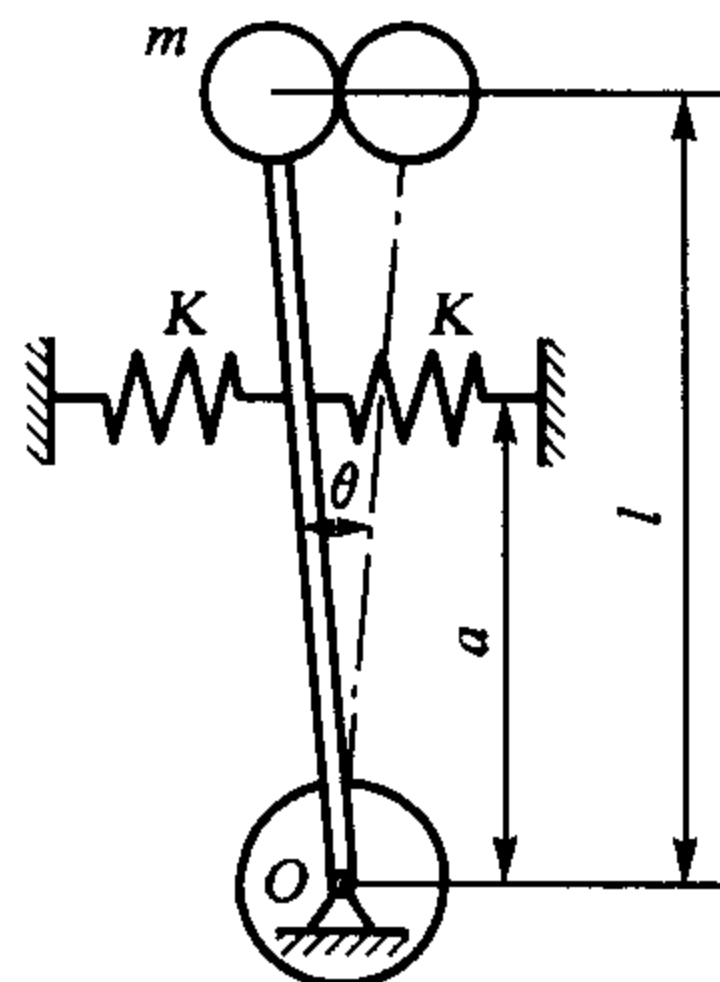


图 2-8 无定向摆

另一是质量块重心下降的重力势能

$$U_{2\max} = -mgl(1 - \cos \theta_{\max}) \approx -mgl \frac{\theta_{\max}^2}{2} = -mgl \frac{A^2}{2}$$

在静平衡位置时, $\theta=0$, 系统最大动能为

$$T_{\max} = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}_{\max}^2 = \frac{1}{2} J_0 A^2 \omega_n^2$$

由 $T_{\max} = U_{\max}$ 可得

$$\frac{1}{2} J_0 A^2 \omega_n^2 = Ka^2 A^2 - mgl \frac{A^2}{2}$$

故

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2Ka^2 - mgl}{J_0}}$$

只要 K, m, a, l, J_0 设计得合适, 固有频率很低, 就可用来测量低频振动。

3) 等效质量计算

实际的振动系统, 质量常常是分散的, 可以采用一个集中的等效质量代替实际的分散质量, 简化力学模型。

在一些实际工程问题中, 弹簧本身的质量较大而不能被忽略, 否则计算出的固有频率会偏高。但是弹簧为分布质量系统的物体, 因此这是较复杂的弹性振动问题。

现介绍一种近似算法——瑞利法。它运用能量原理, 把一个分布质量系统简化成一单自由度系统, 把弹簧分布质量对系统的振动频率的影响考虑进去, 得到足够的准确性。以图 2-9 所示单质量弹簧系统为例, 如果要考虑弹簧质量, 则系统的动能就应将弹簧质量产生的动能考虑进去。首先假定弹簧的振动形态, 设弹簧各截面在振动过程中,

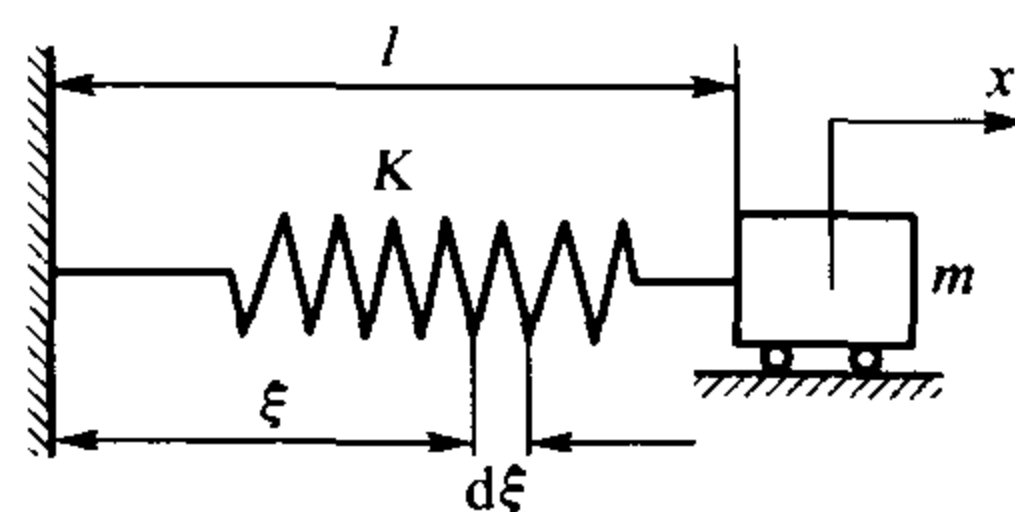


图 2-9 单质量弹簧系统

中, 质量块与弹簧连接处的位移为 x 的长度为 l 的弹簧, 距固定端为 ξ 处的位移则为 $\frac{x}{l}\xi$, 该处一微段 $d\xi$ 的相应速度则为 $\frac{\dot{x}}{l}\xi$ 。故 $d\xi$ 的动能为 $\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\xi}{l}\dot{x}\right)^2 d\xi$ 。式中 ρ 为弹簧单位长度的质量。整个弹簧的动能便可用积分方法求得。

$$T = \int_0^l \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\xi}{l}\dot{x}\right)^2 d\xi = \frac{\rho\dot{x}^2}{2l^2} \int_0^l \xi^2 d\xi = \frac{1}{2} \frac{\rho l}{3} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m_s \dot{x}^2$$

式中: $m_s = \frac{\rho l}{3}$ ——弹簧等效质量。

ρl ——弹簧的总质量。

可见圆柱弹簧等效质量为实际质量的三分之一。现用能量法求固有频率, 在静平衡处系统具有最大动能, 为质量块与弹簧的动能之和。

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m \dot{x}_{\max}^2 + \frac{1}{2} m_s \dot{x}_{\max}^2$$

而在最大位移处, 系统具有最大势能

$$U_{\max} = \frac{1}{2} K x_{\max}^2$$

由

$$T_{\max} = U_{\max} \quad \text{及} \quad x_{\max} = A, \quad \dot{x}_{\max} = A\omega_n$$

可得

$$(m+m_s)A^2\omega_n^2=KA^2$$

故

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m+m_s}} \quad (2-27)$$

上式中弹簧的等效质量 m_s 即为考虑弹簧质量的影响而加到集中质量上的那部分质量。

值得注意的是,具有分散质量的不同振动系统,均可以采用等效质量代替实际的分散质量,简化模型。要注意两点:一是动能相等原则;二是假定分散质量的振动形状接近实际的振动形状。实践证明,用静变形作为假定的振动形状,一般都较准确,误差很小。

【例 2-5】 如果例 2-1 要把梁本身质量考虑进去,如图 2-10 所示,试计算梁的等效质量并求系统固有频率。

解:先假定梁的振动形态与静变形挠度曲线一样,由材料力学可知,简支梁中点有集中载荷 mg 作用的静挠度曲线公式为

$$y = y_c \frac{3l^2x - 4x^3}{l^3}$$

式中: y_c ——中点挠度, $y_c = \frac{mgl^3}{48EI}$ 。

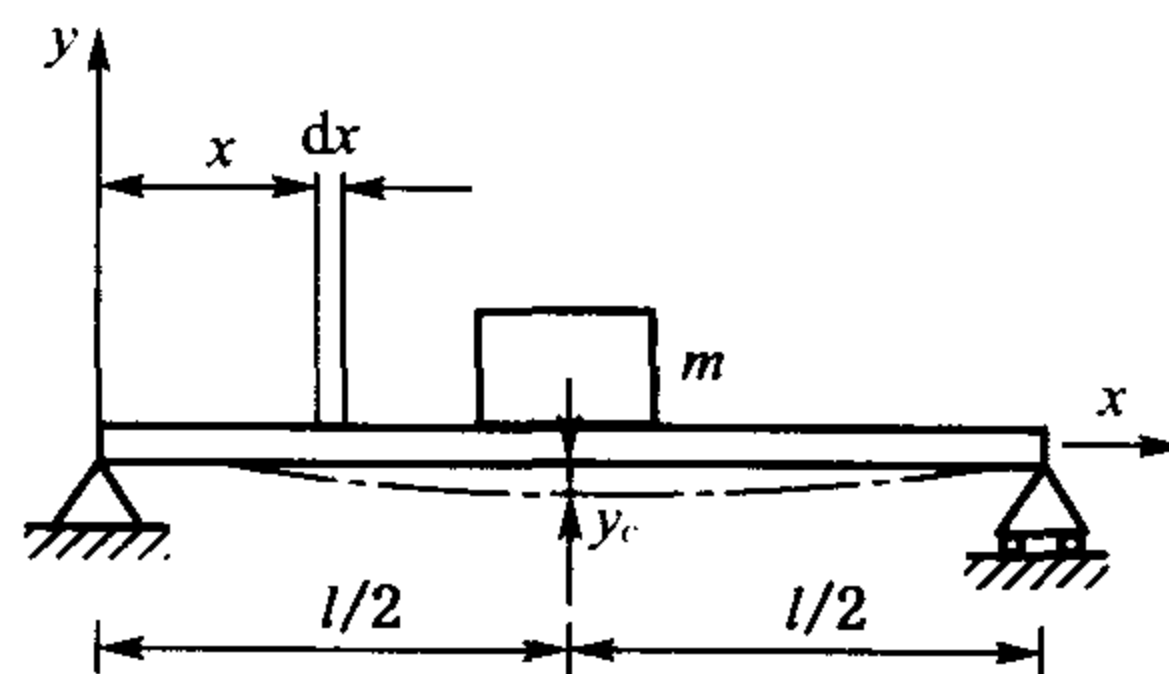


图 2-10 梁振动的等效质量

当梁自由振动时,可以利用上式求梁在任何瞬时各截面的垂直位移,只不过 y_c 也是随时间变化的,可由简谐振动写出如下关系

$$y_c = A \sin(\omega_n t + \varphi)$$

$$\dot{y}_c = A \omega_n \cos(\omega_n t + \varphi)$$

$$\dot{y} = \dot{y}_c \frac{3l^2x - 4x^3}{l^3}$$

现设 ρ 为梁单位长度的质量,便可用积分求梁的动能

$$T_b = 2 \int_0^{l/2} \frac{1}{2} \rho \left(\dot{y}_c \frac{3l^2x - 4x^3}{l^3} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{35} \rho l \right) \dot{y}_c^2 = \frac{1}{2} m_s \dot{y}_c^2$$

式中: 梁的等效质量为 $m_s = \frac{17}{35} \rho l$ 。

而 ρl 即为梁的总质量,故等效质量为其实际质量的 $17/35$,相当于产生相等的效果,在梁的中点处需增加的质量。故系统的固有频率由式(2-27)即可求出。

由此例可知,当考虑梁的质量时,相当于将其一半质量加在中点集中质量上。梁的质量大时是不能忽略其质量的。

根据动能相等原则,可求得具有分散质量的系统的等效质量。

4) 等效刚度

使系统的某点沿指定方向产生单位位移(或角位移)时,在该点同一方向所要施加的力(或力矩),称为系统在该点沿指定方向的刚度。刚度的倒数,即单位力引起的位移,称为柔度。

由刚度定义可看出,即使同一个弹性元件,根据所要分析的不同方向的振动,会具有不同的刚度。如图 2-11 所示,设等直长杆的长为 l ,圆截面积为 A ,截面惯性矩为 I ,截面极惯性矩为 I_p ,材料的弹性模量为 E ,若要确定杆端 B 点处沿 x 方向的刚度,则按材料力学可知,沿 x

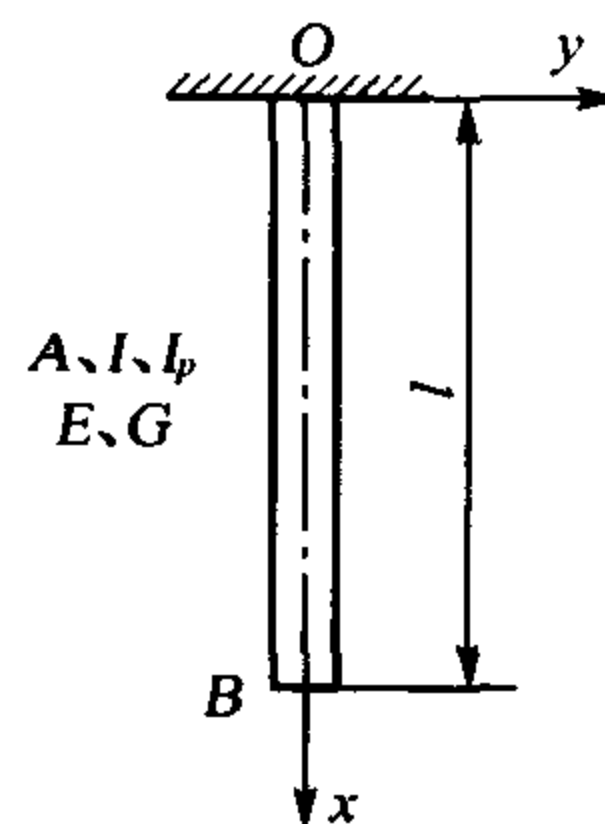


图 2-11 等直圆杆的刚度

方向加上垂直力 F 时, B 点的 x 方向位移为

$$x_B = \frac{Fl}{EA}$$

B 点 x 方向的刚度 K_x , 称为抗拉压刚度

$$K_x = \frac{F}{x_B} = \frac{EA}{l}$$

式中: EA ——截面抗拉压刚度。

若要计算 B 点沿 y 方向的刚度, 则沿 y 方向施加一横向力 P 时, B 点的位移可由材料力学悬臂梁弯曲变形的挠度公式求得

$$y_B = \frac{\rho l^3}{3EI}$$

B 点 y 方向的刚度 K_y 称为弯曲刚度

$$K_y = \frac{P}{y_B} = \frac{3EI}{l^3}$$

式中: EI ——截面抗弯刚度。

若要计算直杆绕 x 轴方向的扭转刚度, 则要在 B 点施加一绕 x 轴转动的扭矩 M_t , 根据直杆扭转角公式可求 B 点处的转角

$$\theta_B = \frac{M_t l}{GI_p}$$

式中: G ——剪切弹性模量。

B 点绕轴 x 方向的刚度 K_θ 称为扭转刚度

$$K_\theta = \frac{M_t}{\theta_B} = \frac{GI_p}{l}$$

式中: GI_p ——截面抗扭刚度。

刚度的定义方法是运用材料力学或结构力学计算静变形的的方法, 均为静刚度, 在机械工程中, 弹性元件的形式是多种多样的, 纵向振动有圆柱弹簧、橡胶弹簧等; 横向振动有板簧、梁等; 扭转振动有扭簧、杆、轴等。

在一个系统中, 往往不是单独使用某个弹性元件, 而是以串联或并联等方法连接成一组弹性元件。这在单自由度系统中, 就要集中成一个弹性元件, 这个弹性元件的刚度应与原弹性元件组的刚度等效, 称为等效刚度。现以图 2-12 为例, 求等效刚度。图中(a)为两个串联弹簧, 刚度分别为 K_1 和 K_2 , 当 B 点加一垂直力 F 时, 两个弹簧分别被拉长 F/K_1 和 F/K_2 , 故 B 点总伸长为

$$x_B = \frac{F}{K_1} + \frac{F}{K_2}$$

故 B 点的等效刚度为

$$K = \frac{F}{x_B} = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \quad \text{或写成} \quad \frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

由此可看出串联弹簧等效刚度比原来两个弹簧元件的刚度都要小。这是在例题 2-2 中采用弹簧减振钩串联弹簧以降低总刚度的理由。

图中(b)为两个并联弹簧 K_1 和 K_2 , 当 B 点加一垂直力

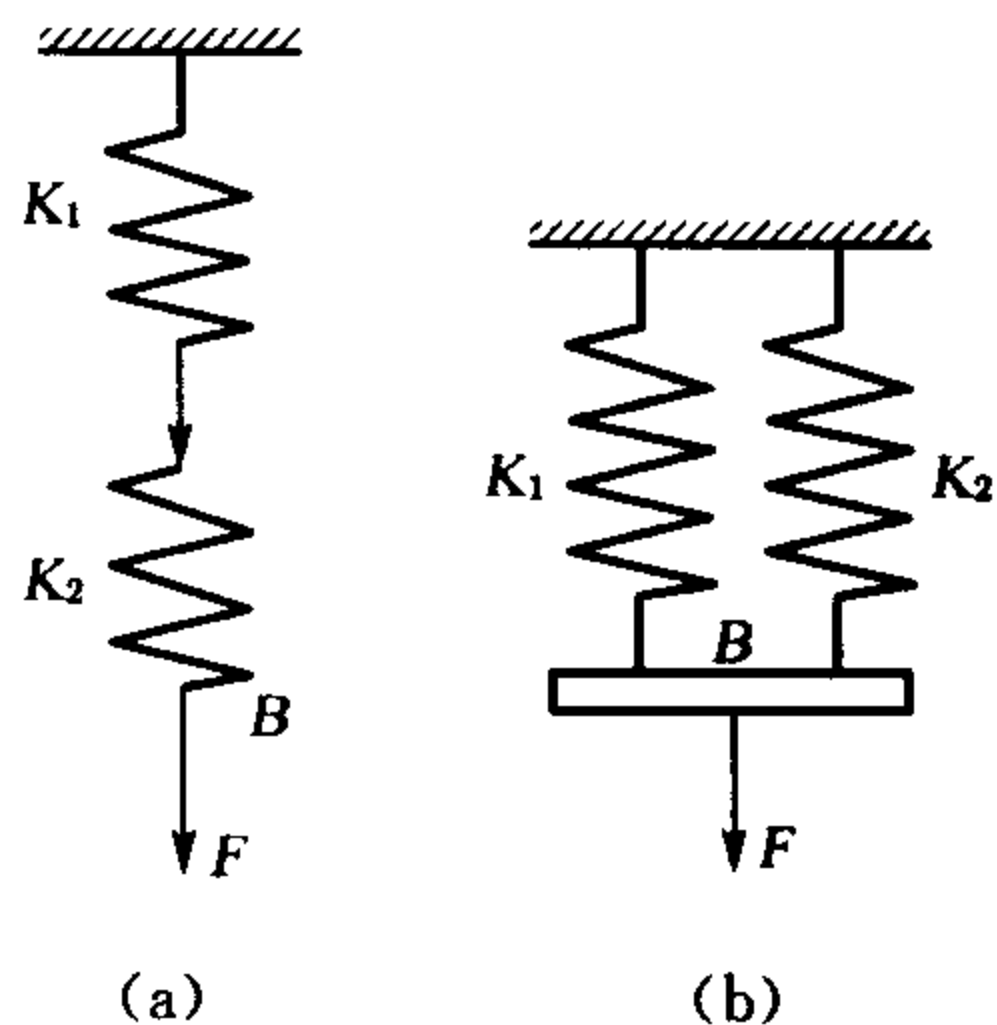


图 2-12 串、并联弹簧

F 时,若连接两个弹簧的刚性杆在变形过程中保持水平位置,则弹簧同时伸长 x_0 ,此时两个弹簧的受力不等。由垂直方向静力平衡条件可得

$$F = K_1 x_B + K_2 x_B$$

故点 B 的等效刚度为

$$K = \frac{F}{x_B} = K_1 + K_2$$

可见并联弹簧的等效刚度为各弹簧刚度之和,刚度肯定是增大。

若一单自由度系统由若干个分散的或以不同形式联接的弹性元件组成,只要根据势能相等原则,便可求得系统的总等效刚度。

2.1.3 具有黏性阻尼单自由度系统的自由振动

1) 黏性阻尼理论概述

在实际振动系统中不可避免地存在阻力,例如两物体之间的摩擦力,气体或液体等介质的阻力,电磁阻力及材料的内摩擦引起的阻力等等,我们统称为阻尼。不同的阻尼有不同的性质。当两个相对滑动面之间有一层连续的润滑油膜存在时,其阻力与相对运动的速度成正比。一个物体若以低速在黏性液体中运动,或者如阻尼缓冲器那样,使液体从很狭窄的缝里通过的话,阻力也与速度成正比,这种阻尼称为黏性阻尼,阻力与速度有如下关系:

$$F = cv$$

式中: c ——黏性阻尼系数,它决定于运动物体的形状、尺寸以及润滑剂的黏性。

黏性阻尼又称线性阻尼,以黏性阻尼来研究有阻尼的振动,可使求解振动问题大为简化。如果系统为非黏性阻尼,通常根据一个周期内非黏性阻尼所消耗的能量和一个等效的黏性阻尼所消耗的能量相等原则来换算成等效的黏性阻尼系统,以便进行近似计算。立足于黏性阻尼来研究阻尼振动的方法称为黏性阻尼理论。

2) 有阻尼单自由度系统振动微分方程的建立及其解

现在讨论图 2-13 所示有阻尼单自由度系统的自由振动。图中以缓冲器符号表示阻尼,黏性阻尼系数以 c 表示。此时系统增加一阻尼力 $c\dot{x}$,此力的方向与速度方向相反,故取负号,由牛顿运动定律,以静平衡位置为坐标原点可得方程式

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - Kx$$

$$\text{即} \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0 \quad (2-28)$$

$$\text{或} \quad \ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (2-29)$$

式中: $n = \frac{c}{2m}$, $\omega_n^2 = \frac{K}{m}$ 。

现在设微分方程的解为 $x = e^{st}$,代入上式得

$$(s^2 + 2ns + \omega_n^2)e^{st} = 0$$

故特征方程为

$$s^2 + 2ns + \omega_n^2 = 0$$

特征根为

$$s_{1,2} = -n \pm j\sqrt{n^2 - \omega_n^2}$$

由此可得方程的通解为

$$x = c_1 e^{(-n+j\sqrt{n^2-\omega_n^2})t} + c_2 e^{(-n-j\sqrt{n^2-\omega_n^2})t} = e^{-nt} (c_1 e^{j\sqrt{n^2-\omega_n^2}t} + c_2 e^{-j\sqrt{n^2-\omega_n^2}t}) \quad (2-30)$$

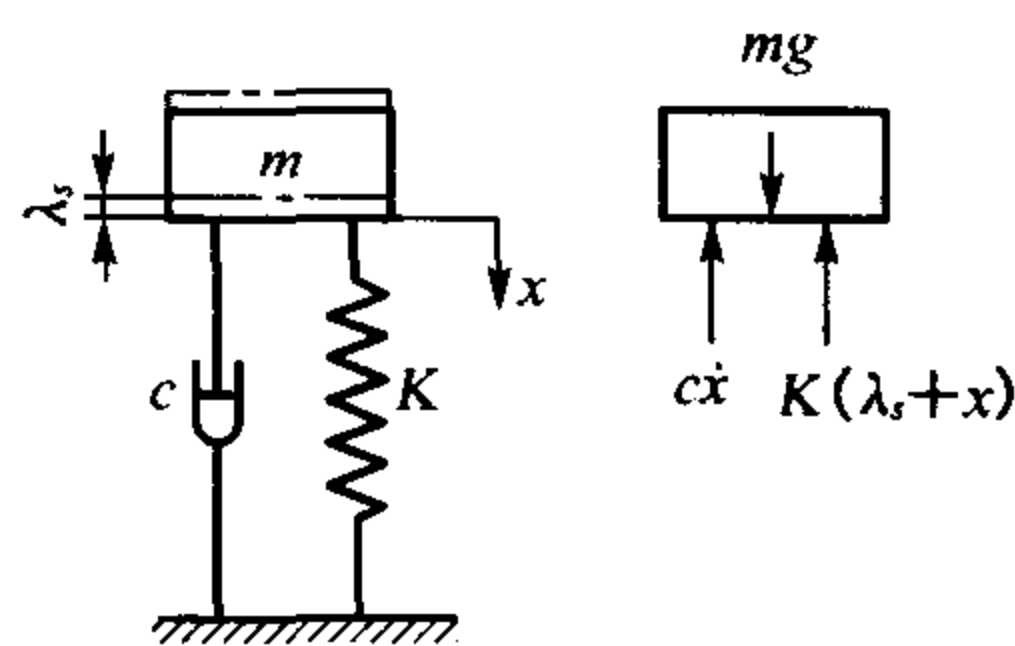


图 2-13 有阻尼自由振动系统

可知解的性质决定于 $\sqrt{n^2 - \omega_n^2}$ 是实数、零、还是虚数。为此引进一个相对阻尼系数 ξ

$$\xi = \frac{n}{\omega_n} \quad (2-31)$$

ξ 是一个无量纲的量。

当 $n > \omega_n$ 时, $\xi > 1$, $\sqrt{n^2 - \omega_n^2}$ 为实数, 称强阻尼状态。

当 $n < \omega_n$ 时, $\xi < 1$, $\sqrt{n^2 - \omega_n^2}$ 为虚数; 称弱阻尼状态。

当 $n = \omega_n$ 时, $\xi = 1$, $\sqrt{n^2 - \omega_n^2}$ 为零, 称临界阻尼状态。

(1) 弱阻尼状态, $\xi < 1$, 利用欧拉公式将式(2-30)进行三角变换可得

$$x = e^{-nt} (b_1 \cos \sqrt{\omega_n^2 - n^2} t + b_2 \sin \sqrt{\omega_n^2 - n^2} t)$$

式中: $b_1 = c_1 + c_2$, $b_2 = (c_1 - c_2)j$ 。

上式也可写为

$$x = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{\omega_n^2 - n^2} t + \varphi) \quad (2-32)$$

式中: $A = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, $\varphi = \text{tg}^{-1} \frac{b_1}{b_2}$ 。

均由初始条件定, 将 $t = 0, x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0$ 代入方程解可得

$$b_1 = x_0, \quad b_2 = \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + nx_0)^2}{\omega_n^2 - n^2}}, \quad \varphi = \text{tg}^{-1} \frac{x_0 \sqrt{\omega_n^2 - n^2}}{\dot{x}_0 + nx_0} \quad (2-33)$$

现设

$$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - n^2} \quad (2-34)$$

ω_d 称为有阻尼衰减振动圆频率, 则有阻尼衰减振动的周期为 $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$, 故式(2-32)可写为

$$x = Ae^{-nt} \sin(\omega_d t + \varphi) \quad (2-35)$$

由上式可知, 系统的振动已不再是等幅的简谐振动, 其振幅被限制在指数衰减曲线 $\pm Ae^{-nt}$ 之内, 且当 $t \rightarrow \infty, x \rightarrow 0$ 时振动将最终停止, 此振动称为衰减振动, 故 n 称为衰减系数。如图2-14所示, 严格说这已不是周期性运动, 但衰减振动仍保持一定的圆频率, 由式(2-34)可知此时圆频率小于无阻尼振动的圆频率, 显然衰减振动的周期便大于无阻尼自由振动周期。

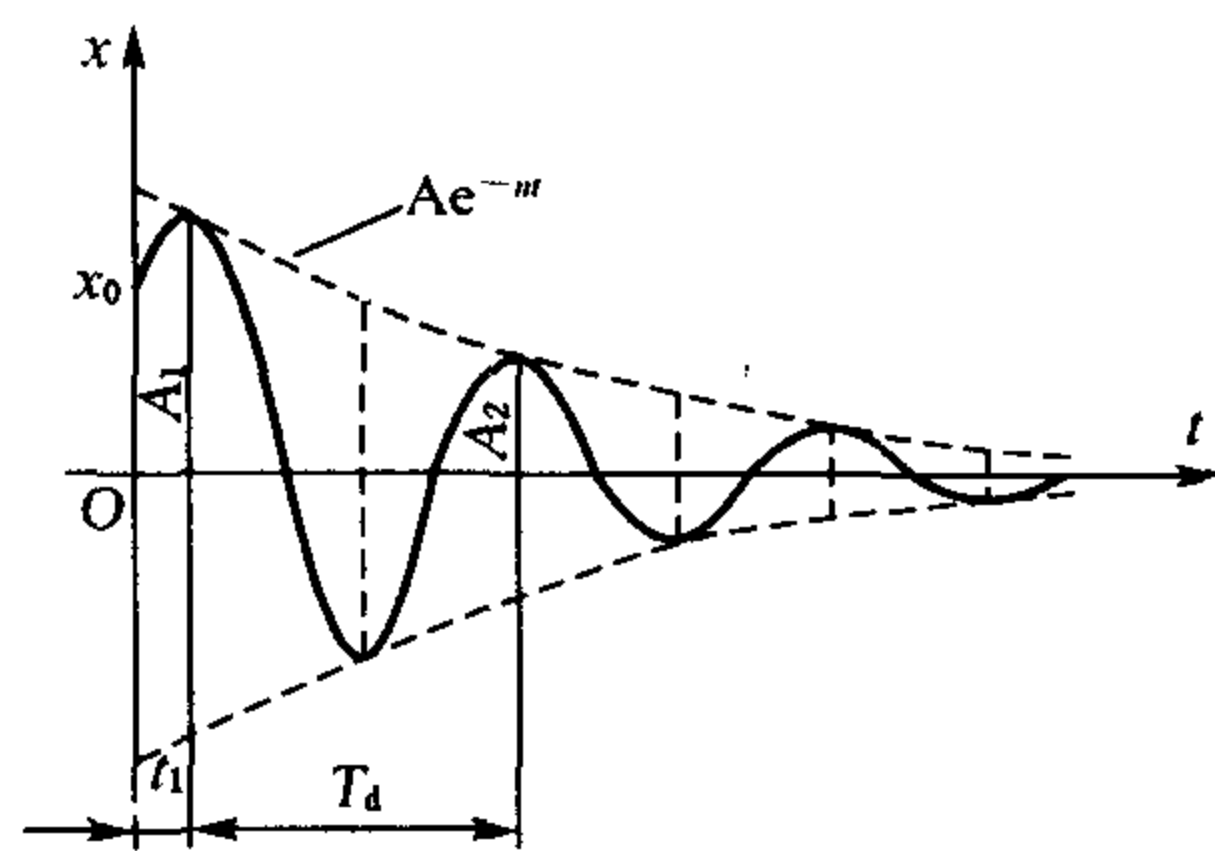


图 2-14 衰减振动响应曲线

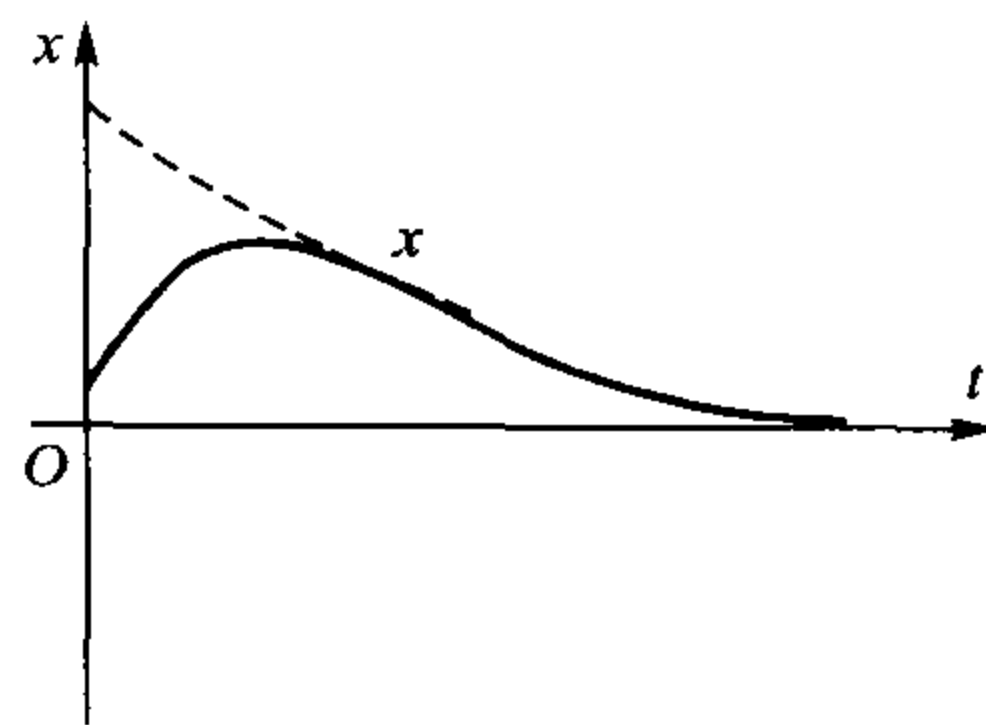


图 2-15 强阻尼响应曲线

(2) 强阻尼状态, $\xi > 1$, $\sqrt{n^2 - \omega_n^2}$ 是实数, 且 $\sqrt{n^2 - \omega_n^2} < n$, 故式(2-30)表示的已不再是振动, 而是按指数衰减的非周期性蠕动, 响应曲线如图2-15所示。

(3) 临界阻尼状态, $\xi=1$, $n=\xi_n$, 方程的通解为 $x = e^{-\omega_n t} (c_1 + c_2 t)$

此方程所表示的运动也是非周期的。如初始条件 $t=0, x=x_0, \dot{x}=\dot{x}_0$, 方程解为 $x = e^{-\omega_n t} [x_0 + (\dot{x}_0 + \omega_n x_0)t]$, 图 2-16 表示了在相同初始位移 x_0 时几种不同的初始速度 \dot{x}_0 条件下的响应曲线, 它们均按指数规律衰减。

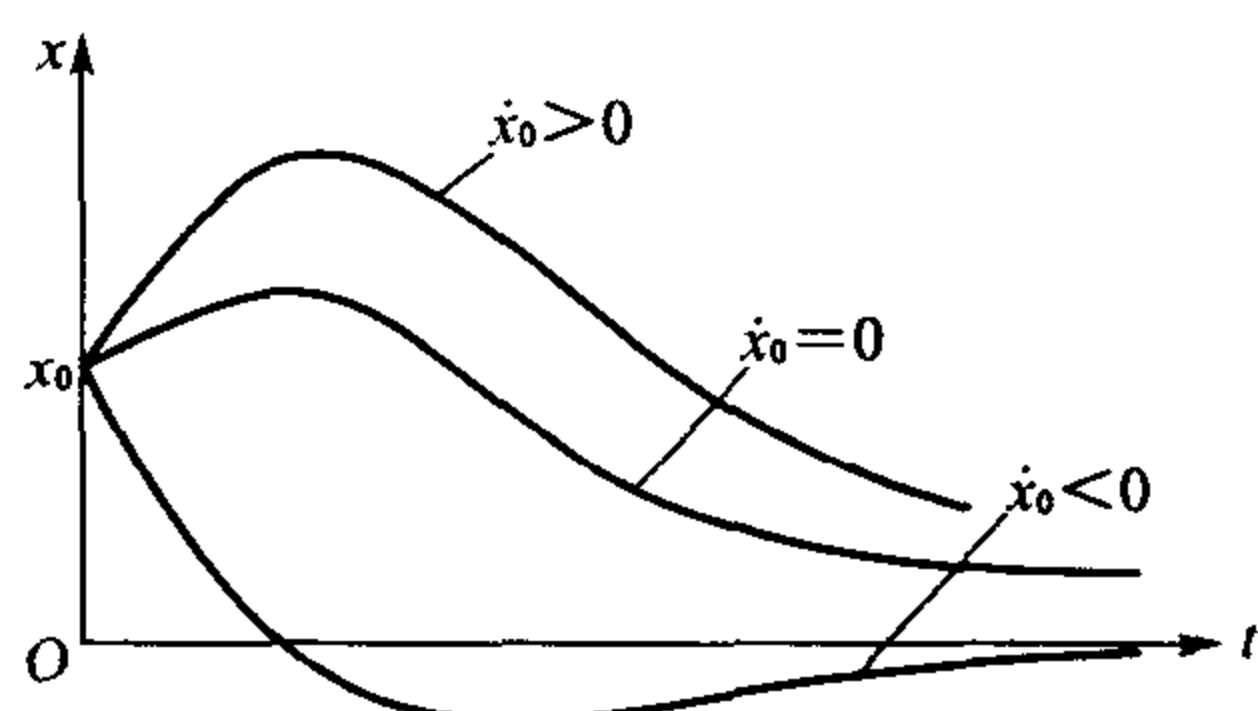


图 2-16 临界阻尼振动曲线

由 $n=\omega_n$, 可得 $\frac{c}{2m} = \sqrt{\frac{K}{m}}$,

当阻尼值等于上式时称为临界阻尼, 并用 c_c 表示, 即

$$c_c = 2\sqrt{mK} \quad (2-36)$$

可见系统的临界阻尼值只决定于系统本身的物理性质 (m, K)。

又由
$$\xi = \frac{n}{\omega_n} = \frac{2\sqrt{m}}{2m\sqrt{K}} = \frac{c}{2\sqrt{mK}} = \frac{c}{c_c} \quad (2-37)$$

故 ξ 称为相对阻尼系数, 即系统和阻尼与其临界阻尼之比值。

综合上述 3 种情况可知, 系统的振动性质取决于相对阻尼系数 ξ 的值。

3) 阻尼对衰减振动的影响

由式(2-35)可知, 在弱阻尼状态, 阻尼对自由振动的影响为两个方面: 一方面是振动圆频率比固有圆频率小, 周期变长, 但当阻尼很小时, 这种影响可以忽略不计; 另一方面是振幅不断衰减, 见图 2-14, 由于振幅被限制在 $\pm Ae^{-nt}$ 指数衰减曲线之内, 现讨论振幅衰减的情况。由图可知相邻两个振幅之比为

$$\eta = \frac{A_1}{A_2} = \frac{Ae^{-n t_1}}{Ae^{-n(t_1+t_d)}} = e^{nT_d} \quad (2-38)$$

故 η 是一个常数, 说明系统的振幅按几何级数衰减, η 称为减幅系数, 又称为衰减系数。实际应用中为了避免取指数值, 采用对数减幅系数。

$$\delta = \ln \eta = \ln e^{nT_d} = nT_d \quad (2-39)$$

代入 $T_d = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}}$ 可得

$$\delta = \frac{n \cdot 2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2-40)$$

从上式可知, 当我们通过实测得到相邻两个振幅之比时, 便能计算出系统的阻尼。为便于测试, 提高精度, 还可将式(2-40)改写成从任一振幅 A_i 开始与 m 个周期后的振幅之比, 即

$$\frac{A_i}{A_{i+m}} = \frac{A_i}{A_{i+1}} \cdot \frac{A_{i+1}}{A_{i+2}} \cdots \frac{A_{i+m-1}}{A_{i+m}} = e^{mT_d} = \eta^m$$

所以

$$\eta = \sqrt[m]{\frac{A_i}{A_{i+m}}}$$

也可用对数减幅系统表示 $\ln \frac{A_i}{A_{i+m}} = m\delta$

故

$$\delta = \frac{1}{m} \ln \frac{A_i}{A_{i+m}} \quad (2-41)$$

2.2 单自由度系统的强迫振动

系统由于外界持续激振力所引起的振动称为强迫振动。系统从外界不断获得能量补偿阻尼所消耗的能量,使系统能维持等幅振动。外界激振力作用于系统的方式有两种情况:一种是持续的激振力;另一种是持续的支承运动。无论是力还是运动都可能是周期性的或非周期性的。

2.2.1 简谐激振力作用下系统的响应

外界激振使系统产生的振动状态称为系统的响应,响应可用位移、速度和加速度形式表达。首先讨论最简单的情况,即由简谐激振力直接作用在质量块上产生的强迫振动。

1) 振动方程及其稳态解

图 2-17 所示为在一外力 $F = F_0 \sin \omega t$ 激振下的单自由度系统力学模型。

微分方程的建立仍按牛顿运动定律,与有阻尼的自由振动相比增加一外力,故可得

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - Kx + F_0 \sin \omega t$$

$$\text{或} \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0 \sin \omega t \quad (2-42)$$

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_n^2 x = q \sin \omega t \quad (2-43)$$

式中: n, ω_n 意义同前, $q = \frac{F_0}{m}$ 。

忽略阻尼的影响时,振动方程式表示为

$$m\ddot{x} + Kx = F_0 \sin \omega t \quad (2-42a)$$

$$\text{或} \quad \ddot{x} + \omega_n^2 x = q \sin \omega t \quad (2-43a)$$

方程(2-43)是一个非齐次方程,它的全解为: $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, 其中 $x_1(t)$ 是对应的齐次方程的通解, $x_2(t)$ 是非齐次方程的特解。 $x_1(t)$ 的解即前述自由振动的解, 在弱阻尼状态时为

$$x_1(t) = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{\omega_n^2 - n^2}t + \varphi)$$

这是一个衰减振动,只有在振动开始后一段时间内才存在,不久便消失,所以称为瞬态振动,一般情况可不予考虑。

特解 $x_2(t)$ 表示系统在简谐激振力下产生的强迫振动,是一种持续的等幅振动,称为稳态振动。根据微分方程的非齐次项是简谐函数这一特性,可知特解的形式亦为简谐函数,且振动圆频率与激振力的圆频率相等,但有一定的相角差,且强迫振动的位移变化总滞后于激振力的变化,故我们可设方程的特解形式为

$$x_2(t) = B \sin(\omega t - \varphi) \quad (2-44)$$

式中: B ——稳态振动的振幅。

φ ——相角差。

将式(2-44)代入式(2-43)可得

$$-B\omega^2 \sin(\omega t - \varphi) + 2nB\omega \cos(\omega t - \varphi) + \omega_n^2 B \sin(\omega t - \varphi) = q \sin \omega t$$

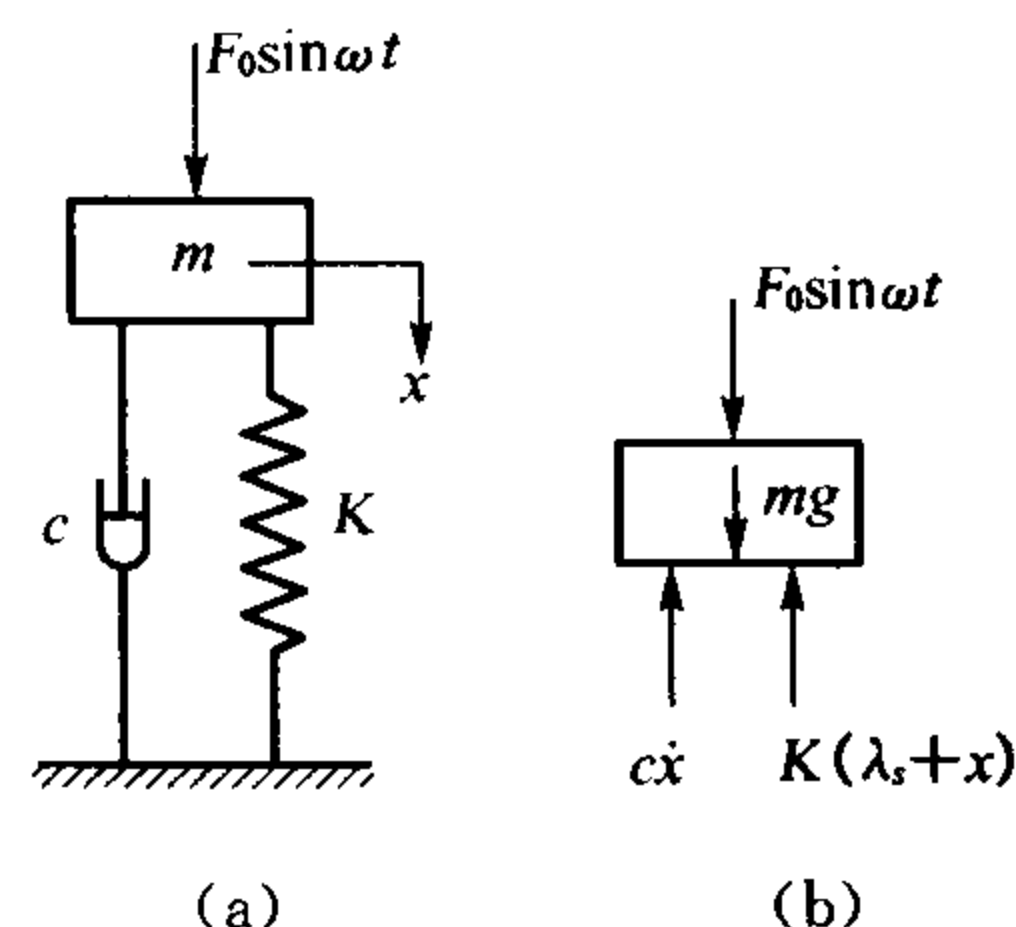


图 2-17 强迫振动力学模型

将上式等号右边改写为

$$q \sin \omega t = q \sin[(\omega t - \phi) + \phi] = q \sin(\omega t - \phi) \cos \phi + q \cos(\omega t - \phi) \sin \phi$$

代入前式整理可得

$$[B(\omega_n^2 - \omega^2) - q \cos \phi] \sin(\omega t - \phi) + (2nB\omega - q \sin \phi) \cos(\omega t - \phi) = 0$$

因为同角的正弦、余弦的值不可能同时为零,故

$$\begin{cases} B(\omega_n^2 - \omega^2) - q \cos \phi = 0 \\ 2nB\omega - q \sin \phi = 0 \end{cases}$$

可解出 B 、 ϕ 二个待定系数

$$B = \frac{q}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} \quad (2-45)$$

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\xi r}{1 - r^2} \quad (2-46)$$

代入式(2-44)即为系统的稳态位移响应

$$x_2(t) = \frac{q}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \sin\left(\omega t - \operatorname{tg}^{-1} \frac{2n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) \quad (2-47)$$

上式也可用系统基本参数 m 、 K 、 c 、 F_0 表达为

$$x_2(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(K - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}} \sin\left(\omega t - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega c}{K - \omega^2 m}\right) \quad (2-48)$$

所以稳态响应的振幅 B 和相角差 ϕ 均取决于系统本身的物理性质(质量、弹簧刚度、阻尼)和激振力的性质(频率与幅值),而与初始条件无关,初始条件仅影响系统的瞬态响应的振幅 A 和初始相角 φ 。

忽略阻尼的影响时,振动方程式的稳态解表示为

$$x_2(t) = \frac{q}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2}} \sin \omega t = \frac{F_0}{\sqrt{(K - \omega^2 m)^2}} \sin \omega t$$

若为单自由扭转系统,系统在简谐力矩 $M_t = M_0 \sin \omega t$ 作用下产生强迫扭转振动,可得类似的振动微分方程

$$J\ddot{\theta} + C_\theta \dot{\theta} + K_\theta \theta = M_0 \sin \omega t$$

式中: θ ——角坐标。

K_θ ——扭转刚度。

C_θ ——扭转黏性阻尼系数。

J ——圆盘转动惯量。

可见扭转强迫振动与直线振动有完全相同的规律与特点。

2) 系统的幅频响应曲线和相频响应曲线

系统稳态振动的振幅和相角差随频率的变化规律可通过幅频响应曲线和相频响应曲线来表示。

首先讨论幅频响应曲线。可将振幅 B 改写为如下形式

$$B = \frac{F_0}{\sqrt{(K - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{F_0}{K \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{n}{\omega_n} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \\
 &= B_0 \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}
 \end{aligned} \quad (2-49)$$

式中: $B_0 = \frac{F_0}{K}$, 相当于激振力的幅值 F_0 静止地作用在弹簧上产生的弹簧静变形。强迫振动的幅值 B 与 F_0 成正比, 即改变激振力的幅值可改变强迫振动的幅值。 $r = \frac{\omega}{\omega_n}$ 称为频率比, 即外界激振力的频率与系统固有频率之比。 ξ 仍为相对阻尼系数。

继续将上式写为

$$\frac{B}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \beta \quad (2-50)$$

β 称为振幅放大因子, 即强迫振动的振幅与静态变形之比。故讨论 β 值大小, 即为讨论强迫振动幅值的大小。

忽略阻尼的影响时, 放大因子表示为

$$\beta = \frac{1}{1 - r^2} \quad (2-50a)$$

当阻尼一定时, β 仅是频率比 r 的函数, 故可以 r 为横坐标, β 为纵坐标, 对系统不同的 ξ 值可画出一组放大因子 β 随频率比 r 变化的曲线, 称为幅频响应曲线组, 如图 2-18 所示。由图明显看出, 当 $r \approx 1$, 系统发生共振时, 振幅有最大值。工程中特别要注意这一点。

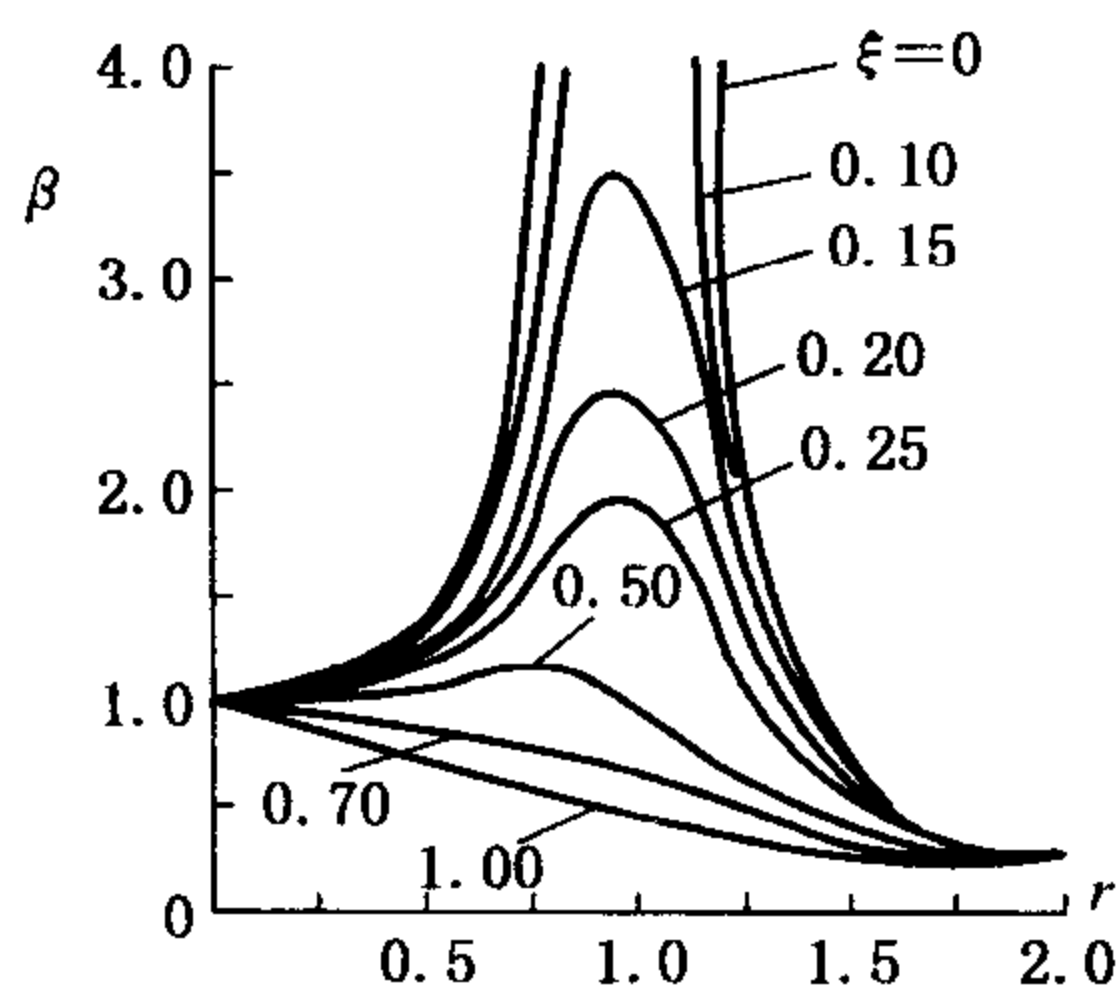


图 2-18 幅频响应曲线

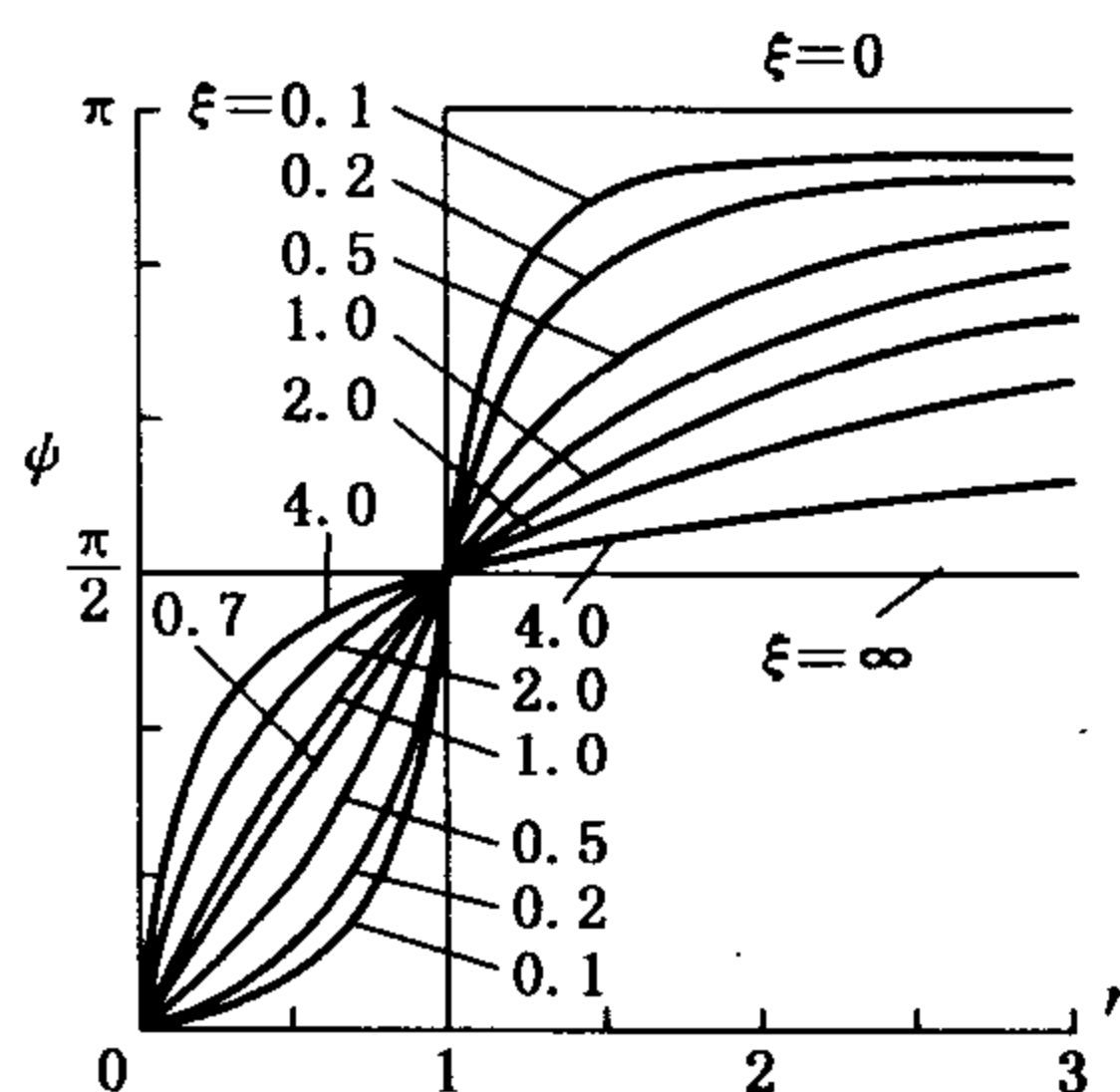


图 2-19 相频响应曲线

再讨论相频响应曲线。强迫振动响应与激振力的频率虽然相同, 但存在相角差, 按式 (2-46) 写成

$$\psi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\xi r}{1 - r^2}$$

可知相角差也仅与频率比和相对阻尼系数有关, 同样可以频率比 r 为横坐标、相角差 ψ 为纵坐标, 根据系统不同的阻尼系数值绘出一组相频响应曲线, 如图 2-19 所示。

$r=1$ 时, 即共振时, 相角差 ψ 恒为 $\frac{\pi}{2}$, 与系统的阻尼大小无关, 这是共振的一个重要特

征。据此能在试验时,根据相角差为 $\frac{\pi}{2}$ 来确定共振频率。

由图中可看出 ψ 与 r 的变化是非线性的,仅当 $\xi=0.7$ 时, r 由 $0 \rightarrow 1$ 这一段范围内呈线性关系 $\psi = \frac{\pi}{2} \cdot r$ 。

现根据图 2-18 和图 2-19 来分析讨论频率比 r 对振幅和相位的影响。

(1) 当 $r \ll 1$ 时(一般指 $r < 0.6 \sim 0.7$)。这时由于激振频率较低,速度、加速度都较小,产生的惯性力、阻尼力也较小,系统主要由弹性恢复力平衡外激振力,响应主要由弹簧刚度 K 控制,系统的静态特性是主要的。 β 比 1 大不了多少,即强迫振动的振幅与激振力幅值产生的静变形相差不大,响应位移基本与激振力同相, $\psi \approx 0$ 。当 $r=0$,即 $\omega=0$, $\beta=1$ 就等于静变形了。

(2) 当 $r \approx 1$ 时称为共振区。 $\psi = \frac{\pi}{2}$,系统发生共振,振幅达最大值。当 $r=1$ 时, $\beta = \frac{1}{2\xi}$,响应主要由阻尼控制。若 $\xi=0$ 即无阻尼时, β 为无穷大。通常称激振力频率等于系统固有频率时为共振,但实际上由于阻尼存在,最大振幅所对应的频率比并不是 $r=1$ 。通过 β 对 r 求导,并令其等于零,可求出 β 的最大值

$$\text{由 } \frac{d\beta}{dr} = 0 \text{ 得 } r = \sqrt{1-2\xi^2} \text{ 时,有最大值 } \beta = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-2\xi^2}}。$$

所以 $r = \frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1-2\xi^2}$, $\omega = \sqrt{1-2\xi^2}\omega_n$ 时,有最大振幅。由于一般阻尼往往较小,故以 $\omega = \omega_n$ 作为共振频率影响不大。

(3) 当 $r \gg 1$ 时(一般 $r > 1.3 \sim 1.4$)称惯性区。 $\psi \approx \pi$,响应位移和激振力接近反相,当 $r \gg 1$, $\xi=0$ 时, β 趋近于零,系统的响应主要取决于质量。在高频范围,加速度很大,惯性力对平衡激振力起主要作用。

为更清楚地表达外激振力 $F = F_0 \sin \omega t$ 与系统的响应之间的关系,小结如下:

当 $r \ll 1$ 时, $\psi \approx 0$,激振与响应基本同相,主要是系统的弹性恢复力 Kx 平衡激振力。

当 $r \approx 1$ 时, $\psi = \frac{\pi}{2}$,激振与响应互相垂直,主要是系统的阻尼力 $c\dot{x}$ 平衡激振力。

当 $r \gg 1$ 时, $\psi \approx \pi$,激振与响应基本反相,主要是系统的惯性力 $m\ddot{x}$ 平衡激振力。

3) 系统阻尼的影响

从幅频响应曲线可看出,在共振区,增加阻尼对减小振幅有显著作用,而远离共振区,阻尼的影响便减小,往往可以忽略不计。由图还可看出,当系统的相对阻尼系数 $\xi \geq 0.707$ 时,无论 ω 为何值,放大因子 β 恒小于 1,即振幅总是小于静变形。

由式(2-46)可看出,相位角 ψ 与阻尼比 ξ 成正比。

当 $\xi=0$,即无阻尼时, $r < 1$,则 $\psi=0$; $r > 1$, $\psi=\pi$; $r=1$ 共振时,突然反相。

当 $\xi=\infty$, ψ 恒等于 $\frac{\pi}{2}$ 。

在共振时($r=1$),放大因子 $\beta = \frac{1}{2\xi}$,称为系统的品质因子,以符号 Q 表示, $Q = \frac{1}{2\xi}$ 。从幅频响应曲线可看出, Q 值越小,阻尼越大,曲线的共振峰便越平缓,即过共振区时比较平稳,这是所期望的。反之, Q 值越大,阻尼越小,则共振峰越陡。下面我们来定量分析一下。

图 2-20 所示为某一 ξ 的幅频曲线。

曲线在 $r=1$ 的峰值两侧近似可看成是对称的, 现取峰值两侧曲线上的两点, 其纵坐标 $\beta = \frac{Q}{\sqrt{2}} = \frac{0.707}{2\xi}$, 即图中 q_1 和 q_2 两点, 一般称为半功率点。对应的横坐标频率比设为 $\frac{\omega_1}{\omega_n}$ 和 $\frac{\omega_2}{\omega_n}$, 根据式 (2-50) 将 β 代入可得

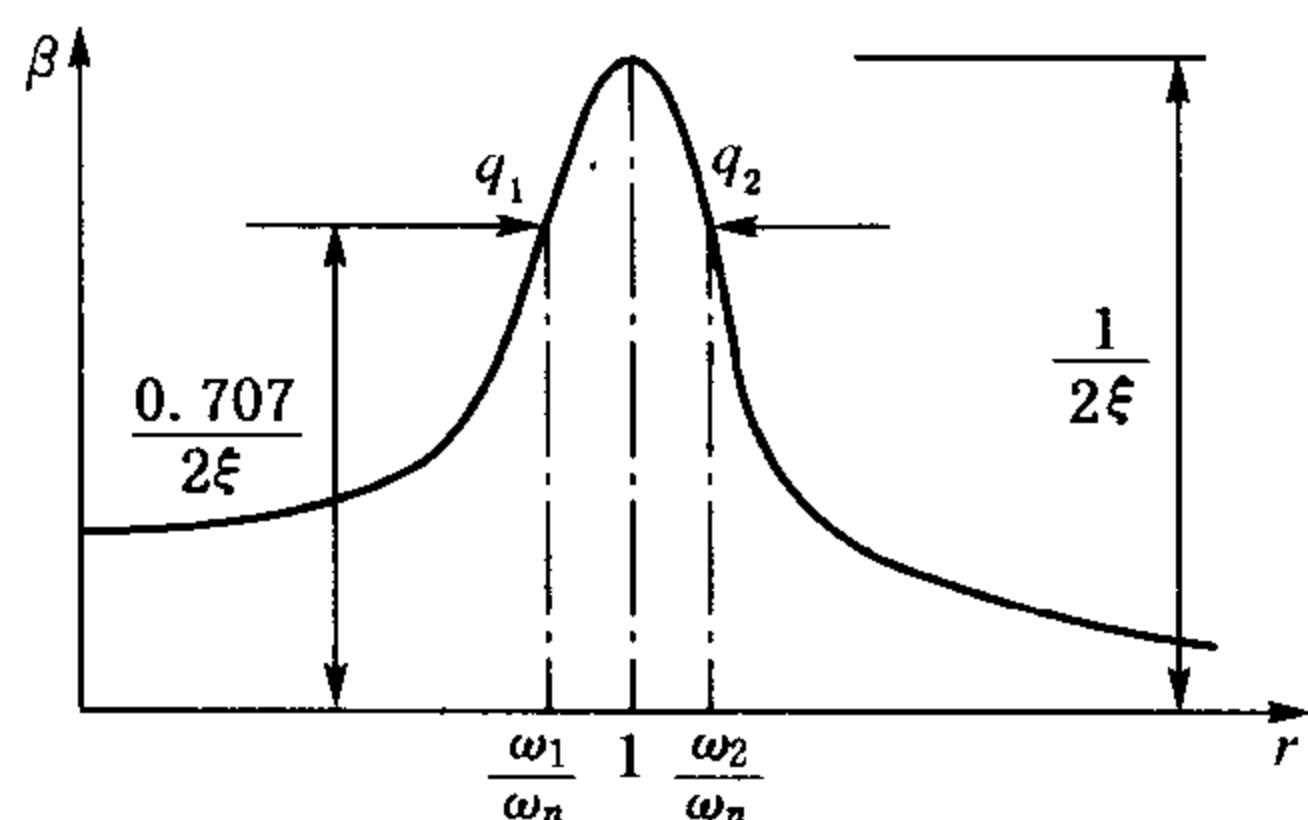


图 2-20 半功率点求解阻尼

$$\beta = \frac{0.707}{2\xi} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

解出

$$r^2 = (1 - 2\xi^2) \pm \sqrt{1 + \xi^2 2\xi}$$

当 $\xi \leq 1$ 时, 可略去 ξ^2 高次项, 则 $r^2 = 1 \pm 2\xi$

展开后可得

$$\frac{(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 + \omega_1)}{\omega_n^2} = 4\xi$$

因 $\omega_2 + \omega_1 = 2\omega_n$, 故 $\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_n} = 2\xi$

所以

$$Q = \frac{1}{2\xi} = \frac{\omega_n}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_n}{\Delta\omega} \quad (2-51)$$

式中: $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ —— 系统的带宽。

带宽直接决定共振峰陡峭程度, 且带宽与阻尼是成正比的, $\Delta\omega = 2\xi\omega_n = 2n = \frac{c}{m}$ 。可通过试验方法对系统进行扫频激振, 从而确定出 ω_n 及 $\Delta\omega$, 由此便可估算出 Q 或 ξ 值, 求得系统的阻尼。

4) 初始阶段的振动

现研究在简谐力作用下, 系统在初始阶段的响应, 即系统的瞬态响应和稳态响应的叠加可表示为

$$x = x_1 + x_2 = Ae^{-\mu t} \sin(\omega_d t + \varphi) + B \sin(\omega t - \psi) \quad (2-52)$$

由于是两种不同频率、不同相角又不同振幅的简谐运动叠加而成, 运动较为复杂, 但由于阻尼存在, 在一段时间后, 便趋于单独的稳态振动。图 2-21 表示初始阶段在 $\omega < \omega_n$ 时和在 $\omega > \omega_n$ 时两种运动合成的结果。

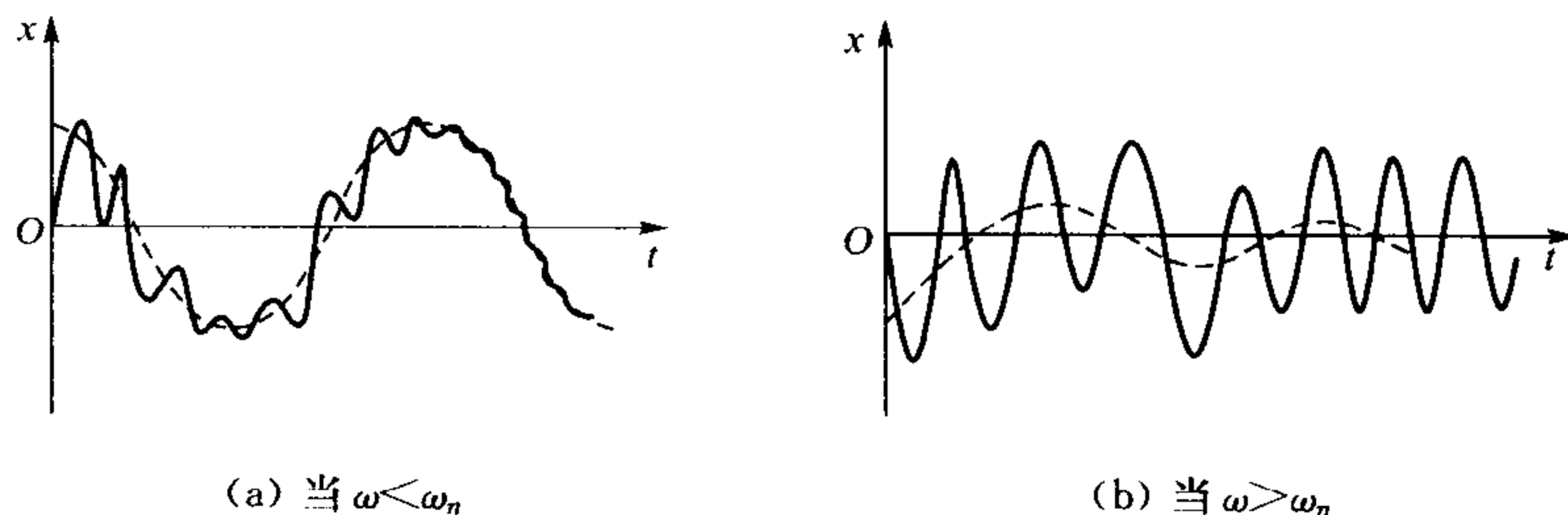


图 2-21 初始阶段的瞬态振动

两者均渐趋于实线所示的稳态振动。存在自由振动的这一阶段称为系统受迫振动的过

渡过程。

强迫振动的稳态响应与初始条件无关。但若要讨论初始阶段的振动,则也要注意初始条件,以确定待定系数 A 、 φ 。

若初始条件 $t = 0, x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0$, 代入式(2-52)可求出

$$A = \sqrt{\left[\frac{\dot{x}_0 + nx_0 + Bn \sin \psi - B\omega \cos \psi}{\omega_d} \right]^2 + (x_0 + B \sin \psi)^2} \quad (2-53)$$

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega_d(x_0 + B \sin \psi)}{x_0 + nx_0 + Bn \sin \psi - B\omega \cos \psi} \quad (2-54)$$

为了便于讨论,设阻尼为零时,式(2-52)为

$$x = A \sin(\omega_n t + \varphi) + \frac{q}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \omega t \quad (2-55)$$

若初始条件 $t = 0, x = x_0 = 0, \dot{x} = \dot{x}_0 = 0$ 代入上式得

$$A = -\frac{q\omega}{\omega_n(\omega_n^2 - \omega^2)}$$

$$\varphi = 0$$

故

$$x = \frac{q}{\omega_n^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \quad (2-56)$$

当有阻尼时, $\frac{q\omega}{\omega_n(\omega_n^2 - \omega^2)}$ 为振幅的瞬态自由振动会逐渐衰减。但当固有频率较低时,其振动振幅就较大,衰减时间就较长,这对于测定强迫振动稳态振幅时要予以注意。由以上可知,当系统初始条件为零时,系统开始仍产生自由振动,常称为伴生振动。

现在讨论当 ω 和 ω_n 很接近时会产生什么现象。设 $\omega_n - \omega = 2\epsilon$, 将式(2-56)改写为

$$x = -\frac{q}{\omega_n(\omega_n^2 - \omega^2)} \left[(\omega_n + \omega) \cos \frac{(\omega_n + \omega)t}{2} \sin \epsilon t - 2\epsilon \sin \frac{(\omega_n + \omega)t}{2} \cos \epsilon t \right]$$

当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,略去后面一项,且 $\frac{\omega_n + \omega}{2} \approx \omega_n$

则 $x \approx -\frac{q}{2\epsilon\omega_n} \sin \epsilon t \cos \omega_n t$, 可看成振幅按 $\frac{q}{2\epsilon\omega_n} \sin \epsilon t$ 变化而频率为 ω_n 的振动,如图2-22所示。

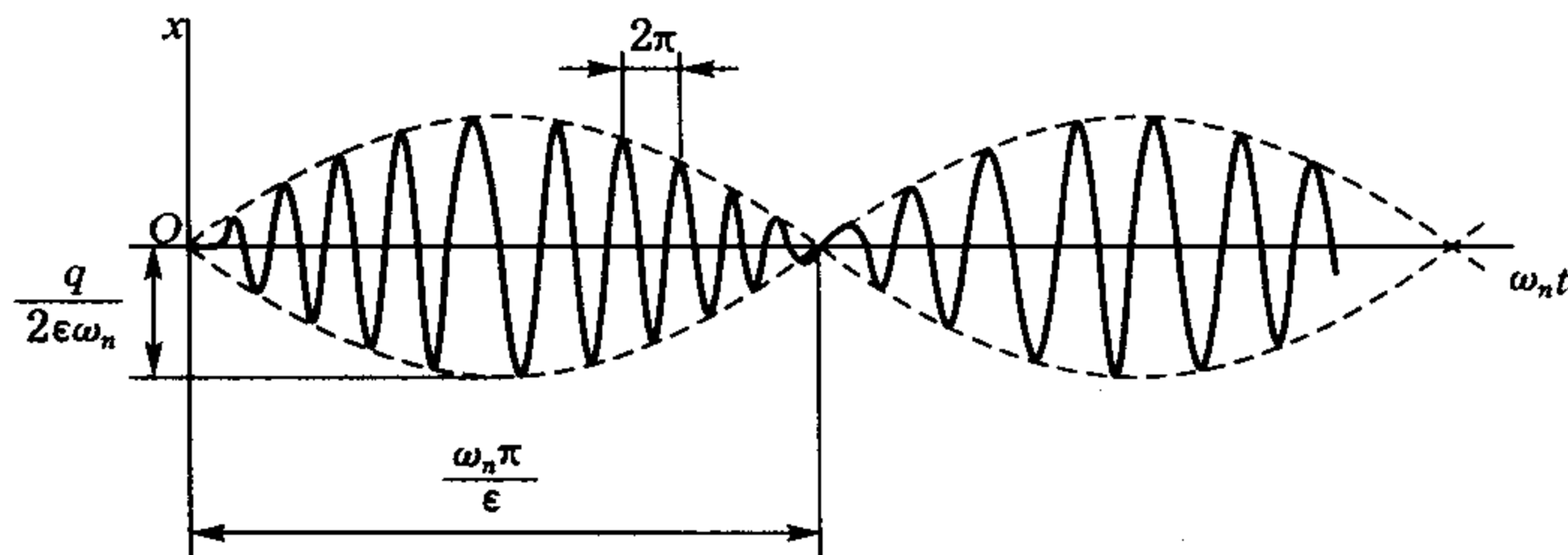


图 2-22 拍振现象

可见振动的振幅由零增至最大值,然后又减为零,逐渐又增大至最大值,这就形成了所谓“拍”的现象。每从零变化至零称为一拍,显然其周期应为正弦周期的一半,故“拍”的周期为 $\frac{1}{2} \frac{2\pi}{\epsilon} = \frac{\pi}{\epsilon}$ 。因 ϵ 是很小的,所以周期也较长。如果激振频率接近等于固有频率,即 $\omega \rightarrow$

$\omega_n, \epsilon \rightarrow 0$, 则 $\frac{\sin \epsilon t}{\epsilon} \rightarrow t$ 故 $x \approx -\frac{qt}{2\omega_n} \cos \omega_n t$ 。说明在共振时, 其振幅将与时间成正比。理论上如无阻尼, 则可达无限大。当然, 增大振幅就需要足够的时间, 所以机器运行速度如设计在固有频率以上, 在越过共振时, 要求过渡时间尽可能短, 以免产生强烈的振动。

2.2.2 转子偏心质量激振下系统的响应

1) 方程的建立及其解

旋转机械设备, 如电机、离心泵、离心压缩机、通风机、汽轮机等的转动部件, 通常称为转子。由于转子的偏心质量而引起振动的现象是很普遍的。如果激振力是因转子的不平衡而产生的, 则与简谐激振力直接作用于质量块上的情况就不完全一样。如图 2-23(a) 所示, 一电机安装于两根槽钢组成的简支梁上。当转子有偏心距为 e 的偏心质量 m , 则可以建立图 2-23(b) 所示的动力学模型。现讨论在 x 方向的强迫振动问题。设电机质量为 M (略去梁重), 电机转速为 $N(\text{rpm})$ 系统(梁)的弹簧刚度为 K , 阻尼为 C 。转子的旋转角速度为 $\omega = \frac{2\pi}{60}N$, 故产生的离心惯性力为 $F_0 = me\omega^2$, 若以

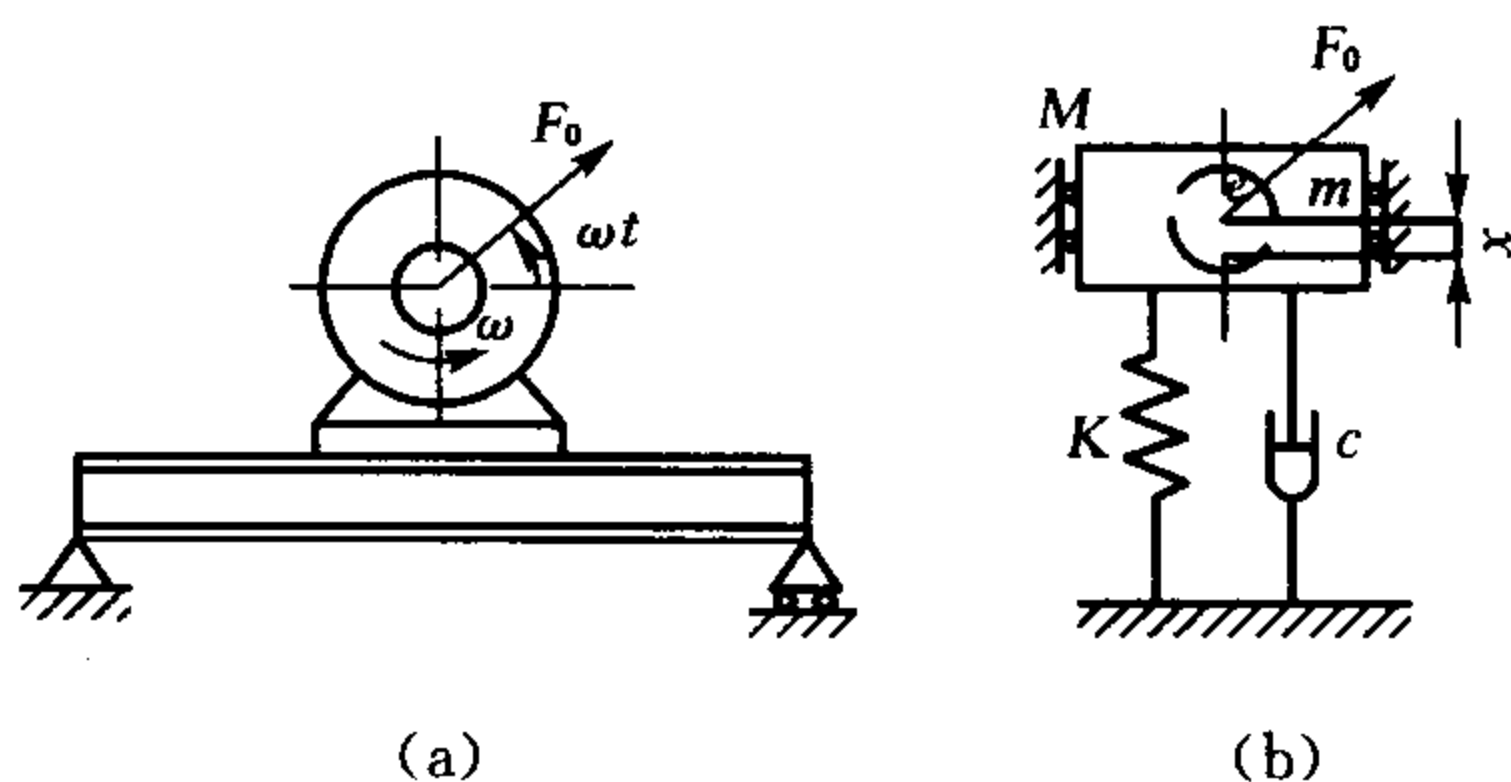


图 2-23 转子不平衡产生的振动

静平衡位置为原点建立坐标 x , 设偏心质量在水平位置为起始位置, 则 F_0 在 x 方向上投影即为垂直激振力

$$F = F_0 \sin \omega t = me\omega^2 \sin \omega t \quad (2-57)$$

按式(2-42)直接可得振动微分方程

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = me\omega^2 \sin \omega t$$

或

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{me\omega^2}{M} \sin \omega t \quad (2-58)$$

现仅讨论稳态特解, 与式(2-44)一样, 对照可得

$$x(t) = B \sin(\omega t - \psi)$$

式中:

$$B = \frac{\frac{me\omega^2}{M}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} = \frac{me}{M} \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (2-59)$$

$$\psi = \text{tg}^{-1} \frac{2n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} = \text{tg}^{-1} \frac{2\xi r}{1-r^2}$$

2) 幅频响应曲线及相频响应曲线

将式(2-59)改写为

$$\frac{MB}{me} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (2-60)$$

同样以 r 为横坐标、 $\frac{MB}{me}$ 为纵坐标(与振幅成定比)亦可根据不同 ξ 值得出一组曲线, 即

幅频响应曲线,如图 2-24 所示。由图可看出与前述幅频响应曲线有两个不同特点:

(1) 当 $r \ll 1$ 时 ($\omega \ll \omega_n$), 振幅 B 很小, 几乎等于零。显然, 马达低转速时激振力 $F_0 = me\omega^2$ 很小。

(2) 当 $r \gg 1$ 时 ($\omega \gg \omega_n$), $\frac{MB}{me} \rightarrow 1, B \rightarrow \frac{me}{M}$, 即在高频范围内, 振幅接近于常数, 并不是趋于零。

(3) $r=1$ 时, 产生共振, 振幅 $B = \frac{me}{M} \frac{1}{2\xi}$, 系统振动激烈。

一个实际系统的阻尼系数是不容易计算的, 按上面这个特点, 可用试验方法测定阻尼系数。首先测定共振 ($r=1$) 时振幅 $B = \frac{me}{M} \frac{1}{2\xi}$, 算得阻尼系数 $\xi = \frac{me}{2MB_{r=1}}$, 再测定 $r \gg 1$ 时的振幅, 即 $B_{r \gg 1} = \frac{me}{M}$ 便可求出阻尼系数 $\xi = \frac{1}{2B_{r=1}} \cdot \frac{me}{M} = \frac{1}{2B_{r=1}} \cdot B_{r \gg 1}$ 。

相频响应曲线与前述完全一致, 就不复述了。

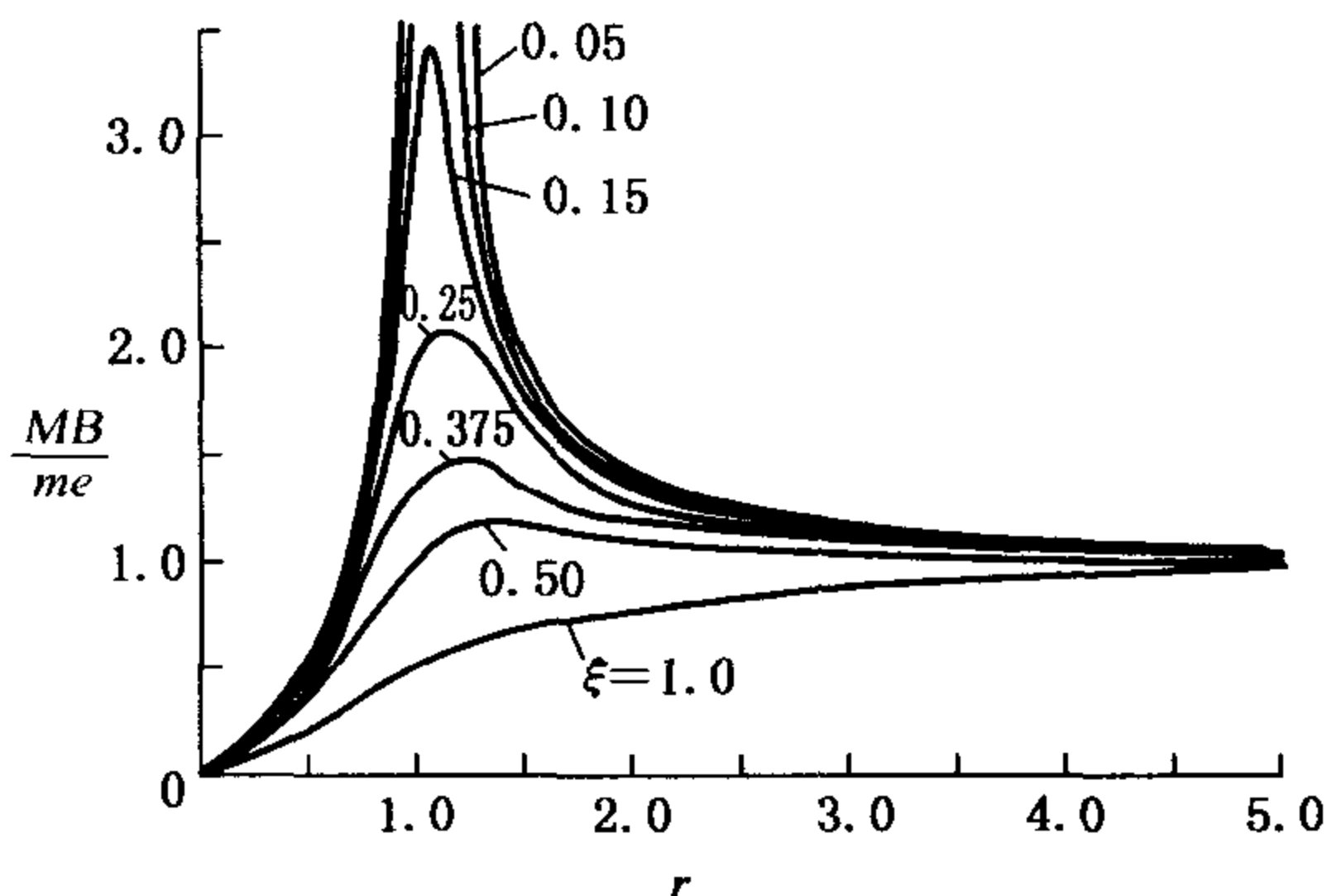


图 2-24 不平衡的幅频响应曲线

2.2.3 支承简谐运动激振下系统的响应

在很多情况下, 系统是由于支承点的运动而产生强迫振动。支承点的运动可能是由外部振源所产生, 如机器振动引起仪表的振动, 汽车在不平路面行驶产生的振动等。

1) 运动方程的建立及其解

现对一单自由度系统, 支承点作简谐运动 $x_s = a \sin \omega t$ 时, 分析系统的响应, 如图 2-25 所示。

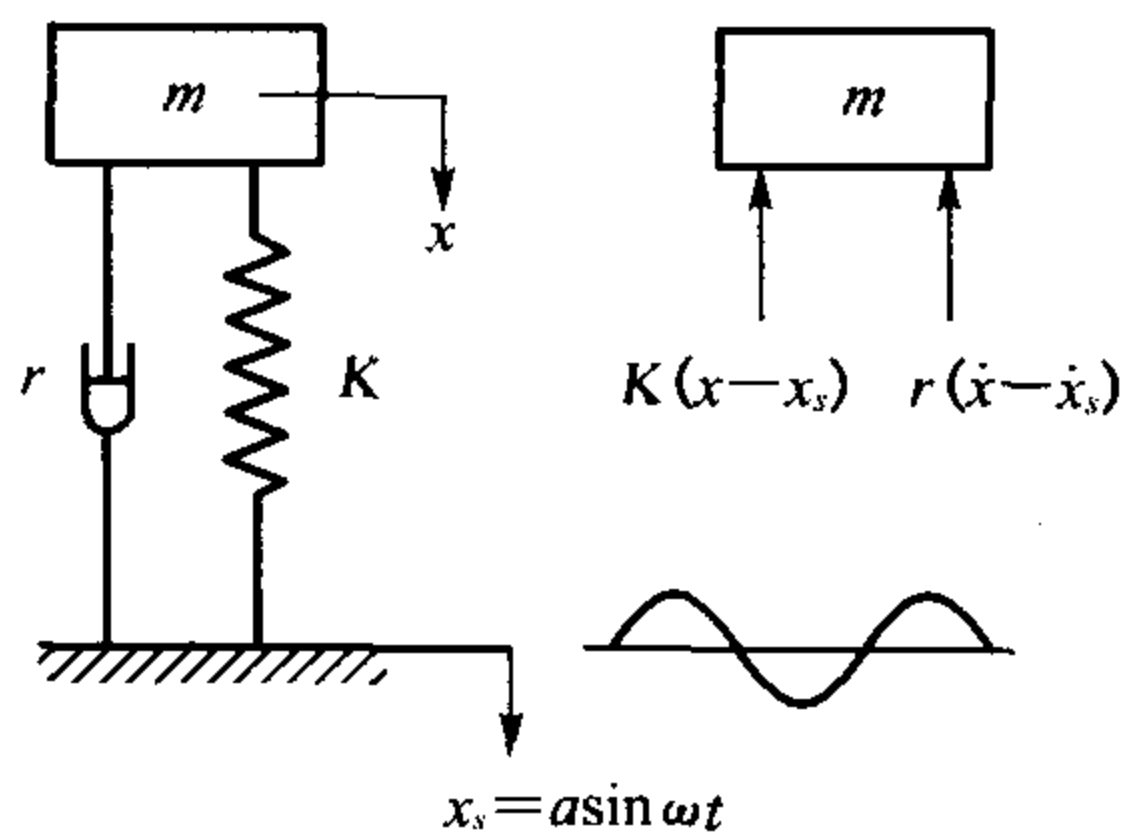


图 2-25 支承运动产生的振动

仍取静平衡位置为坐标原点建立 x 坐标。由于支承点在运动, 故质量块在运动时虽同样受到弹性恢复力和阻尼力, 但弹簧的实际位移及阻尼实际的运动速度都是质量块与支承点间的相对位移和相对速度。据此列出如下方程

$$m\ddot{x} = -K(x - x_s) - c(\dot{x} - \dot{x}_s)$$

$$\text{或} \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = Kx_s + c\dot{x}_s \quad (2-61)$$

可见系统相当于作用了两个激振力, 一个是由弹簧传递的弹性力 Kx_s ; 另一个是由阻尼传递的阻尼力 $c\dot{x}_s$ 。由于 x_s 与 \dot{x}_s 有相角差 $\frac{\pi}{2}$, 所以两者不同相, 后者超前 $\frac{\pi}{2}$ 相角, 故用复指数形式求解更为简便。

设方程的解为 $x = Be^{j(\omega t - \psi)}$

则

$$\dot{x} = jB\omega e^{j(\omega t - \psi)}, \quad \ddot{x} = -B\omega^2 e^{j(\omega t - \psi)}$$

支承点运动也写为

$$x_s = ae^{j\omega t}, \dot{x}_s = ja\omega e^{j\omega t}$$

代入(2-61)可得

$$[(K - m\omega^2) + jc\omega]B^{j(\omega t - \psi)} = a(K + jc\omega)e^{j\omega t}$$

$$Be^{-j\psi} = \frac{a(K + jc\omega)}{(K - m\omega^2) + jc\omega}$$

根据复数运算法则,可求复数矢量的模,即振幅 B

$$B = a\sqrt{\frac{K^2 + c^2\omega^2}{(K - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = a\sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (2-62)$$

同样可求相角差 ψ

$$\psi = \text{tg}^{-1} \frac{mc\omega^3}{K(K - m\omega^2) + c^2\omega^2} = \text{tg}^{-1} \frac{2\xi r^3}{1 - r^2 + (2\xi r)^2} \quad (2-63)$$

2) 幅频响应曲线及相频响应曲线

由式(2-62)可得

$$\frac{B}{a} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \beta \quad (2-64)$$

式中: $\frac{B}{a}$ ——系统振动幅值与支承运动

幅值之比,故也称放大因子,仍以 β 表示。

同样,若以 r 为横坐标, β 为纵坐标,也可得出如图 2-26 所示的幅频响应曲线。其特点分析如下:

(1) 当 $r=0, \beta=1$ 。说明支承运动频率变化很慢时,系统相当于平动。

(2) 当 $r=1$, 仍为共振点, 振幅接近最大值。当 $r=\sqrt{2}$ 时, 可知 β 亦等于 1, 即振幅等于支承运动的幅值, 且与系统的阻尼无关。

(3) 当 $r>\sqrt{2}$ 时, 无论阻尼是多少, $\beta<1$, 即振幅值小于支承运动的振幅。根据这一特点, 可讨论隔振问题。并且当 $r>\sqrt{2}$ 时, 若系统阻尼大的反而比阻尼小的振幅更大, 这与前面几种曲线都不同。

(4) 当 $r>5$ 时, β 基本成为常数。相频响应曲线如图 2-26 中右上角所示。共振时相角差已不是 $\frac{\pi}{2}$ 。

3) 支承运动以速度和加速度表达时的计算

如果支承运动是以速度或加速度的形式给出, 则需要加以变化后求出。

如速度为 $\dot{x}_s = b\sin\omega t$, 则位移为 $x_s = \frac{b}{\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ 。

仍按式(2-62)可得 $B = \frac{b}{\omega}\beta$ 。

若加速度为 $\ddot{x}_s = c\sin\omega t$, 则位移为 $x_s = \frac{c}{\omega^2}\sin(\omega t - \pi)$ 。

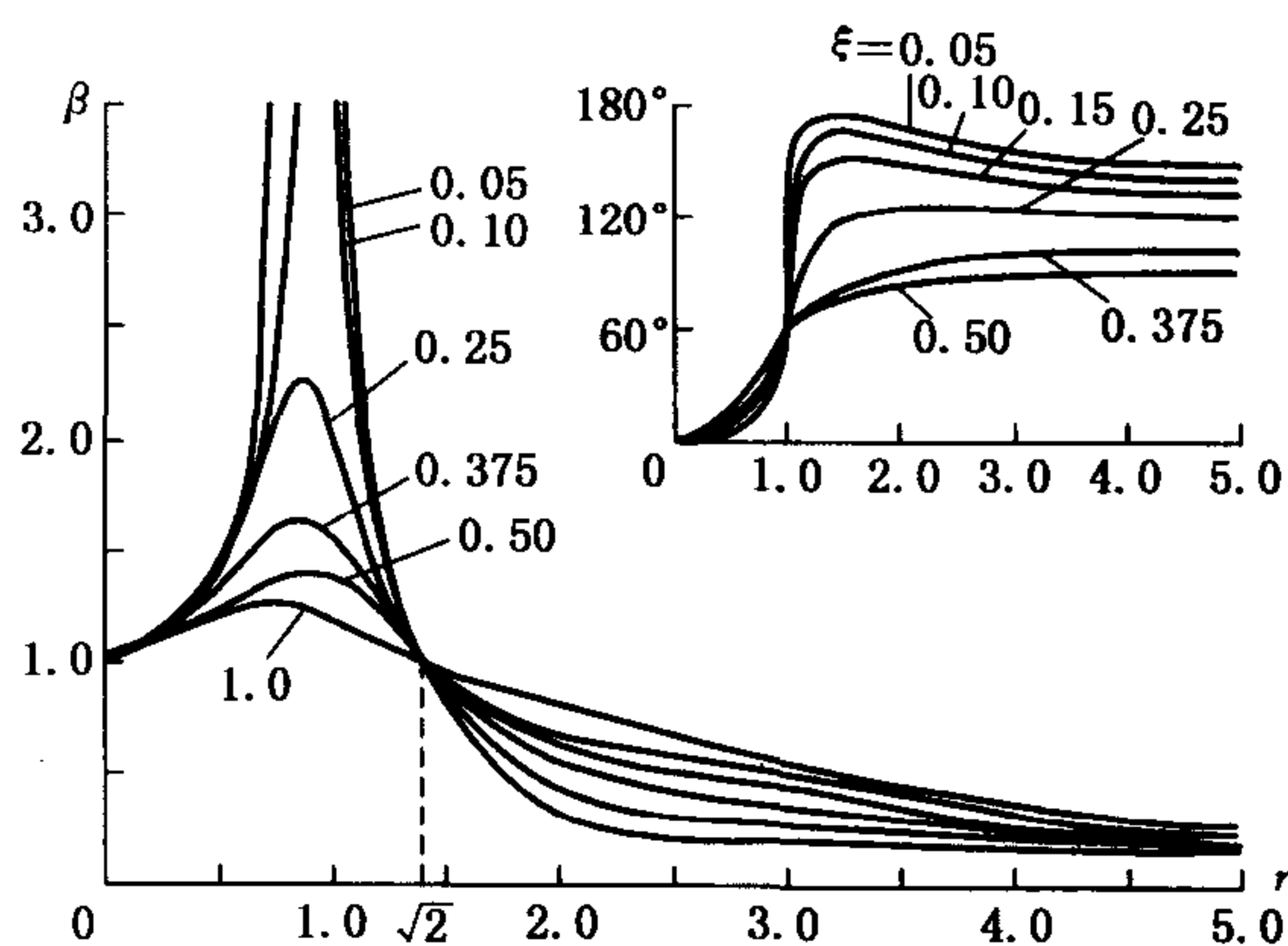


图 2-26 幅频、相频曲线

亦可得 $B = \frac{c}{\omega^2} \beta$ 。

式中 β 仍为原放大因子, 由式(2-64)给出。

2.2.4 机械阻抗的基本概念

1) 机械阻抗

由强迫振动分析可知, 机械系统受激振后的响应, 只与系统本身的动态特性及激振的性质有关。现引进动刚度的概念, 即

$$K_D = \frac{F(\omega)}{x(\omega)}$$

K_D 为动刚度, $F(\omega)$ 为激振力, $x(\omega)$ 是位移响应。可用激振力和系统的响应之间的比值关系来表示系统的动态特性。凡以激振力比响应的值称为机械阻抗; 若以响应比激振力, 即机械阻抗的倒数称为机械导纳。又由于系统的响应可以是位移、速度和加速度, 因此有如下各种形式及名称:

$$\text{位移阻抗 } K(\omega) = \frac{F(\omega)}{x(\omega)}$$

$$\text{位移导纳 } W(\omega) = \frac{x(\omega)}{F(\omega)}$$

$$\text{速度阻抗 } Z(\omega) = \frac{F(\omega)}{\dot{x}(\omega)}$$

$$\text{速度导纳 } B(\omega) = \frac{\dot{x}(\omega)}{F(\omega)}$$

$$\text{加速度阻抗 } Am(\omega) = \frac{F(\omega)}{\ddot{x}(\omega)}$$

$$\text{加速度导纳 } J(\omega) = \frac{\ddot{x}(\omega)}{F(\omega)}$$

机械阻抗可由频率响应实验方法直接求出, 如能列出系统的运动微分方程, 也可计算求得。运用机械阻抗的概念, 将为研究系统的抗振能力、运动稳定性带来很大方便。

机械阻抗的概念实际上是由电学阻抗概念引入的。

2) 传递函数

传递函数是描述线性定常系统的输入与输出关系的函数, 定义为初始条件为零时, 输出量(响应函数)的拉氏变换与输入量(激振函数)的拉氏变换之比。

下面来求单自由度系统强迫振动的传递函数。其运动方程为 $m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = f(t)$ 。设初始条件为 $t = 0, x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$ 。

对方程取拉氏变换

$$\text{因为 } L(\ddot{x}) = L\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right) = S^2 X(s) - Sx_0 - \dot{x}_0 = S^2 X(s)$$

$$L(\dot{x}) = L\left(\frac{dx}{dt}\right) = SX(s) - Sx_0 - x_0 = SX(s)$$

$$L(x) = X(s)$$

$$L(f) = F(s)$$

可得 $(ms^2 + cs + K)X(s) = F(s)$, 故系统的响应为位移时的传递函数为

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + K}$$

由于响应有不同形式, 故传递函数也有几种形式。

当输入量为简谐函数时, $s = j\omega$ 代入上式可得

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{K - m\omega^2 + jc\omega}$$

这与动柔度表达式完全一样,不过是一个复函数表达式,可分为以下两部分:函数的幅频特性为

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(K - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}}$$

函数的相频特性为

$$\psi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{c\omega}{K - m\omega^2} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\xi r}{1 - r^2}$$

由此可知,机械导纳也就是以复函数形式表达的传递函数。由于 $s = j\omega$,拉普拉斯变换也就成为了傅立叶变换,将时域变成频域来讨论,故又将复函数表达的传递函数称为频率响应函数。

在频域内描述结构系统输入输出特性的函数称为传递函数或频率响应函数 $H(\omega)$ 。

2.2.5 简谐力做的功

在无阻尼自由振动过程中,能量是守恒的,只存在势能和动能的相互转换,系统在初始干扰下能维持等幅振动。若存在阻尼,则阻尼力将消耗系统中的能量,使系统振幅逐渐衰减。在强迫振动时,阻尼力也消耗系统的能量,而持续的激振力对系统不断输入能量,当输入的能量正好可以补偿阻尼所消耗的能量时才能使系统保持稳定的等幅振动。下面就定量分析简谐激振力做的功与阻尼力所消耗的能量之间的关系。

1) 简谐激振力在一个周期内做的功

简谐激振力 $F = F_0 \sin \omega t$ 时的位移响应为 $x = B \sin(\omega t - \psi)$ 。激振力在微小位移上做的功可表达为

$$dW_F = Fdx = F\dot{x}dt$$

故在一个周期内做的功为

$$\begin{aligned} W_F &= \int_0^T F\dot{x}dt \\ &= \int_0^{2\pi} (F_0 \sin \omega t) [B\omega \cos(\omega t - \psi)] d(\omega t) \\ &= F_0 B \int_0^{2\pi} \sin \omega t \cos(\omega t - \psi) d(\omega t) \\ &= \pi F_0 B \sin \psi \end{aligned} \quad (2-65)$$

由式中可知,简谐激振力每周期所做功的大小,不仅取决于激振力幅和振幅的大小,而且与激振和响应间的相角差有关。

若 $\psi > 0$,则表示外力超前位移响应,做正功;若 $\psi < 0$,则表示外力滞后位移响应,做负功;若 $\psi = 0$ 或 $\psi = \pi$,则外力做功总和为零。

我们可用旋转矢量图来表示,如图 2-27 所示,将 F_0 分解为 F_1 和 F_2 两个垂直分力,且 F_1 与位移(幅值为 B)同向, F_2 与速度(幅值为 $B\omega$)同向,显然 $F_1 = F_0 \cos \psi$,

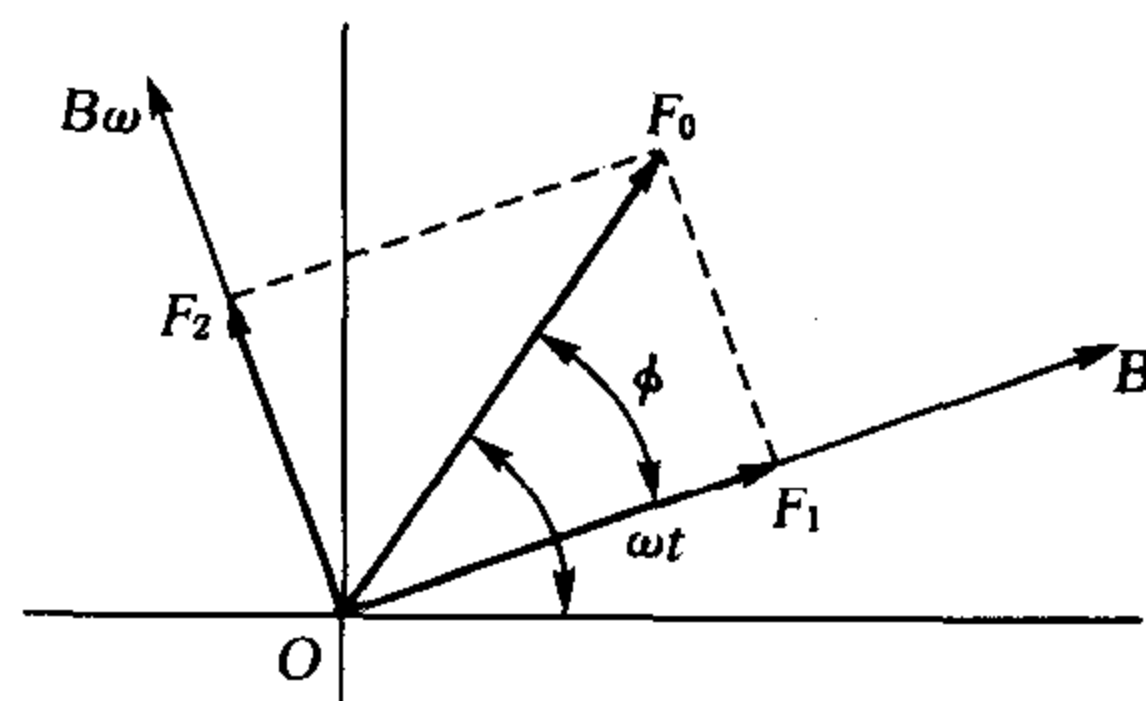


图 2-27 激振力幅分解

$F_2 = F_0 \sin \phi$ 。现分别讨论 F_1 、 F_2 在一周期内做功的情况：

F_1 与 B 同相位， F_1 在一个周期内所做的功为：求出 F_2 在一个周期内所做的功。

$$\begin{aligned} dW_{F_1} &= F_1 dx = [F_0 \cos \phi \sin(\omega t - \phi)] [B\omega \cos(\omega t - \phi) dt] \\ W_{F_1} &= \int_0^T dW_{F_1} = F_0 B \cos \phi \int_0^{2\pi} \sin(\omega t - \phi) \cos(\omega t - \phi) d(\omega t) = 0 \\ dW_{F_2} &= F_2 dx = [F_0 \sin \phi \cos(\omega t - \phi)] [B\omega \cos(\omega t - \phi) dt] \\ W_{F_2} &= \int_0^T dW_{F_2} = F_0 B \sin \phi \int_0^{2\pi} \cos^2(\omega t - \phi) d(\omega t) = \pi F_0 B \sin \phi \end{aligned} \quad (2-66)$$

与(2-65)比较后可知， $W_F = W_{F_2}$ 。

所以一周期内激振力所作的功就是其超前位移 90° (或与速度同相角) 的分力所做的功。

显然，当 $\phi = 90^\circ$ 时，即 $\omega = \omega_n$ 共振时，外力与位移的相差为 90° ，外力做功达最大值 $\pi F_0 B$ 。

2) 阻尼力在一个周期内所消耗的能量

对黏性阻尼力 $F_c = -c\dot{x} = -cB\omega \cos(\omega t - \phi) = cB\omega \sin(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2})$

这又是一个简谐力，且滞后于位移 90° 。 F_c 在一个周期内消耗的能量为

$$W_c = \int_0^T F_c \dot{x} dt = \int_0^{2\pi} -cB^2\omega^2 \cos^2(\omega t - \phi) dt = -\pi cB^2\omega \quad (2-67)$$

可见，黏性阻尼所做的功与振幅的平方及频率成正比。

当系统在简谐激振力下作稳态强迫振动时，在一个周期内激振力所做的功必等于阻尼力所消耗的能量，即 $W_F + W_c = 0$ ，可知

$$\begin{aligned} \pi B F_0 \sin \phi &= \pi c B^2 \omega \\ B &= \frac{F_0}{c\omega} \sin \phi \end{aligned} \quad (2-68)$$

由此导出了振幅与相角差的关系式，且当 $\phi = 90^\circ$ 时， B 有最大值 $\frac{F_0}{c\omega}$ ，即共振时振幅最大。振幅与阻尼和激振频率有关，与频率的关系是 $r=1$ 时，振幅最大，远离 $r=1$ 的振幅都逐渐减小；与阻尼的关系是阻尼越大，振幅越小，在共振时阻尼限制振幅的作用很大，但远离共振的频率范围内作用就较小。

根据式(2-66)， W_F 与振幅 B 呈线形关系。而根据式(2-67)， W_c 与 B 呈抛物线关系，如图 2-28 所示。由图可看出如果系统的振幅为 B_1 ，此时 $W_F > W_c$ 使系统振幅增加，由于振幅增加，系统的阻尼消耗能量也随之增加，且与振幅的平方成正比，因此增加很快，直至等于激振力所输入的能量，所以系统能以 B_2 的振幅振动，使系统成为稳态振动。

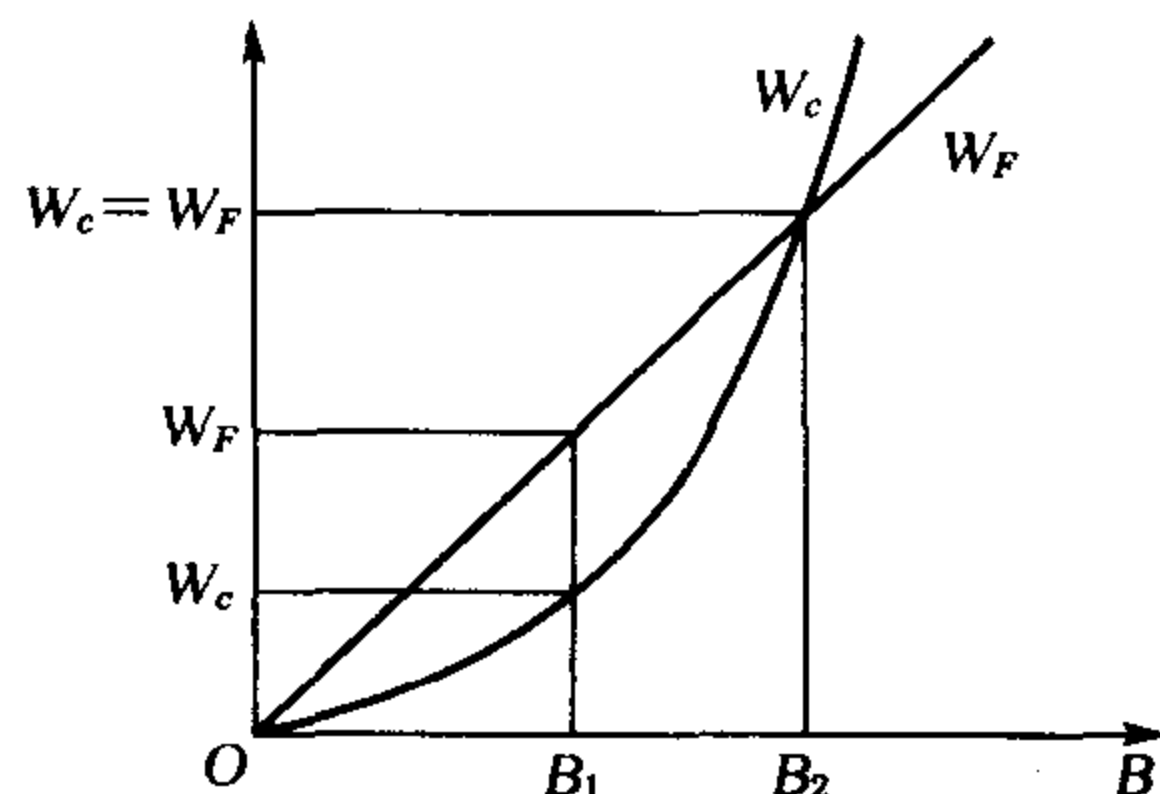


图 2-28 功与振幅关系图

2.3 非简谐激振产生的强迫振动

2.3.1 非简谐周期激振的响应

如激振力(或支承运动)是一个周期函数,我们已知任何周期函数都可以按傅立叶级数分解为一系列频率成整倍数关系的简谐函数。对于线性振动系统其响应便可以按叠加原理将每一单独的简谐函数作用的响应求出后,再全部叠加起来,便可得总的响应。设周期激振力 $F(t)$ 作用于有阻尼的质量弹簧系统,可列出方程

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^n (a_i \cos i\omega t + b_i \sin i\omega t)$$

式中右边 a_0, a_i, b_i 的值如第一章所述。

因第一项 $\frac{a_0}{2}$ 是常力,作用于系统,犹如质量块重力一样,它只影响系统的静平衡位置,如坐标原点就选在新的平衡位置上,方程中便可除去此项。系统的稳态解即为

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i \cos(i\omega t - \phi_i) + b_i \sin(i\omega t - \phi_i)}{K\sqrt{(1-r_i^2)^2 + (2\xi r_i)^2}} \quad (2-69)$$

式中 $r_i = \frac{i\omega}{\omega_n}$ 。

若为周期性支承运动同样可算出响应。设周期支承运动为

$$x_s(t) = \sum_{i=1}^n (a_i \cos i\omega t + b_i \sin i\omega t)$$

不计阻尼时响应为

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i \cos i\omega t + b_i \sin i\omega t}{1-r_i^2} \quad (2-70)$$

2.3.2 任意激振的响应

在许多实际问题中,对系统的激振并非周期性的,而是任意的时间函数,或是在极短时间内间隔内的冲击作用,当激振作用的时间比系统固有周期更短时,一般称为冲击。对于任意激振,系统通常没有稳态振动,而只有瞬态振动,在激振力作用停止后,系统按固有频率作自由振动。瞬态振动和自由振动合称为任意激振的响应。

1) 杜哈梅积分法

图 2-29 所示一任意激振力 $f(t)$ 作用于有阻尼单自由度系统,求系统的响应。杜哈梅积分法的基本思想是将激振力分解为一系列脉冲的连续作用,各脉冲的大小和作用时间由 $f(\tau)$ 决定。先求出每个脉冲单独作用下系统的响应,然后按线性系统的叠加原理将其叠加起来,即得出系统对激振的响应。设 $f(t)$ 的作用时间 $0 \rightarrow t$ 将此区间分成无数极短间隔,以 $d\tau$ 表示。在某一时刻 $t=\tau$ 时的 $d\tau$ 间隔内,若受到一个微冲量的作

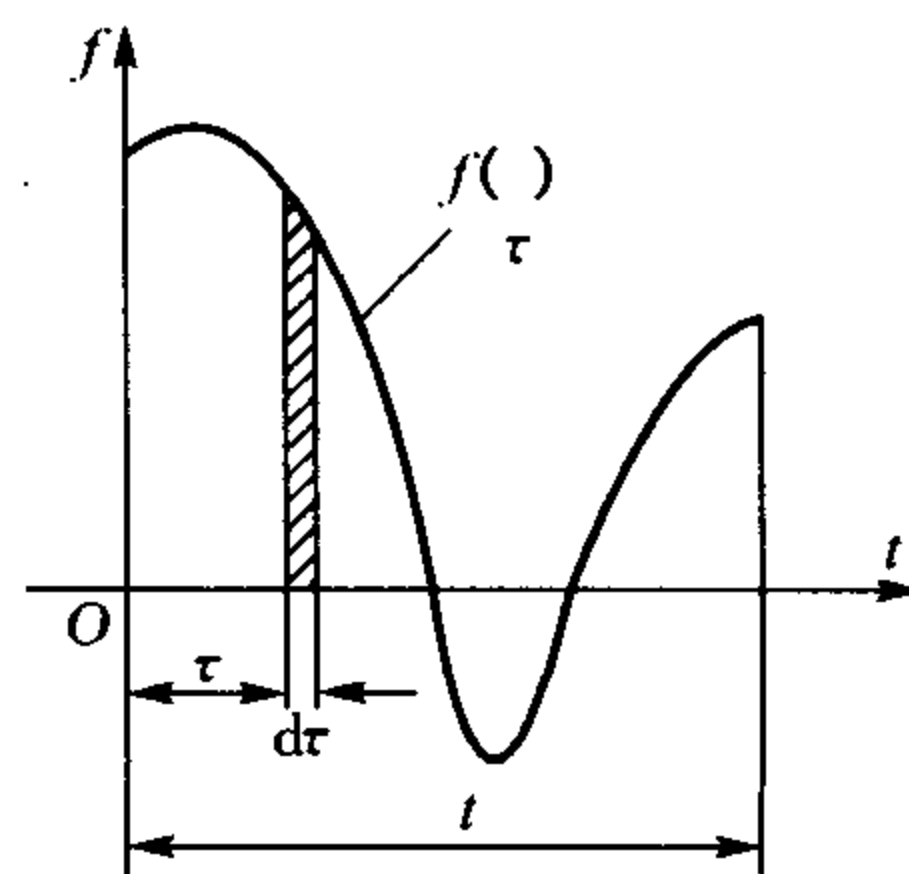


图 2-29 任意激振力

用 $f(\tau)d\tau$ (图中阴影面积)。根据动量定律, $f(\tau)d\tau = m dv$ 故 $dv = \frac{f(\tau)}{m} d\tau$, 即系统的质量 m 获得一个速度增量 dv 。但在 $d\tau$ 极短时间内, 系统还来不及发生位移, 故成为系统的初始条件, 故初始条件成为 $t = \tau$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = dv$ 。

然后当 $t \geq \tau$ 时, 在此初始条件的干扰下, 系统作自由振动。根据式(2-32)可得系统在初始条件下的响应

$$x = \frac{f(\tau)d\tau}{\omega_d m} e^{-n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau)$$

式(2-32)是以 $t=0$ 为坐标原点, 现以 $t=\tau$ 为原点。以上是某一微冲量单独作用下系统的响应, 而系统受到 $0 \rightarrow t$ 范围内一系列微冲量作用, 故其响应为全部微冲量单独作用时的响应叠加, 可以通过对上式的积分求得

$$\begin{aligned} x &= \int_0^t \frac{f(\tau)}{\omega_d m} e^{-n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\omega_d m} \int_0^t f(\tau) e^{-n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2-71)$$

上式为杜哈梅积分式。积分时应注意, t 是位移响应的时间, 是常量, 而 τ 每一个微小冲量作用的时间, 是个变量。杜哈梅积分式是方程 $m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = f(\tau)$ 的通解。杜哈梅积分的解即为系统的初始条件为零时的全解, 包括了瞬态振动及稳态振动。以下分别讨论几种情况。

(1) 当不计阻尼时, 响应可写为

$$x = \frac{1}{\omega_n m} \int_0^t f(\tau) \sin \omega_n(t-\tau) d\tau \quad (2-72)$$

(2) 如果系统在激振力作用开始时还有初始条件 x_0 和 \dot{x}_0 , 则系统的解还应加上自由振动的解这一项, 即

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + x_0 \cos \omega_n t + \frac{1}{\omega_n m} \int_0^t f(\tau) \sin \omega_n(t-\tau) d\tau$$

(3) 若系统是支承运动, 仍可用叠加原理分成两个杜哈梅积分求解。若支承运动形式给出为 $x = x_s(t)$, 系统的方程为 $m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = Kx_s + c\dot{x}_s$ 故系统响应可写为

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t [Kx_s(\tau) + c\dot{x}_s(\tau)] e^{-n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_0^t [\omega_n^2 x_s(\tau) + 2\xi\omega_n \dot{x}_s(\tau)] e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2-73)$$

若支承运动是以加速度形式给出 $\ddot{x}_s(\tau)$, 则先求系统的相对位移 $y = x - x_s$ 的响应更为简便:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + Ky = -m\ddot{x}_s$$

上式响应为

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t [-m\ddot{x}_s(\tau)] e^{-n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \\ &= -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{x}_s(\tau) e^{-n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2-74)$$

然后根据初始条件算出支承运动的初始位移 x_s 即可求出系统的总响应 $x = y + x_s$ 。

【例 2-6】 单自由度系统受到激振力 f 的作用, f 的变化规律如图 2-30 所示递减三角脉冲, 初始条件为: $x_0 = \dot{x}_0 = 0$, 不计阻尼, 求系统的响应。

解: 应用杜哈梅积分, 分别计算 $t < t_0$, $t > t_0$ 两个区间的响应。

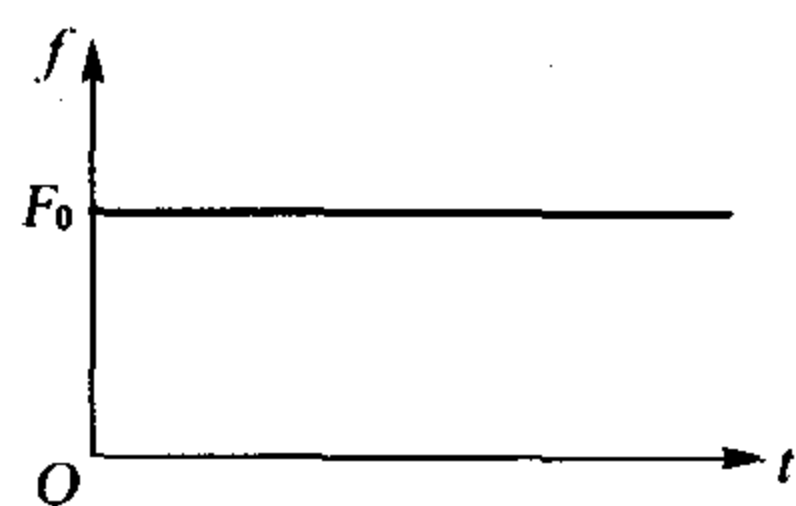
当 $t < t_0$ 时, 由式(2-72)计算系统响应, 用分部积分法。

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\omega_n m} \int_0^t f(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{F_0}{m\omega_n} \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t_0}\right) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{F_0}{m\omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t) - \frac{F_0}{m\omega_n^2 t_0} \left(t - \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t\right) \\ &= \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_n t) - \frac{F_0}{kt_0} \left(t - \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t\right) \end{aligned}$$

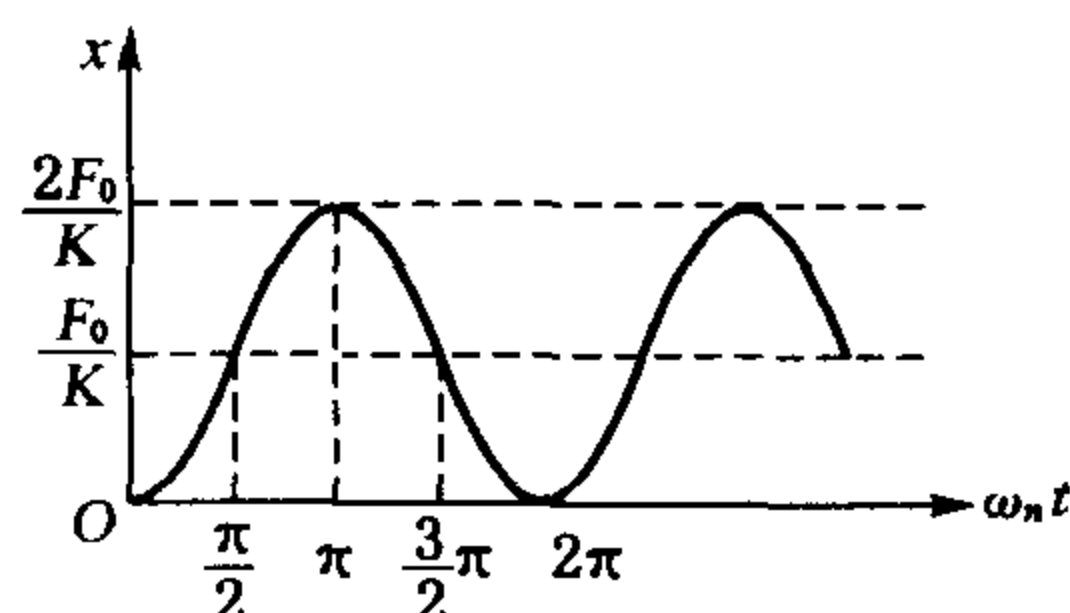
当 $t > t_0$ 时, 大于 t_0 的部分积分为零, 所以

$$\begin{aligned} x &= \frac{F_0}{m\omega_n} \int_0^{t_0} \left(1 - \frac{\tau}{t_0}\right) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{F_0}{m\omega_n t_0} [\sin \omega_n t - \sin \omega_n(t - t_0)] - \frac{F_0}{k} \cos \omega_n t \end{aligned}$$

【例 2-7】 求有阻尼单自由度弹簧质量系统在 $t=0$ 时, 突然受到一常力 F_0 作用下的响应。此动载荷为阶跃函数, 如图 2-31(a)。



(a)



(b)

图 2-31 阶跃激振的响应

解: 因 $f(t) = F_0$ 代入解

$$x = \frac{F_0}{m\omega_d} \int_0^t e^{-n(t-\tau)} \sin \omega_d(t - \tau) d\tau$$

令 $t' = t - \tau$, $d\tau = -dt'$ 用分部积分可求

$$\begin{aligned} x &= \frac{F_0}{m\omega_d} \left[\frac{1}{n^2 + \omega_n^2} (\omega_d - \omega_d e^{-nt} \cos \omega_d t - ne^{-nt} \sin \omega_d t) \right] \\ &= \frac{F_0}{m\omega_d} \frac{1}{\omega_n^2} (\omega_d - \omega_d e^{-nt} \cos \omega_d t - ne^{-nt} \sin \omega_d t) \\ &= \frac{F_0}{K} \left[1 - e^{-\xi \omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\xi \omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \right] \\ &= \frac{F_0}{K} \left[1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cos(\omega_d t - \phi) \right] \end{aligned}$$

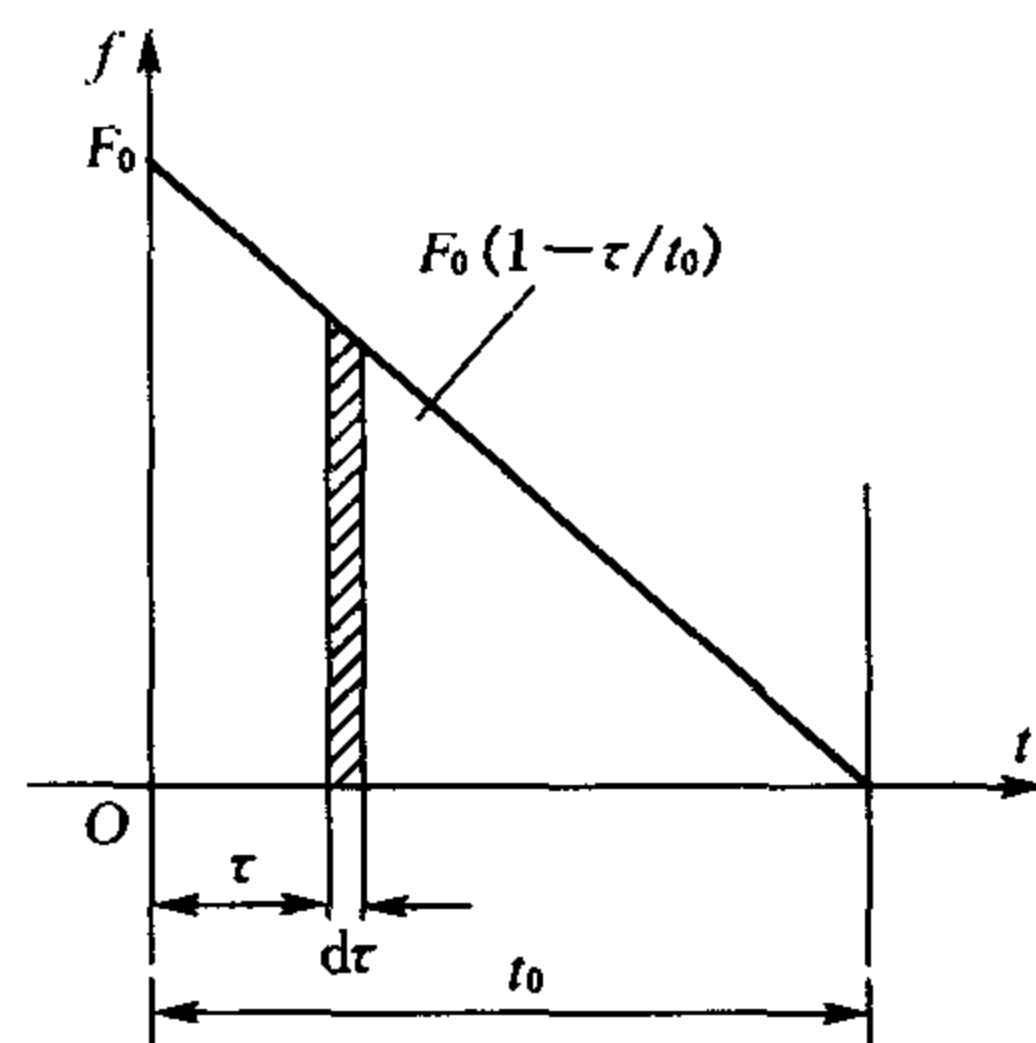


图 2-30 递减三角脉冲

式中:

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

若不计阻尼,则

$$x = \frac{F_0}{K}(1 - \cos \omega_n t)$$

可见在突加载荷 F_0 作用下,除了使弹簧产生 $\frac{F_0}{K}$ 静变形,还使系统产生振幅为 $\frac{F_0}{K}$ 的振动(若计阻尼则为衰减振动)。系统响应如图 2-31(b)所示。

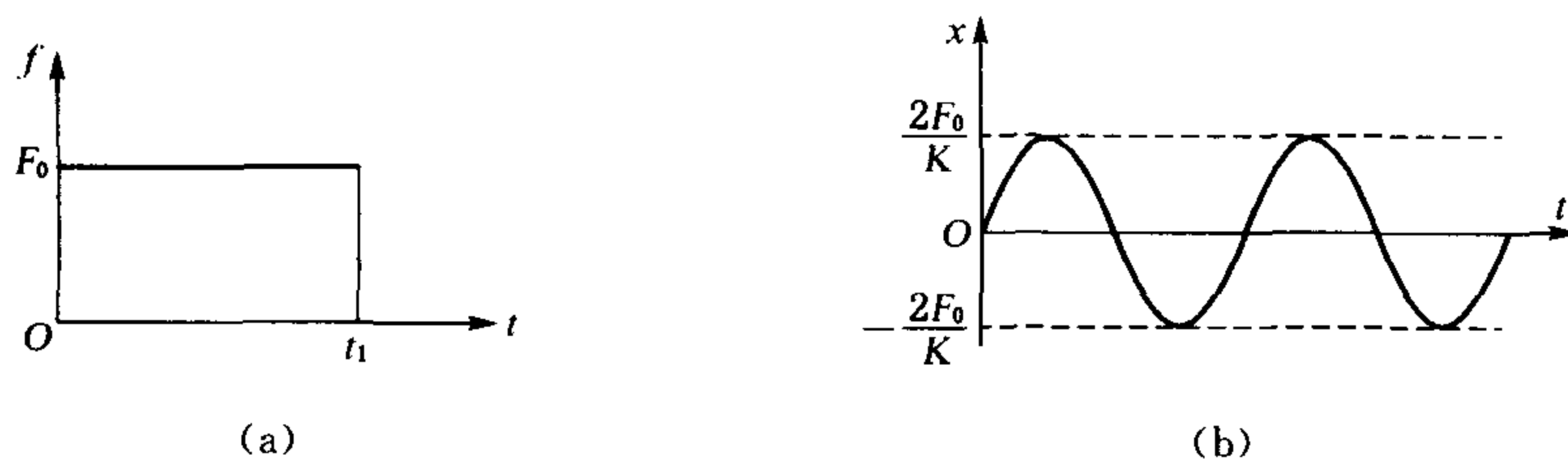


图 2-32 矩形脉冲的响应

若 F_0 力在 t_1 时突然消失,即矩形脉冲作用,如图 2-32(a)求无阻尼系统的响应。在 $t \leq t_1$ 时,系统的响应仍如图 2-31(b);系统在 $t \geq t_1$ 阶段的响应,则由下式给出

$$\begin{aligned} x &= \frac{F_0}{m\omega_n} \int_0^{t_1} \sin \omega_n(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{F_0}{K} [\cos \omega_n(t-t_1) - \cos \omega_n t] \end{aligned}$$

实际上在 $t \geq t_1$ 时系统的响应即为激振力去除之后,系统以在 t_1 时的位移 x_1 和速度 \dot{x}_1 的初始条件,按固有频率作自由振动。由前述可知,此时

$$x_1 = \frac{F_0}{K}(1 - \cos \omega_n t_1), \quad \dot{x}_1 = \frac{F_0}{K}\omega_n \sin \omega_n t_1$$

按式(2-10)可得

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos \omega_n(t-t_1) + \frac{\dot{x}_1}{\omega_n} \sin \omega_n(t-t_1) \\ &= \frac{F_0}{K} [\cos \omega_n(t-t_1) - \cos \omega_n t] \end{aligned}$$

响应的振幅为

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{\dot{x}_1}{\omega_n}\right)^2} = \frac{F_0}{K} \sqrt{2(1 - \cos \omega_n t_1)} \\ &= \frac{2F_0}{K} \sin \frac{\omega_n t_1}{2} = \frac{2F_0}{K} \sin \frac{\pi t_1}{T} \end{aligned}$$

可见振幅与常力去除的时间 t_1 有关。

当 t_1 等于周期 T 时, $A=0$, 系统就不振动了。当 t_1 半个周期 $\frac{T}{2}$ 时, $A = \frac{2F_0}{K}$, 系统振幅最大。且此时系统是在原平衡位置作自由振动,其响应如图 2-32(b)。

2) 单位脉冲响应函数法

单位脉冲函数即 δ 函数, 这是一个广义函数, 有如下定义

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & (t \neq 0) \\ \infty & (t = 0) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

上式即定义单位脉冲函数的冲量为一个单位, 利用上述特性, 我们可以定义一个发生在时刻的单位脉冲函数

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0 & (t \neq \tau) \\ \infty & (t = \tau) \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} \delta(t - \tau) dt = 1$$

所以一个连续的时间函数 $f(t)$ 有以下性质

$$\int_0^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - \tau) dt = f(\tau)$$

因为单位脉冲函数的冲量定义为 1, 故 $m dv = 1$, 即 $dv = \frac{1}{m}$ 。

当 $t \geq \tau$ 时, 系统将作自由振动, 仍按前式可得系统的响应为

$$x = \frac{1}{\omega_d m} e^{-n(t-\tau)} \sin \omega_d(t - \tau) \quad (2-75)$$

上式即为系统单位脉冲瞬态的响应方程, 并记作 $x = h(t - \tau)$ 。 $h(t - \tau)$ 即称为系统的单位脉冲响应函数。系统若在 $F(t)$ 激振力作用下, 在 $t = \tau$ 时刻, 产生的冲击输入为 $f(t) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = f(\tau) d\tau$, 系统的冲击响应则为 $x = f(\tau) d\tau \cdot h(t - \tau)$, 故欲求系统在时刻 t 的响应, 无疑应为 $0 \rightarrow t$ 之间的冲击响应全部叠加, 即

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t f(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\omega_d m} \int_0^t f(\tau) e^{-n(t-\tau)} \sin \omega_d(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (2-76)$$

上式与(2-71)式一致。

2.3.3 频谱分析

1) 傅立叶变换

结构振动信号的分析可以在时间域内分析, 也可以在频率域内分析。对于复杂振动, 时间域的描述往往不易全面地、深刻地反映振动的特点。例如不易看出振动含有哪些频率成分、何种频率成分占优势、各种频率的振动能量分别是多少。这就需要将振动的时间历程变换为在频率域描述的函数。把振动波形在频率域上分解为许多谐波分量, 每一个谐波分量可由其振动幅值和相位来表示。各次谐波按其频率高低依次排列起来, 这样排列的各次谐波的总体称为频谱。动态信号中所含各次谐波幅度(振动幅值)的全体称为幅度谱或振幅谱, 它表示动态信号的幅值随频率的分布情况; 各次谐波相位值的全体称为相位谱, 它表示相位随频率的变化情况; 而表达各次谐波能量(或功率)的全体称为能量谱(功率谱)。

周期函数的频谱分析法是基于傅立叶级数, 而非周期函数的频谱分析法则基于傅立叶

积分法,两者统称为傅立叶变换。

把非周期函数看成一个周期趋向无穷大的周期函数,这样就可以借用周期函数的傅立叶级数法来分析。

设有一周期函数 $x_p(t)$, 其周期为 T , 当 $T \rightarrow \infty$ 时, 那么就有 $x_p(t)_{T \rightarrow \infty} = x(t)$ 。根据欧拉公式, 可将周期函数 $x_p(t)$ 的傅立叶级数写为复指数展开式

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} \cdot e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

式中: $c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (n = \pm 1, \pm 2 \dots)$

当 $T \rightarrow \infty$ 时, 基频 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$, 傅立叶级数频谱线间距 $\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 \rightarrow 0$, 说明随着周期的增大并趋向无穷, 频谱线也越来越密, 最后成为一条连续曲线。

现将两式合写成

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_p(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

令 $\omega = n\omega_0 = n \frac{2\pi}{T}$, $\Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, 对上式求极限 ($T \rightarrow \infty$) 则有

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} x_p(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_p(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau \cdot e^{jn\omega_0 t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \cdot e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (2-77)$$

式中: $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2-78)$

式(2-78)称之为 $x(t)$ 的正傅立叶变换, 式(2-77)为 $X(\omega)$ 的逆傅立叶变换, $x(t)$ 与 $X(\omega)$ 是一变换偶对。而 $X(\omega)$ 是频率的连续复变函数, 故可以写成形式为

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

在振动信号分析中, $|X(\omega)|$ 称频谱密度函数, 而 $\theta(\omega)$ 称为相角频谱。

必须指出, 由 $|X(\omega)|$ 绘成的幅频曲线与周期信号的频谱曲线在物理概念上是有区别的。周期信号频谱曲线是离散的, 曲线高度代表谐波分量的幅值。而非周期信号的频谱是连续的, 其纵坐标并不表示谐波分量的幅值, 而是代表频谱密度。但它在某一频率上的频谱密度值的大小仍表示出它对信号的贡献大小, 也就是说某种频率上的频谱密度值越大, 那么它在此频率上的能量也越大。频谱密度函数是单位频率上的振动量有效值的大小。

对于复杂振动信号的傅立叶频谱的应用越来越广泛。它可以用数值算法也可用仪器分析法得出, 后者已得到极大的发展。随着频谱分析技术的发展, 频谱一词有了更广泛的含义, 频谱分析包括自功率谱分析和互功率谱分析, 倒频谱分析等。

2) 冲击谱

对于非周期激振的一个主要研究内容是冲击问题。由于冲击波形一般给不出函数表达

式,需要用数字傅立叶变换(DFT)或快速傅立叶变换(FFT)进行分析。对冲击信号的频谱称为冲击傅立叶频谱,也简称冲击频谱,甚至有的也简称冲击谱。但冲击谱一般包括冲击傅立叶频谱和冲击响应谱。其中冲击傅立叶频谱仅是对冲击信号自身进行频谱分析的结果,而冲击响应谱是指系统受一定的冲击作用时的响应峰值对应于该系统的固有频率的关系。(有时也以对应于该系统的阻尼系数或相对阻尼系数来描述响应的峰值,则称为阻尼系数的冲击响应谱)冲击响应谱又可分为3种。

(1) 最大冲击响应谱:是在冲击激振函数作用下,系统的响应时间历程中的最大值与系统的固有频率之间的关系。

(2) 冲击初始响应谱:是在冲击激振函数的持续时间内,系统的响应所出现的最大值与系统的固有频率之间的关系。

(3) 冲击剩余响应谱:是在冲击激振函数作用终止之后,系统的响应时间历程出现的最大值与系统的固有频率之间的关系。

最大冲击响应谱是取初始响应谱与剩余响应谱之间的最大值组合而成的。在工程实际中,多采用最大冲击响应谱。

冲击响应谱可以直接评定某种冲击作用对设备或构件所造成的影响,因此,它可以为冲击的隔离设计及冲击环境模拟提供基本数据。但冲击响应谱已抛弃了冲击响应的相位信息,冲击响应谱模拟是不可逆的,因为相同的冲击响应谱可以由不同的冲击信号来实现。

【例 2-8】 求无阻尼单自由度系统对图 2-33 所示按直线上升的阶跃输入的冲击响应谱。

解:输入是一个有限时间的斜坡上升的阶跃输入,可表达为

$$F(t) = \begin{cases} \frac{t}{t_1} F_0 & (0 \leq t \leq t_1) \\ F_0 & (t \geq t_1) \end{cases}$$

对于在 $0 \leq t \leq t_1$ 的响应,可利用单位脉冲响应函数

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_n} \sin \omega_n t$$

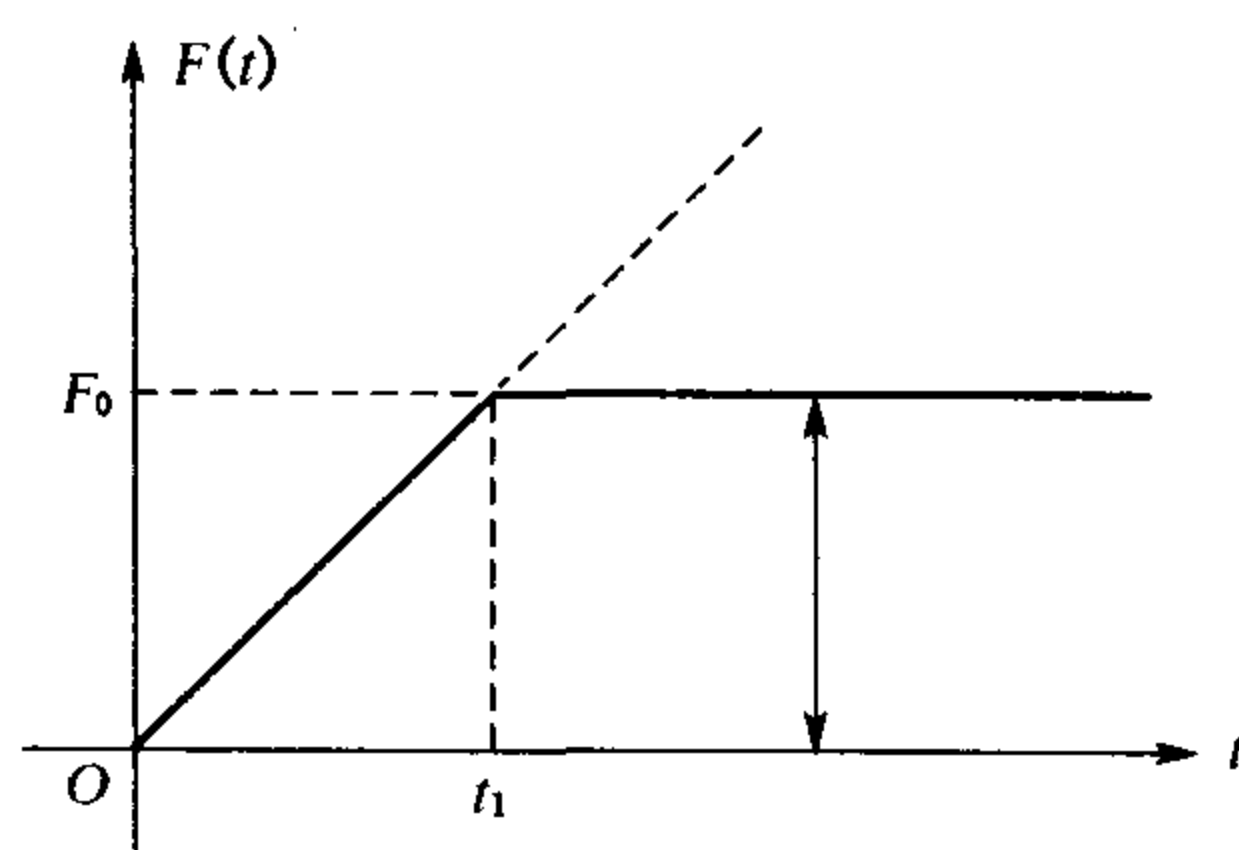


图 2-33 斜坡上升阶跃激振力

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{F_0}{t_1} \tau \frac{1}{m\omega_n} \sin \omega_n (t - \tau) d\tau \\ &= \frac{F_0}{m\omega_n t_1} \cdot \frac{1}{\omega_n} \left(t - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} \right) \\ &= \frac{F_0}{K} \left(\frac{t}{t_1} - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n t_1} \right) = X_0 \left(\frac{t}{t_1} - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n t_1} \right) \end{aligned}$$

式中: $X_0 = \frac{F_0}{K}$, 静载时的变形。

对于 $t > t_1$ 时的响应为 $0 \rightarrow t_1$ 连续斜坡函数的响应和从 t_1 开始的阶跃函数的响应之叠加。 $0 \rightarrow t_1$ 连续斜坡函数的响应为

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \int_0^{t_1} \frac{F_0}{t_1} \tau \frac{1}{m\omega_n} \sin \omega_n (t - \tau) d\tau \\ &= \frac{F_0}{K} \left\{ \frac{1}{\omega_n t_1} [\sin \omega_n (t - t_1) - \sin \omega_n t] + \cos \omega_n (t - t_1) \right\} \end{aligned}$$

从 t_1 开始的阶跃函数的响应为

$$x_2(t) = \frac{F_0}{K} [1 - \cos \omega_n(t - t_1)]$$

故总的响应为

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \frac{F_0}{K} \left[1 - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n t_1} + \frac{\sin \omega_n(t - t_1)}{\omega_n t_1} \right] t \phi t_1$$

现可以通过时间求导, 求出最大振幅表达式

$$\left(\frac{Kx}{F_0} \right)_{\max} = 1 + \frac{\sqrt{2(1 - \cos \omega_n t_1)}}{\omega_n t_1}$$

由上式可知, 冲击响应的最大值与 $\omega_n t_1$ 是有关的。因 $T = \frac{2\pi}{\omega_n}$ 为系统的固有周期, 所以

$\omega_n t_1 = \frac{t_1}{T} \cdot 2\pi$, 所以上式为

$$\left(\frac{Kx}{F_0} \right)_{\max} = 1 + \frac{\sqrt{2 \left[1 - \cos 2\pi \left(\frac{t_1}{T} \right) \right]}}{2\pi \left(\frac{t_1}{T} \right)}$$

将上式以 $\left(\frac{t_1}{T} \right)$ 为横坐标, $\left(\frac{Kx}{F_0} \right)_{\max}$ 为纵坐标, 则可绘出如图 2-34 所示的冲击响应谱。此例无冲击余谱, 故此即为最大响应谱。由图中可看出, 当 $t_1 = 0$ 时, 输入便变成阶跃函数, 可知能获得最大振幅为 $\frac{2F_0}{K}$ 。当 $t_1 \neq 3T$, 即加载时间大于系统的固有周期的 3 倍, 所能达振幅最大值就很小了, 一般即可认为是静加载。

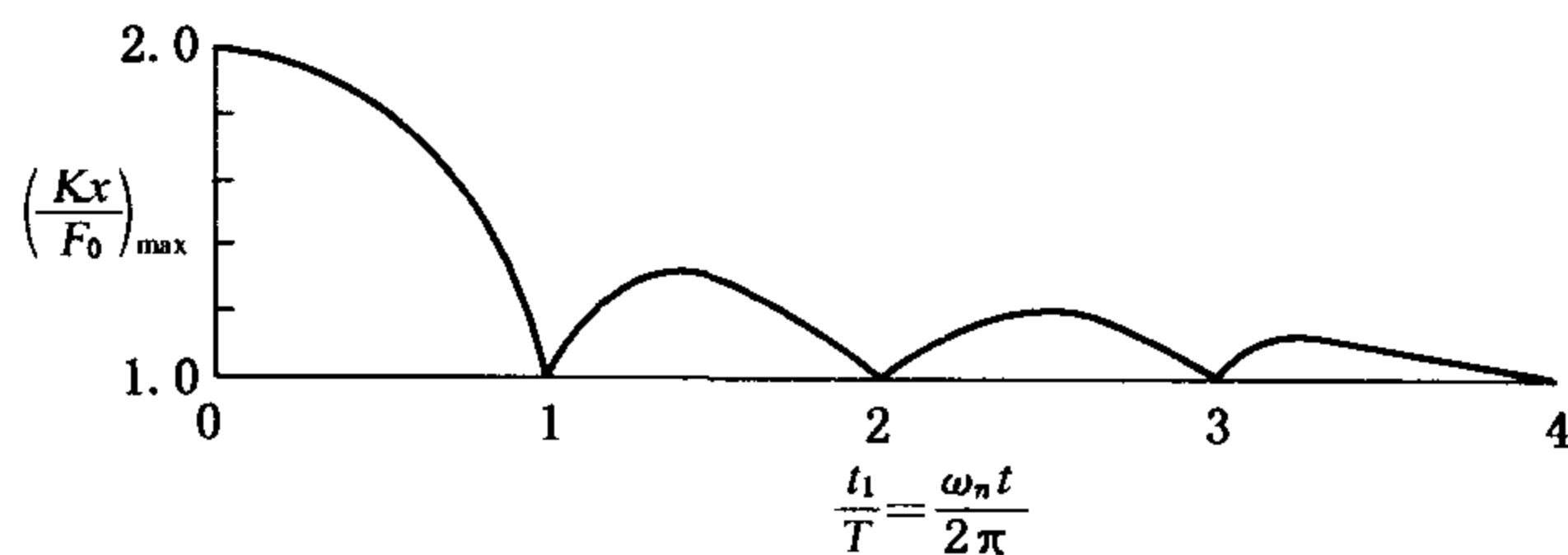


图 2-34 冲击响应谱

一些典型的冲击函数, 如矩形波冲击脉冲、简谐波冲击脉冲、三角形波冲击脉冲和阶跃函数等各种冲击谱可在有关资料中查用。

2.4 单自由度系统振动理论的应用

2.4.1 振动的衰减与隔离措施

1) 振动的隔离措施

机器设备运转时由于各种激振因素的存在, 产生振动常常是不可避免的。激烈的振动

对周围环境是极为有害的。采用有效的隔振措施是现代工业中日益受到人们重视的问题。隔振原理是按强迫振动理论采用具有合适弹簧刚度 K 和阻尼系数 c 的隔振器将设备与振源隔离来减少振动的影响。

根据振源不同,分为两种隔振方式。

(1) 主动隔振。如机器本身是振源,为减少它对周围的影响,可用隔振器使其与地基隔离,这种方式称主动隔振。隔振效果是用主动隔振系数 η_a 来表示,定义为

$$\eta_a = \frac{\text{隔振后传到地基上的力}}{\text{未隔振时传到地基上的力}}$$

如图 2-35 所示,机器设备简化为一质量块 m ,未隔振前如图 2-35 中(a)所示,作用于 m 上的力 $F = F_0 \sin \omega t$ 显然全部传至地基上,其振幅即为 F_0 。若采用橡胶隔振器隔离,如图中(b)所示,隔振器弹性为 K ,阻尼为 c ,则作用力 F 是通过隔振器弹簧传一部分力至地基。即

$$F_k = Kx = KB \sin(\omega t - \phi)$$

另外通过阻尼传一部分力至地基,即

$$F_c = c\dot{x} = cB\omega \sin\left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

这是两个同频率互相垂直的简谐力。合力的幅值为

$$F_T = \sqrt{F_{k \max}^2 + F_{c \max}^2} = \sqrt{(KB)^2 + (cB\omega)^2} = B\sqrt{K^2 + c^2\omega^2} = KB\sqrt{1 + (2\xi r)^2}$$

由式(2-49)可知

$$B = \frac{F_0}{K\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

代入上式

$$F_T = \frac{F_0 \sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

所以

$$\eta_a = \frac{F_T}{F_0} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (2-79)$$

可见 η_a 与支承运动产生的强迫振动的放大因子 β 完全一样。

(2) 被动隔振。如果振源是由地基传来,为减少地基振动的影响,也可采用隔振器将机器设备与地基隔开,称为被动隔振。隔振效果用被动隔振系数 η_p 来表示,定义为

$$\eta_p = \frac{\text{隔振后机器的振幅}}{\text{地基运动的振幅}}$$

设地基运动为简谐振动 $x_s = a \sin \omega t$,机器的振幅由式(2-62)可知为

$$B = a \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

所以

$$\eta_p = \frac{B}{a} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (2-80)$$

可见 η_p 等于 η_a 。现综合起来讨论,利用图 2-26 幅频响应曲线,可看出 η_a, η_p 与频率比 r 的关系,讨论如下:

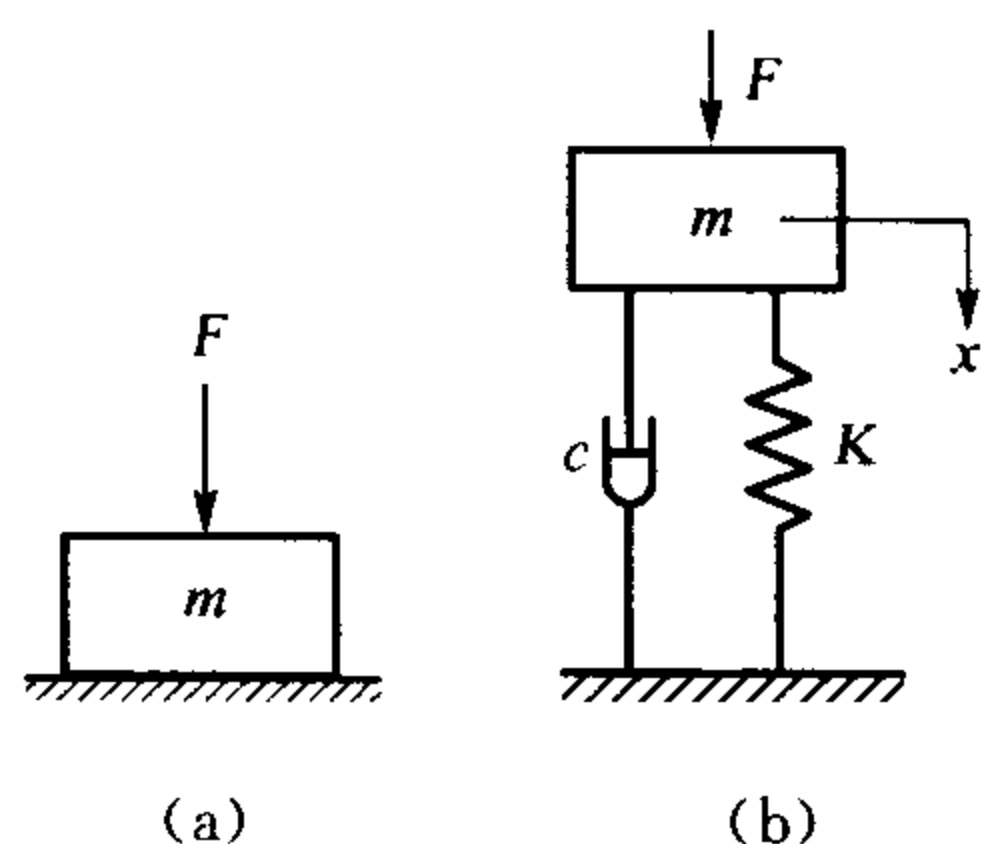


图 2-35 主动隔振

① 只有当 η_a, η_p 均应小于 1 才可以获得隔振效果, 由图 2-26 可知, 只有当 $r > \sqrt{2}$ 时, η_a, η_p 才能小于 1, 起到隔振效果。可用隔振效率 ϵ 来表示隔振效果, 比较直观。

$$\epsilon = (1 - \eta)100\% \quad (2-81)$$

ϵ 表示隔离装置所隔离掉振动的百分率。

② 当 $r > 5$, 曲线呈水平, η_a, η_p 为常数, 即无限增大 r 并不能提高隔振效果, 一般取 r 在 2.5~5 之间即可。

③ 当 $r > \sqrt{2}$, η_a, η_p 随阻尼系数 ξ 增大而增大, 即增大阻尼不仅不能提高隔振效果, 反而起相反作用。当忽略阻尼时, 隔振系数又称传移系数

$$\eta = \eta_a = \eta_p = \frac{1}{r^2 - 1} \quad (2-81a)$$

选用隔振器, 必须计算隔振器的参数。通常首先要确定隔振系数的大小以及振源频率范围, 然后可以求出频率比以及阻尼系数, 最后可计算出隔振弹簧的刚度。

2) 振动衰减方法简述

为了使系统中出现的振动尽快地衰减, 以避免或减少其不利影响, 可以采用以下一些方法。

(1) 减少或消除振源的激振力。找出振动的根源, 例如转子的质量偏心往往是引起振动的根源, 可以采取平衡措施来消除或减弱。

(2) 避免共振。设计机器设备或机械零件时, 应使其固有频率与振源的频率相差较大, 不致发生共振。

(3) 适当增加系统的阻尼。利用阻尼来消耗振动的能量。可在一些较为复杂的振动系统中常采用阻尼减振器, 如液体阻尼减振器。或给构件施加某种外阻尼, 如: ①利用面间阻尼(摩擦)。②在振动体表面喷(或涂、贴)一层具有高内耗的材料。③将构件做成“层状”结构。

这方面的详细资料可参考有关文献。

2.4.2 转轴的临界转速

工程上大量采用转轴来传递运动, 传递功率。转子上的旋转件若有偏心质量(因材质不均匀、加工误差、装配误差等造成的)必然会产生离心惯性力而使轴呈弓状变形, 这种现象称为弓形回转。当转轴的转速达到某一值时, 轴的动挠度将很大甚至导致轴被破坏, 此时的转速称为临界转速。下面我们就以转轴上仅一个盘形转动件为例讨论这种现象。为了略去自重的影响, 将转轴竖直放置, 两端为简支, 如图 2-36 所示。

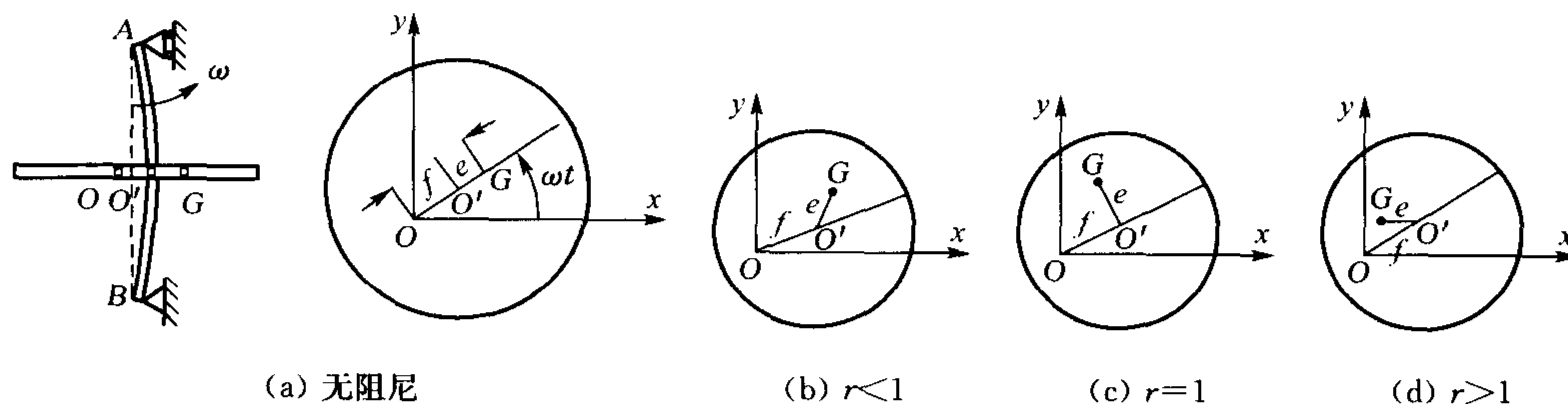


图 2-36 不同转速转子质心变化

设圆盘形心为 O' 轴静止时的中心线为 AB , 显然当静止时, AB 与圆盘的交点即为 O' 。圆盘的质心为 G , 质量为 m , 偏心距 $e=O'G$ 。当轴旋转后, 由于离心惯性力作用, 轴必然弯曲变形, 此时轴不仅自身在旋转, 即圆盘绕 O' 的转动, 还有弯曲了的轴绕 AB 中心线的转动, 这两种转动的角度并不一定相等, 现在仅讨论最简单的情况, 即两者均相等, 设为 ω 。现建立以 AB 与圆盘交点 O 为中心的直角坐标 xOy , 如忽略阻尼, 则轴的弯曲变形与圆盘的转动无相角差, 即图 2-36(a) 所示。 $O'C$ 与 O 在同一直线上。若存在阻尼, 则轴的弯曲变形响应要滞后于运动, 即 O' 点滞后于质心 G , 相角差为 ψ , 如图 2-36(b) 所示。设轴的弹簧刚度在 x, y 方向均为 K , 由材料力学可知 $K=\frac{48EI}{l^3}$, 若圆盘几何中心 O' 为坐标 (x, y) , 此时质心的坐标为

$$\begin{cases} x_G = x + e \cos \omega t \\ y_G = y + e \sin \omega t \end{cases}$$

按牛顿运动定理可得

$$\begin{cases} m \frac{d^2}{dt^2}(x + e \cos \omega t) = -Kx - c\dot{x} \\ m \frac{d^2}{dt^2}(y + e \sin \omega t) = -Ky - c\dot{y} \end{cases}$$

写成

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = me\omega^2 \cos \omega t \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + Ky = me\omega^2 \sin \omega t \end{cases} \quad (2-82)$$

这个方程式与偏心质量引起的强迫振动方程式一样, 故直接可求解

$$\begin{cases} x = \frac{er^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \cos\left(\omega t - \text{tg}^{-1} \frac{2\xi r}{1-r^2}\right) \\ y = \frac{er^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \sin\left(\omega t - \text{tg}^{-1} \frac{2\xi r}{1-r^2}\right) \end{cases}$$

轴的中点动挠度为 $f=OO'=\sqrt{x^2+y^2}=\frac{er^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$

相角差

$$\psi = \text{tg}^{-1} \frac{2\xi r}{1-r^2}$$

轴在旋转过程中其形心 O' 作半径为 f 的圆周运动, 整个轴呈弓状变形, 但并未发生振动现象, 故称为弓形回转。此时轴内并不产生交变应力, 与轴在横向振动时会发生交变应力是不同的。

下面根据图 2-18 和图 2-19 幅频、相频响应曲线讨论。

(1) 当 $r \ll 1$ 很小时, 动挠度很小, 且当 $r < 1$ 时, $\psi < \frac{\pi}{2}$ 。

(2) 当 $r=1$, 即 $\omega=\omega_n$ 时, 动挠度达最大值。 ω_n 是指转轴在横向振动的固有频率。由于转轴的离心惯性力对轴承会产生交变力, 导致支承系统发生剧烈的振动现象, 所以将这个转速称为临界转速, 即 $n=\frac{60\omega_n}{2\pi}$ (rpm) 必须注意临界转速产生的振动现象与共振是不同的概念。同样, 由于阻尼存在, $r=1$ 时, 动挠度并非最大值, 如考虑一些其他因素, 临界转速值并

不等于固有频率,而是略有偏离。

当 $r=1$ 时, $\psi=\frac{\pi}{2}$ 。

(3) $r \gg 1$ 时, $\frac{Y}{e} \rightarrow 1$, 即 $Y=e$ 又根据相频响应曲线, 当 $r > 1$ 时, $\psi > \frac{\pi}{2}$, 若阻尼很小时, $\psi \rightarrow \pi$, 即重心 C 落在 OO' 之间, 而 $Y=e$, 故 O 点与 C 点便重合了, 此时轴将绕圆盘质心旋转, 当高速旋转时轴能绕转盘的质心旋转这一现象称为自动对中, 这时轴的运转平稳。在工程中往往利用这一现象使转轴在远高于临界转速以上工作, 称为超临界轴或柔性轴。

由以上分析可知, 临界转速是十分重要的, 但转轴一般并非单圆盘, 且也不是等直径轴, 准确计算转子临界转速比较复杂。

2.4.3 转子的平衡

旋转机械的转动部分即转子在运转时由于偏心质量会产生离心力, 从而引起强烈振动。为此必须在正式运转前采取措施, 尽量减小转子的质量偏心, 消除其离心力作用, 从而控制振动的振幅在允许的范围内, 这就是平衡。

如图 2-37 所示, 一个总质量为 M 的圆盘其质心与转子旋转中心的距离(偏心距)为 \bar{e} , 原始不平衡产生的离心力为 \bar{F} , 如在相反方向上半径为 \bar{r} 加一平衡质量 m , 它所产生的离心力为 \bar{F}' , 如果 $\bar{F} = -\bar{F}'$, 则转子达到完全平衡。即

$$\bar{F} = -\bar{F}' = M\bar{e}\omega^2 = -m\bar{r}\omega^2$$

1) 静平衡和动平衡

对于一个完全平衡的转子, 力学上主要条件是转子上各部分质量在旋转时产生的离心惯性力的合力和合力偶都应控制在允许的范围内。否则便称为不平衡转子。若仅合力不平衡称静不平衡; 若还包含合力偶不平衡则称动不平衡。也有将合力为零而合力偶不为零的称为偶不平衡。下面简单介绍这两种不平衡转子的平衡方法。

(1) 静平衡。如图 2-38(a)所示, 轴上仅有一个薄圆盘的转子, 若薄圆盘有一偏心距为 e 的偏心质量 m , 则旋转时产生一个不平衡的离心惯性力 $F = me\omega^2$, 它通过轴心, 所以此转子无合力偶, 属于静不平衡。静平衡方法又称单平面平衡: 可以将其置于两个完全平行的水

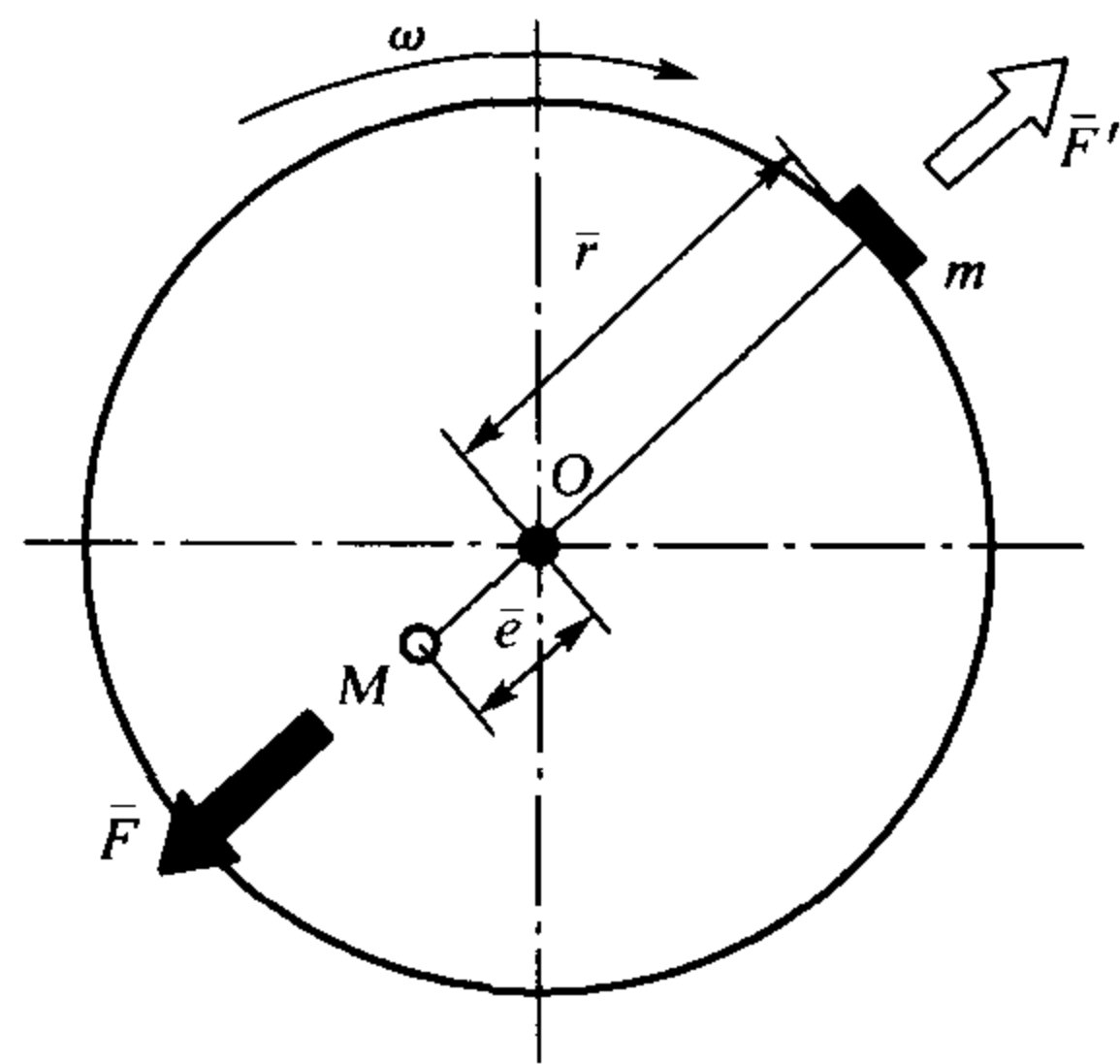
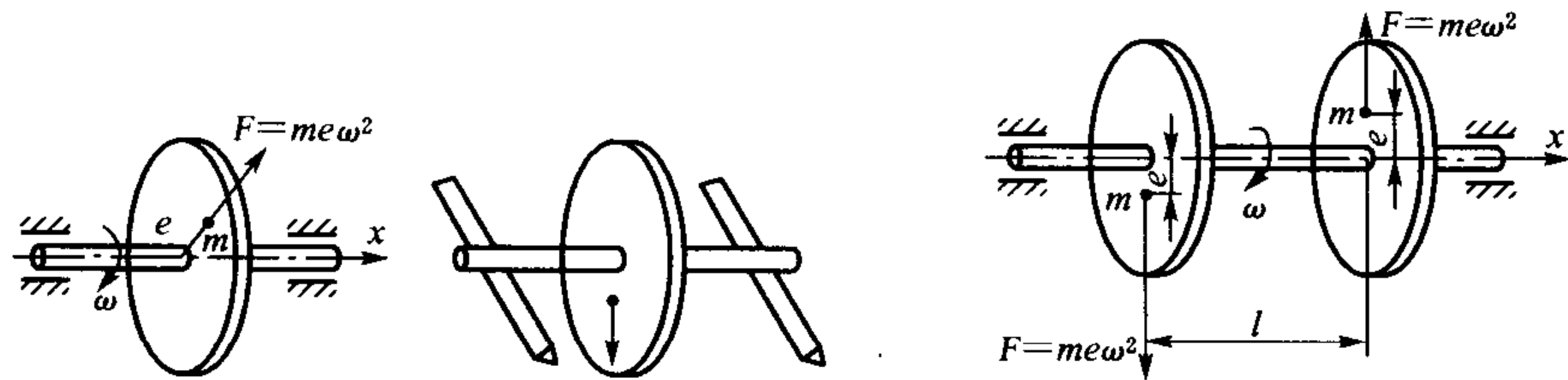


图 2-37 转子平衡



(a) 单圆盘转子及静平衡

(b) 双圆盘转子

图 2-38 单圆盘转子和双圆盘转子

平轨道上,如图 2-38(a)所示,利用重力作用找到偏心质量的位置,然后采用在偏心质量一边减重或在对称中心的另一边配重,使转子能随意停留在任何一方位而不发生转动,就完成了静平衡。但该方法不能直接测出不平衡量。

(2) 动平衡。如图 2-38(b)所示,轴上装有两个薄圆盘的转子,盘上各有一同样大小的偏心质量 m 和同样大小的偏心距 e ,其方位正相反。当轴旋转时将产生两个大小相等、方位相反的离心惯性力 $F = me\omega^2$,故合力为零,但却产生了一个合力偶 $M = Fl$,属于偶不平衡。动不平衡是由静不平衡和偶不平衡叠加而成。动不平衡必须在两个以上的平面进行校正,使其惯性力和惯性力偶均控制在允许范围,达到平衡。在实际生产中,平衡方法的选择原则是当转子长度 l 与外径 D 之比 $\frac{D}{l} \geq 5$ 时只需进行静平衡即可;否则要做动平衡。对于不平衡量很大的大型转子零件,在做动平衡前应先做静平衡。

2) 转子的平衡精度等级

转子的不平衡是由离心力引起的,转速越高,离心力越大,在高转速下允许的不平衡程度就越小。经过平衡后各种转子的允许残余不平衡量是根据平衡精度等级来要求的。平衡精度等级 G 的定义为

$$G = \bar{e}\omega \quad (2-83)$$

式中: G ——转子的平衡精度等级,单位 mm/s。

\bar{e} ——转子的不平衡度,单位 mm[或 $\text{g} \cdot \text{mm}/(\text{kg} \cdot 1\,000)$]。

ω ——转子的旋转角速度,单位 r/s。

平衡精度 G 的物理意义是转子质心线速度。显然,转子质心线速度越大,则转子的振动也就越激烈。反之,转子质心线速度越小,则转子旋转也就越平稳。

表 2-1 各类刚性转子的平衡精度等级

平衡精度等级 G	e_ω [mm/s]	转 子 类 型
G4000	4 000	刚性安装的具有奇数汽缸的慢速船用柴油机的曲轴传动装置
G1600	1 600	刚性安装的大型两冲程发动机的曲轴传动装置
G630	630	刚性安装的大型四冲程发动机的曲轴传动装置,弹性安装的船用柴油机的曲轴传动装置
G250	250	刚性安装的高速四冲程柴油机的曲轴传动装置
G100	100	具有 6 个或更多汽缸的高速柴油机的曲轴传动装置,汽车、卡车以及机车的发动机
G40	40	汽车轮胎、传动轴、刹车毂以及弹性安装的具有 6 个或更多汽缸的高速四冲程的发动机(汽油机或柴油机)曲轴传动装置,汽车、卡车和机车的曲轴传动装置
G16	16	具有特殊要求的传动轴(推进器、万向联轴节轴),破碎机零件,农业机械零件,有特殊要求的六缸或多缸发动机(汽车、机车的汽油机或柴油机)曲轴
G6.3	6.3	工作母机的零件,船舶主涡轮传动机构(商船用),离心机毂轮,风扇,组合式航空燃气轮转子,飞轮,泵式推进器,机床和普通机械零件,普通电机转子,具有特殊要求的发动机

续表 2-1

平衡精度等级 G	e_ω [mm/s]	转 子 类 型
G2.5	2.5	蒸汽轮机,包括船用(商船用)主要刚性涡轮发动机转子,机床传动装置,具有特殊要求的中型和大型电机转子,小型电机转子,涡轮驱动泵
G1	1	磁带记录仪和留声机传动装置,磨床传动装置,具有特殊要求的小型电机转子
G0.4	0.4	精密磨床的传动轴,砂轮和电机转子,陀螺转子

国际标准化组织所制定的“刚性转子平衡精度”标准 ISO1940,就是以 G 来划分精度等级的。 G 的范围从 0.16 mm/s 到 1 000 mm/s。共分 11 个等级,每个等级间按 2.5 分隔。例如, G 值范围从 2.5 mm/s 到 6.3 mm/s,记为 $G6.3$ 。表 2-1 给出了各种类型转子的平衡精度等级,可供确定转子允许残余不平衡度时使用。如果确定了转子平衡精度等级 G ,已知工作转速 ω ,就可以利用式(2-83)计算允许不平衡度 \bar{e} 。

3) 刚性转子平衡

工作中的转子可分为刚性转子和挠性转子。转子在较低转速下运转时,如果工作转速低于临界转速的 0.6 倍,由离心力而产生的动挠度很小,这种转子称为刚性转子。刚性转子因为不考虑挠曲变形,因而可以在一个或两个平衡校正面进行不平衡量的校正。这种平衡方法,称为刚性转子平衡,也称低速动平衡。可用于一般电动机、鼓风机、水泵等的转子。

图 2-39 所示为转子动平衡实验装置,它包括转子实验台和动平衡仪仪器两部分,实验台部分是电机、支撑和转子。测试仪器包括两个测振幅的涡流式位移传感器以及前置器,测转速的光电传感器,动平衡分析仪等,为了测量转子不平衡矢量的相位,动平衡仪上须有键相器信号输入。

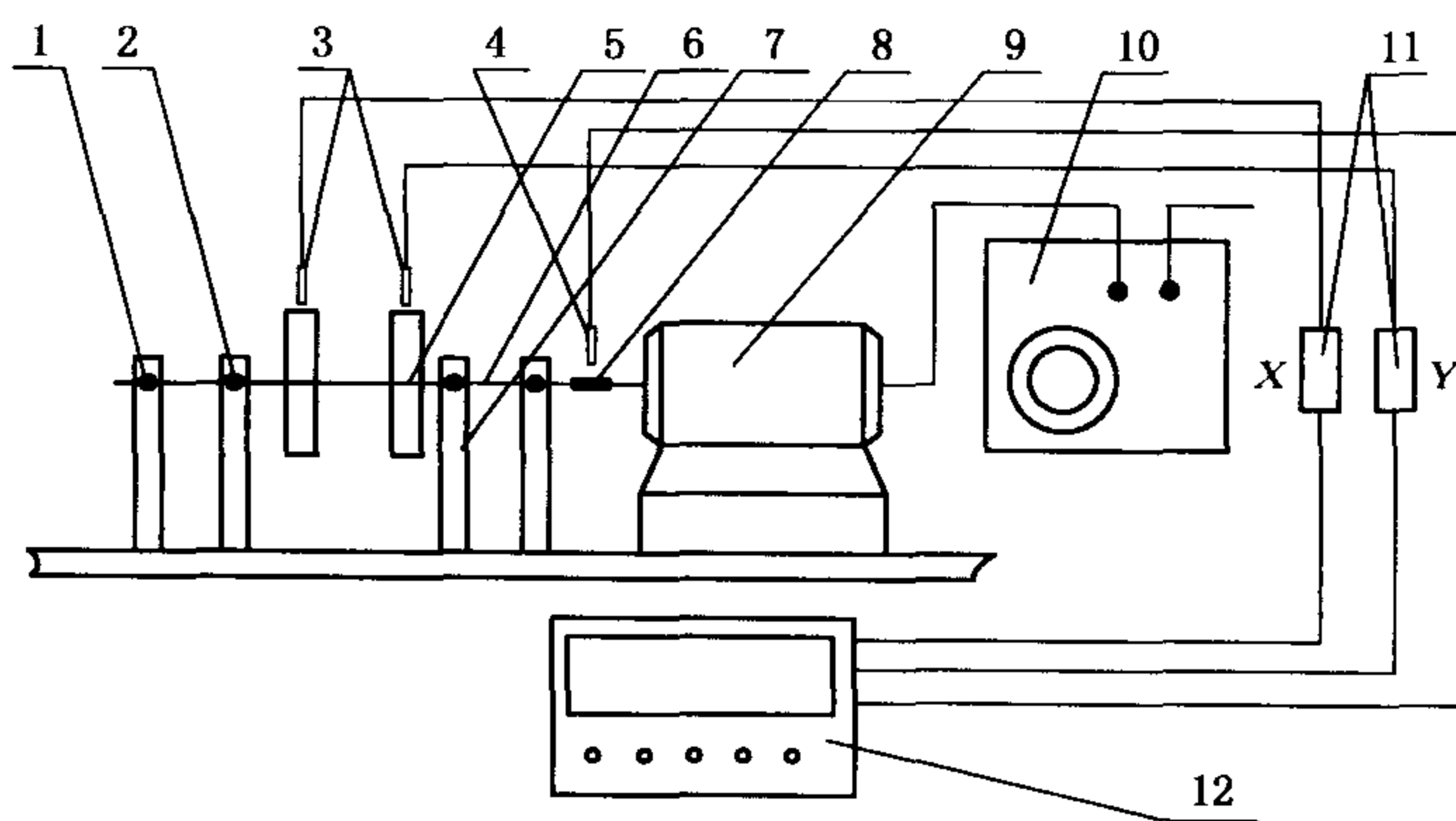


图 2-39 刚性转子动平衡装置

1. 轴承支座 2. 限位保护支座 3. 转盘 4. 转速传感器头 5. 测振传感器
6. 转轴 7. 传感器支座 8. 键相器 9. 电机 10. 调速器
11. 前置器 12. 动平衡仪

常用的刚性转子的平衡方法是影响系数法,影响系数法认为:转子系统为一线性系统,其上各不平衡量所产生的振动响应是可以进行线性叠加的。即振幅与激振力大小成正比,与不平衡力之间的相位保持不变。单位不平衡量在振动测点处引起的振动响应称为影响系

数。应注意各振动量、不平衡量及校准量均为矢量,既有大小,又有方向。由于阻尼的存在,振动与激振力之间存在相位差。

现以单平面的平衡为例:若转子某一平面上测得的原始振动响应为 \bar{A}_0 ,在该平面加一试重 \bar{P}_1 ,加试重后在相同转速下同一测点的振动响应为 \bar{A}_1 ,则由试重 \bar{P}_1 引起的振动响应 \bar{A}_2 为: $\bar{A}_2 = (\bar{A}_1 - \bar{A}_0)$,见图 2-40, $\bar{A}_2 \div \bar{P}_1 = \bar{K}$, \bar{K} 称为影响系数。它表示单位不平衡量引起的振动响应。于是,为消除原始振动量 \bar{A}_0 ,当校正半径等于试重半径时,则加在校正面上的校正量 \bar{P}_0 为

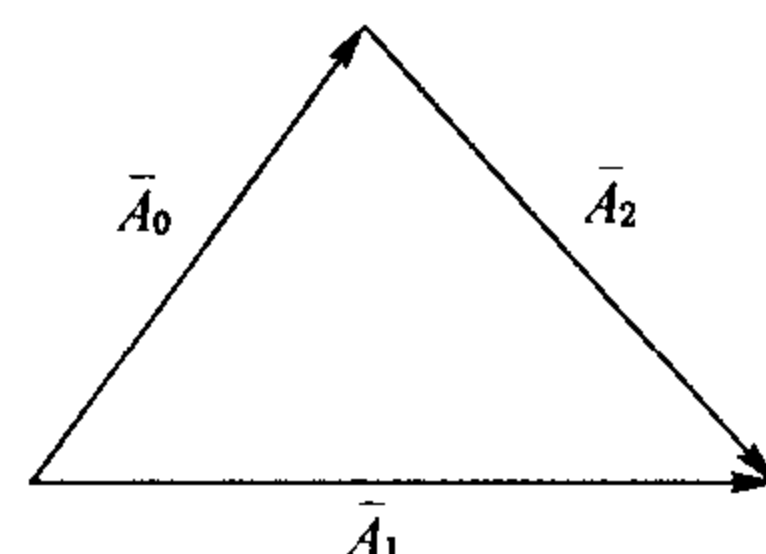


图 2-40 平衡矢量图

$$\bar{P}_0 = -\bar{A}_0 \div \bar{K} = -\bar{A}_0 \div \bar{A}_2 \times \bar{P}_1 \quad (2-84)$$

这样,就使转子获得了校正平衡。上式中负号表示校正量 \bar{P}_0 与原始不平衡力的方向相反。

如果在两个校正面进行不平衡量的校正,即双面平衡,在两个面上的不平衡力影响系数有 4 个:

\bar{K}_{11} ——表示 I 面上加单位试重在 I 面引起的振动响应, $\bar{K}_{11} = (\bar{A}_{11} - \bar{A}_{10}) \div \bar{P}_1$

\bar{K}_{12} ——表示 II 面上加单位试重在 I 面引起的振动响应, $\bar{K}_{12} = (\bar{A}_{12} - \bar{A}_{10}) \div \bar{P}_2$

\bar{K}_{21} ——表示 I 面上加单位试重在 II 面引起的振动响应, $\bar{K}_{21} = (\bar{A}_{21} - \bar{A}_{20}) \div \bar{P}_1$

\bar{K}_{22} ——表示 II 面上加单位试重在 II 面引起的振动响应, $\bar{K}_{22} = (\bar{A}_{22} - \bar{A}_{20}) \div \bar{P}_2$

上式中: \bar{A}_{10} 、 \bar{A}_{20} ——分别为 I, II 两平面的原始不平衡振动量。

\bar{P}_1 、 \bar{P}_2 ——分别为加在 I, II 两平面的试重。

\bar{A}_{11} 、 \bar{A}_{12} ——I 平面分别加 \bar{P}_1 、 \bar{P}_2 后引起的振动响应。

\bar{A}_{21} 、 \bar{A}_{22} ——II 平面分别加 \bar{P}_1 、 \bar{P}_2 后引起的振动响应。

为平衡原始不平衡量应加在 I, II 两面的校正量 \bar{P}_{10} 、 \bar{P}_{20} 分别为

$$\bar{P}_{10} = -(\bar{K}_{11} \times \bar{A}_{10} + \bar{K}_{12} \times \bar{A}_{20}) \quad (2-85)$$

$$\bar{P}_{20} = -(\bar{K}_{21} \times \bar{A}_{10} + \bar{K}_{22} \times \bar{A}_{20}) \quad (2-86)$$

加上后就实现了双面平衡。

但当转子转速提高,工作转速超过其一阶临界转速,转子因挠曲变形而产生的变形将增大离心力的作用,而且挠曲变形随着转速的变化而变化,这时必须考虑动挠度的影响,这就称为柔性平衡,也称高速动平衡。刚性转子的平衡方法就不再适用。具体方法可查看有关资料。

2.4.4 振动机械的应用

虽然在很多情况下,振动是有危害的。但在某些场合,振动是有益的。利用振动可有效地完成许多工艺过程,或提高某些机器的工作效率。近几十年来,应用振动原理而工作的机械(简称振动机械)得到了迅速的发展,它们在矿山、冶金、建材、化工、电力等行业得到了广泛的应用。例如,振动给料机、振动筛、振动球磨机、振动成型机、振动压路机等,它们在生产中发挥了重要作用。

振动机械的优点是结构简单、制造容易、重量较轻、成本低、能耗小、安装方便、维修容易等。某些振动机械也存在着振幅不够稳定、调整复杂、传给地基的振动较大、零部件工作寿

命较短以及噪音较大等缺点。

振动机械通常由以下三部分组成：

(1) 激振器。激振器产生周期变化的激振力,使工作机体产生持续的振动。常用的激振器有惯性式激振器、弹性连杆式激振器、电磁式激振器、液压式或气动式激振器以及凸轮式激振器等。

(2) 工作机体或平衡机体。如输送槽、筛箱、台面和平衡架体等。工作机体在激振器作用下通常周期性运动。

(3) 弹性元件(弹簧)。包括隔振支撑弹簧和连杆弹簧。隔振支撑弹簧的作用是支承振动机体,使机体实现所要求的振动并减小传给基础或结构架的动载荷;连杆弹簧的作用是传递激振力。

振动机械按激振装置的类型可分为以下几种。

1) 惯性式振动机

惯性式振动机工作简图如图 2-41 所示,它是由惯性激振器驱动。惯性激振器通常是由偏心块、转轴、轴承和轴承座等所组成。工作机体的振动是由带有偏心块的转轴旋转时产生的离心力引起的。目前得到了广泛的应用。例如,惯性振动筛、振动球磨机、振动成型机等。惯性激振器可分为单轴式和双轴式两种。单轴式振动机由单轴惯性激振器、机体和带有隔振弹簧的支撑或悬吊装置所组成。单轴式惯性激振器通常产生沿圆周方向变化的激振力。所以机体通常做圆周运动或近似于圆形的椭圆运动。单轴式惯性振动机机体的振幅可按式 $mB\omega^2 \approx m_0e\omega^2$ 计算,即

$$B \approx \frac{m_0 e}{m} \quad (2-87)$$

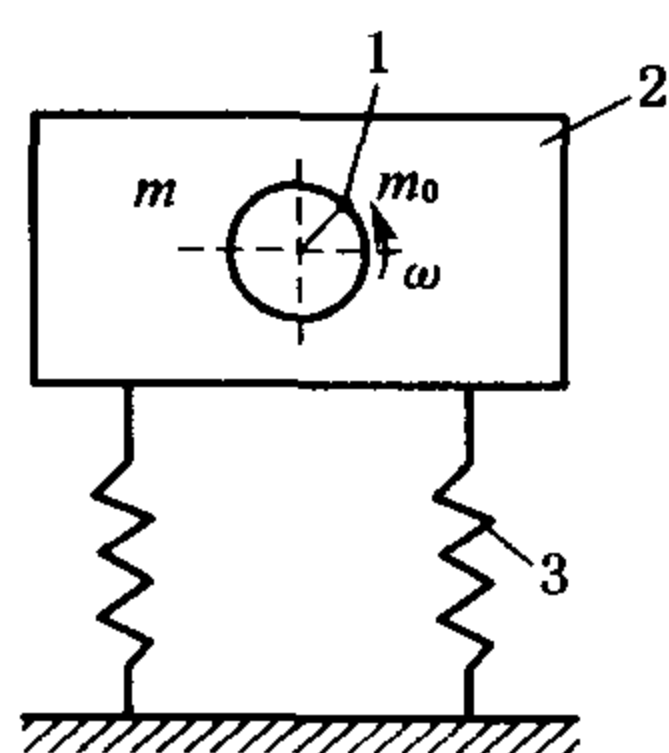
式中: B ——机体的振幅。

m ——机体(包括内部物料)质量。

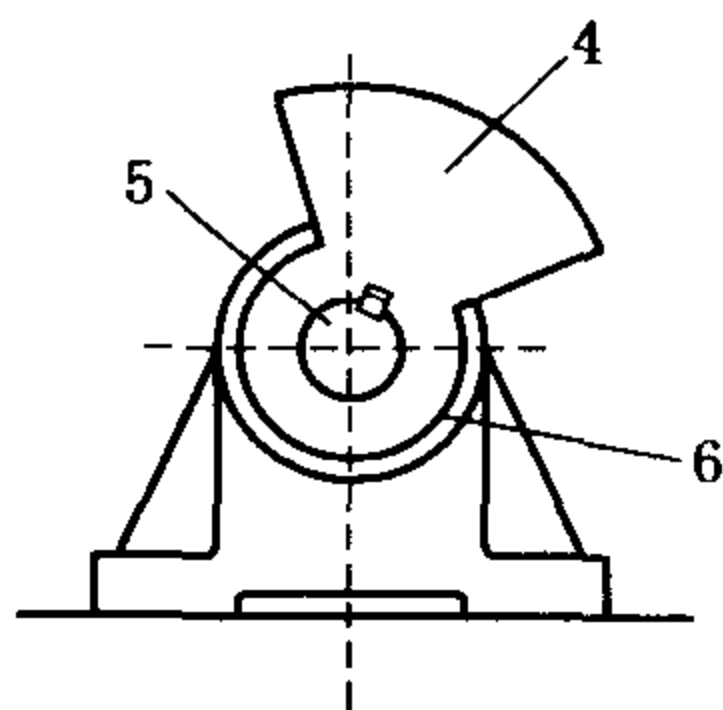
e ——转子偏心质量偏心距。

m_0 ——偏心块质量。

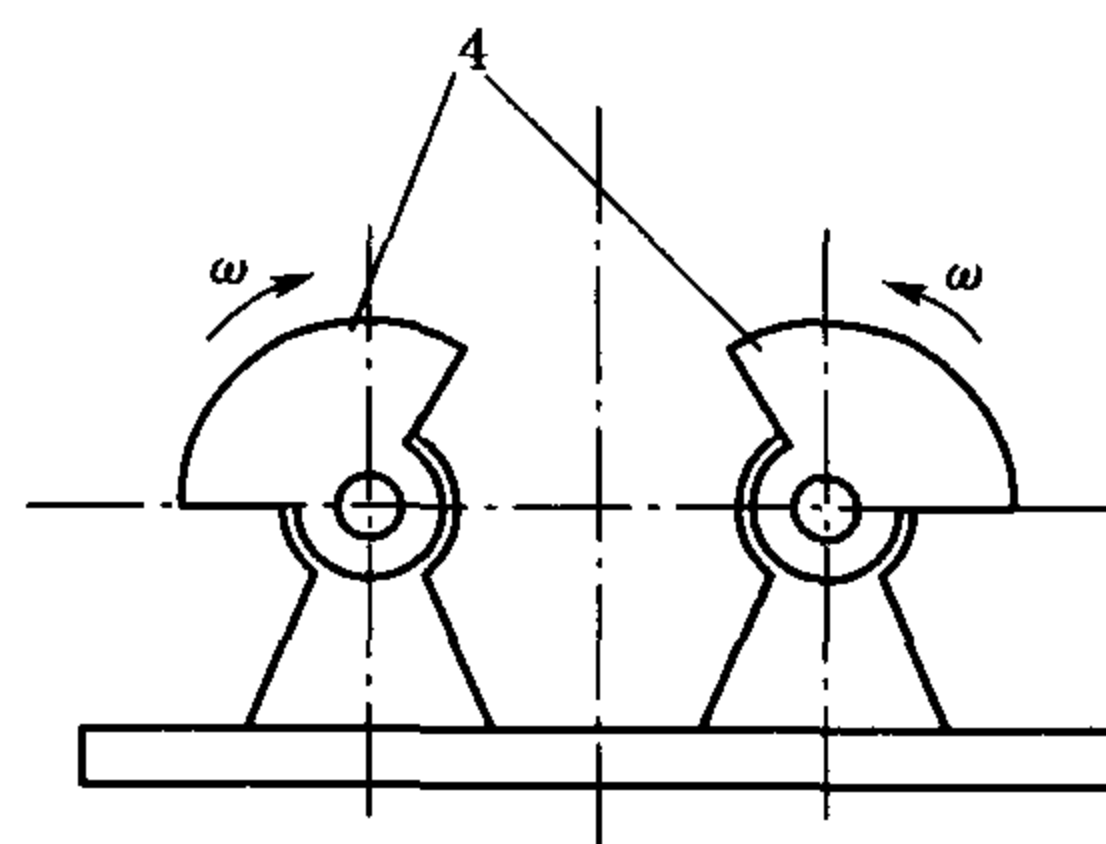
ω ——转轴旋转角速度。



(a) 振动机简图



(b) 单轴惯性式激振器



(c) 双轴式惯性式激振器

图 2-41 惯性式振动机

1. 激振器 2. 工作机体 3. 隔振弹簧 4. 偏心块 5. 主轴 6. 轴承

双轴式惯性激振器的两轴通常作等速反向回转,如图 2-41(c),当两轴上的偏心块质量及偏心距相等时,垂直方向产生的激振力相加,水平方向的激振力互相抵消。因此,双轴式

惯性振动机的机体通常作直线振动。双轴式惯性振动机机体的振幅可按下式计算

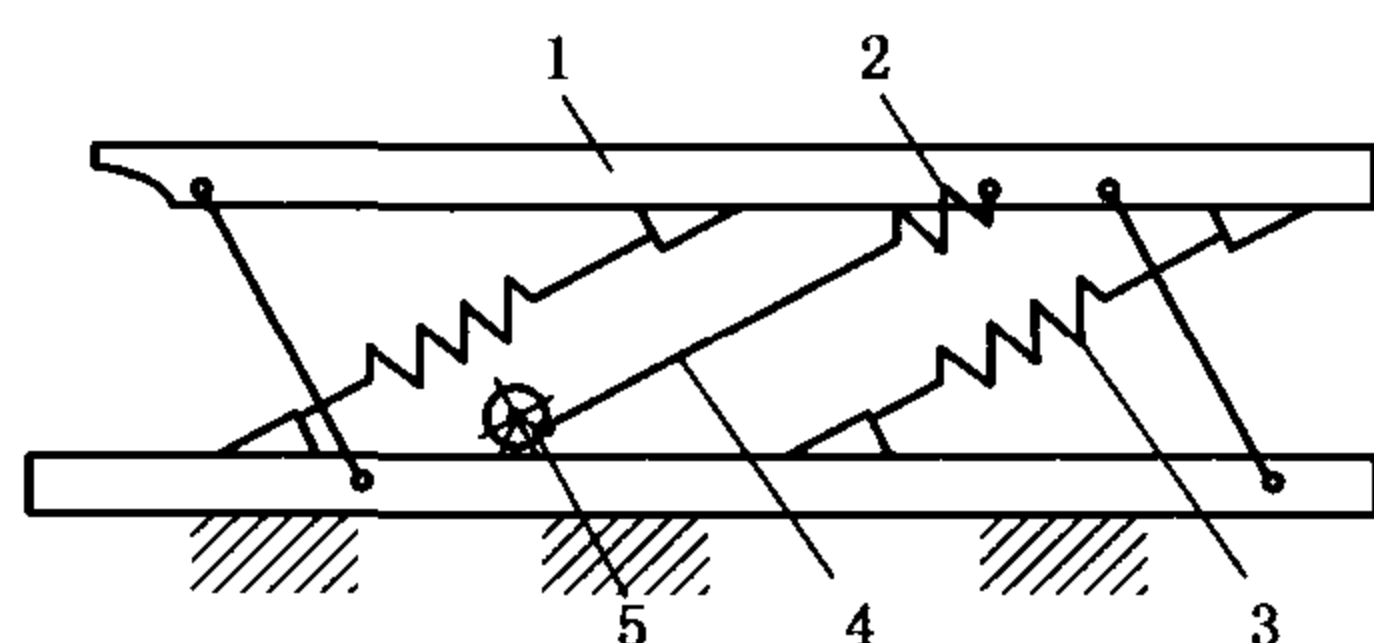
$$B \approx \frac{2m_0 e}{m} \quad (2-88)$$

式中： m_0 ——每个转轴上偏心块质量。

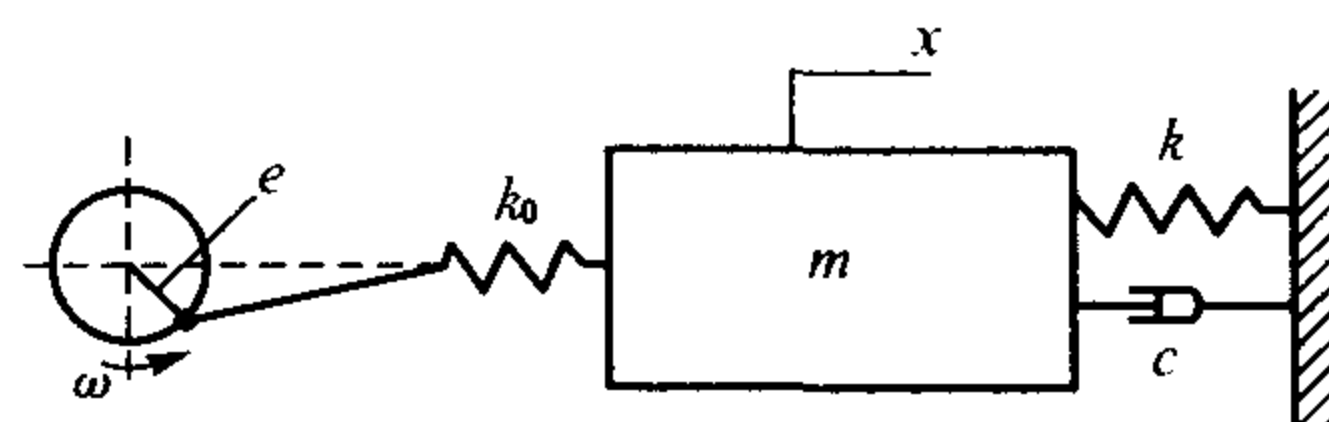
惯性式振动机在远离共振的状态下工作，转轴转速频率 ω 与系统的固有频率 ω_n 的频率比， $r \gg 2$ 。即系统固有频率远小于工作频率，弹簧的刚度相对很小，保证了良好的隔振性能，传给基础的动载荷很小。

2) 弹性连杆式振动机

弹性连杆式振动机工作简图如图 2-42(a)所示，弹性连杆激振器是由连杆及连杆端部的弹簧所组成。工作机体借弹性连杆激起振动。长度较大的振动机通常采用弹性连杆式振动机形式。



(a) 结构示意图



(b) 力学模型

图 2-42 弹性连杆式振动机

1. 工作机体 2. 连杆弹簧 3. 隔振弹簧 4. 连杆 5. 偏心轴

力学模型如图 2-42(b)所示，据此可列出动力学方程

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx - k_0(x - e\sin\omega t)$$

整理后得

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + (k + k_0)x = k_0 e \sin\omega t \quad (2-89)$$

式中： k_0 ——连杆弹簧刚度。

e ——偏心轴的偏心距。

m, c, k 等意义同前。

根据强迫振动理论可求得工作机体稳态振动的振幅

$$B = \frac{k_0 e}{(k + k_0) \sqrt{(1 - r^2) + (2\zeta r)^2}} \quad (2-90)$$

弹性连杆式振动机的频率比，通常取 $r = 0.75 \sim 0.95$ ，即该种振动机工作转速低于临界转速，频率比 r 接近 1，在靠近共振状态下工作，以得到较大的振幅。

3) 电磁式振动机

它是由电磁激振器驱动的。电磁激振器是由铁芯、线圈及衔铁所组成。交变电流或脉动电流通过线圈，使电磁铁产生周期变化的电磁吸力，从而使工作机体产生振动。振动实验室多采用电磁振动试验台；工业中电磁振动给料机、电磁振动筛等，应用也较多。

4) 其他振动机

它们由液压式激振器、凸轮式激振器或风动式激振器等驱动。

2.5 单自由度非线性系统振动简介

2.5.1 非线性振动的基本特性

前面介绍的动力计算中,其运动方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

在这个方程中,惯性力、阻尼力和弹性力均为线性、常系数的。应用这个方程能够解决许多实际的问题。但是机械系统振动问题中有许多现象无法用线性振动理论来解释。例如,由于大位移而导致的几何非线性,或由于阻尼力、弹簧力的因素产生的物理非线性。这类问题的运动方程是非线性的,故称为非线性振动问题。

引起非线性振动的原因很多,主要是非线性恢复力和非线性阻尼力所致。

非线性恢复力(弹性力)是指弹性元件材料的力与变形不成线性关系或由于几何构造原因造成的恢复力与位移的关系不成线性。非线性阻尼力则说明某些振动系统中复杂的阻尼不能通过前面所述简化方式线性化处理。

非线性振动有许多与线性振动完全不同的基本性质,现择要简单介绍如下。

1) 振动频率随振幅变化

恢复力为非线性时,系统的固有频率随振幅的大小而变化。这与线性系统固有频率仅与系统参数有关的性质完全不同。如非线性弹性为硬弹性(弹性系数随位移增大而提高),则频率随振幅增大而提高;反之,如为软弹性,则频率随振幅增大而减小。图 2-43 所示为非线性弹簧的变形—恢复力关系和具有非线性恢复力系统的频率—振幅关系。

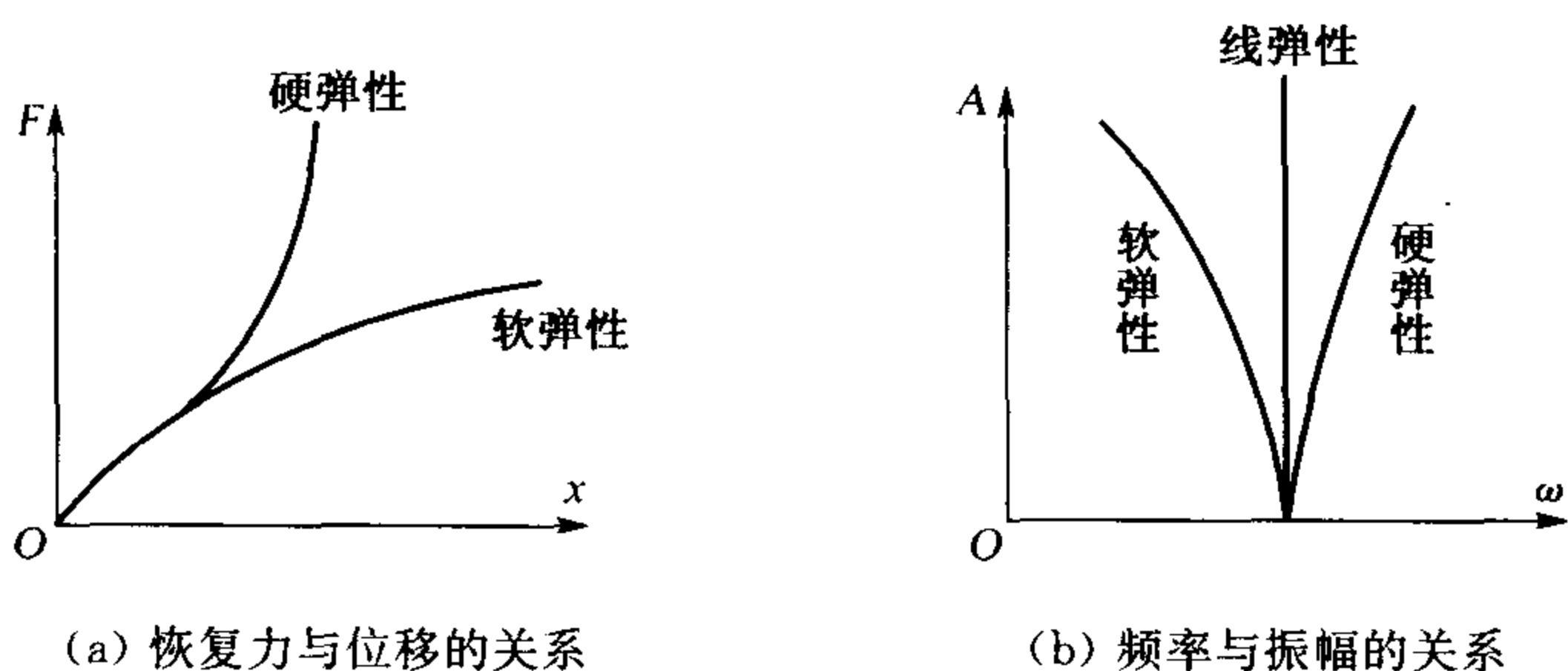


图 2-43 非线性弹簧的频率与振幅关系

2) 跳跃现象

具有非线性弹性的机械系统,在简谐激振强迫振动时,它的幅频曲线不同于线性系统。曲线有向右(硬弹性时)或向左(软弹性时)弯曲的现象,如图 2-44 所示。

对线性系统而言,激振力幅值保持不变而逐渐改变激振力的频率时,不论是频率值由小到大变化,还是由大到小变化,系统受迫振动幅值的变化都是连续的[见图 2-44(a)]。但是,对于非线性系统,以硬弹性为例[见图 2-44(c)],当激振力幅值不变而逐渐增加激振力频率时,振幅也随着增大,在振幅增大到 a 点后,再增大频率则振幅将突然从 a 点降到 b 点,发生一个突变。如频率是从高频向低频变化,则振幅变化将沿 bc 到达 c 点,再继续减低频

率,则振幅又将从 c 点升到 d 点,又发生一次突变,然后再随频率的减小而趋向于静位移值。对于软弹性的非线性系统,也会发生类似的现象。

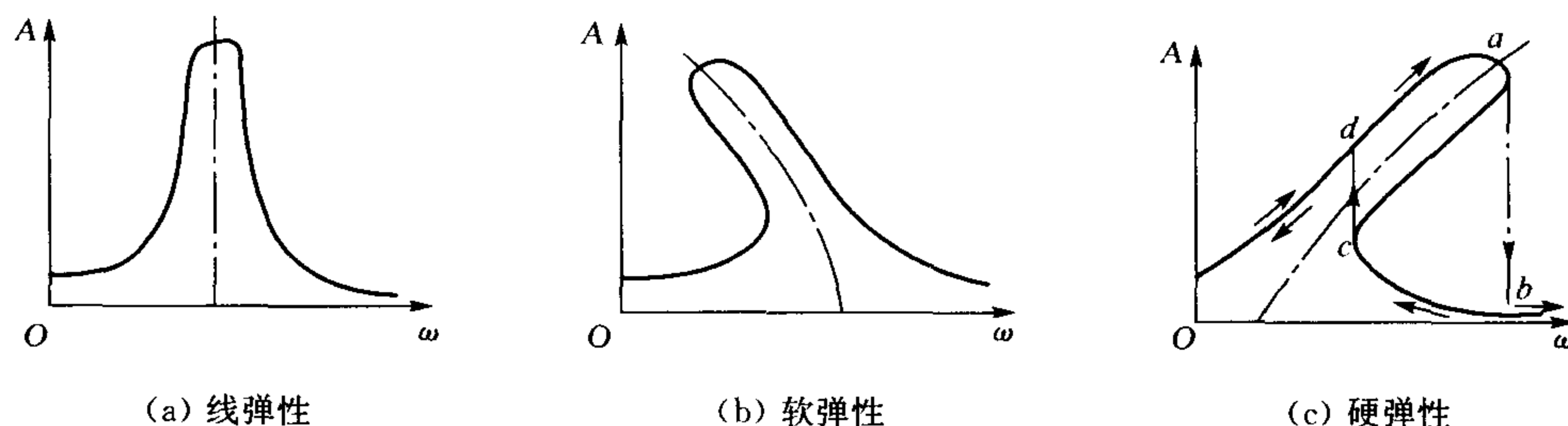


图 2-44 非线性弹簧系统的幅频曲线

非线性受迫振动中振幅随激振力频率变化而发生的这种突变现象称为跳跃现象。在激振频率由小到大渐变和由大到小渐变时,振幅变化的过程不相同。这些现象在线性振动系统中是不会发生的。

3) 次谐波振动和超谐波振动

一个线性的机械系统,在简谐激振力 $F\sin\omega t$ 的作用下,它的受迫振动仅包含频率为 ω 的谐波响应。当激振力频率 ω 接近系统固有频率 ω_n 时,系统只出现与干扰力频率相同的共振。但对于非线性机械系统而言,情况就不同,在简谐力 $F\sin\omega t$ 作用下,系统的受迫振动不仅包含频率为 ω 的谐波响应,还会有频率为 $\frac{\omega}{n}$ 的次谐波响应和频率为 $n\omega$ 的超谐波响应 (n 为正整数)。系统中究竟会发生哪些次谐波振动和超谐波振动,要视具体条件而定。由于次谐波和超谐波振动的存在,非线性系统中除了会发生激振频率 ω 接近于系统固有频率 ω_n 的谐波共振外,还会发生 $n\omega$ 的超谐波共振或 $\frac{\omega}{n}$ 的次谐波共振。因此,非线性系统的响应频率数目超过了系统的自由度数,较之线性系统有更多的发生共振的可能性。

4) 组合频率振动

非线性系统受到两个以上频率简谐力激振时,会产生组合频率的受迫振动。设系统受到两个简谐干扰力 $F_1\sin\omega_1 t$ 和 $F_2\sin\omega_2 t$ 的作用,则系统不仅可能有频率为 $\omega_1, \omega_2, n\omega_1, n\omega_2$, 以及 $\frac{\omega_1}{n}, \frac{\omega_2}{n}$ 的受迫振动响应,还会出现频率为 $n\omega_1 \pm m\omega_2$ 组合频率振动,其中 m 和 n 为正整数。

5) 叠加原理不适用

线性系统中可用叠加原理处理问题,即系统在多个激振力作用下的响应可认为是各个激振力单独作用下系统响应的叠加。

由非线性系统的组合频率振动现象可知,对于非线性系统而言,叠加原理已不再适用。求非线性系统的全解不能像求线性系统的全解那样,由求得的各个特解叠加而成。系统对多个激振的响应并不是简单地对每个激振响应的叠加,而是对这些激振的综合响应。这种情况使得寻求非线性系统的全解变得十分复杂。

6) 有多个平衡位置

一般地说,线性系统仅有一个平衡位置,而非线性系统可以有多个平衡位置。

7) 具有负刚度和负阻尼

在线性系统中,刚度和阻尼都是正的,但是在非线性系统中可以存在负刚度和负阻尼的情况。

2.5.2 非线性振动的分析方法

分析非线性振动常用的方法,大致可分为定性法和定量法两种。定性法是研究方程解的存在性、唯一性及解的周期性和稳定性等。定量法是通过解析方法或数值计算方法,求得系统运动的定量结果。到目前为止,还没有一个能求解各种非线性微分方程的普遍方法,除了极少数非线性振动问题可以求得精确解外,大多数问题只能根据问题本身的特点,采用各种近似的方法求解。

求近似解的解析方法有:等效线性化法、小参数法、多尺度法、渐进法、平均法等。

数值方法有:迭代法、变分法、有限元法、数值积分法等。

上述各种方法详细可参看有关非线性振动专门著作。

下面简要介绍几种常用的方法。

1) 小参数法

小参数法又称摄动法,它适用于求弱非线性系统的周期解,即用于求下列形式运动微分方程的周期解

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon \cdot f(x, \dot{x}, t) \quad (2-91)$$

式中: $f(x, \dot{x}, t)$ —— x, \dot{x}, t 的非线性函数, ϵ 为小参数。

用 ϵ 的幂函数形式求这一方程的周期解,将解和频率展开为级数

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots \\ \omega &= \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \cdots \end{aligned} \quad (2-92)$$

将该式代入式(2-91)使方程两端小参数 ϵ 的同次幂的系数相等,可以求得一组线性微分方程,利用初始条件,依次解各个线性微分方程,可得出待定函数 $x_0, x_1, x_2, \dots; \omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$ 再代回式(2-92),就得到非线性微分方程的解和频率的近似值。一般级数解取到 ϵ^n 为止时,称为第 n 次近似解。

【例 2-9】 求微分方程 $\ddot{x} + x = \epsilon(1 - x^2)\dot{x}$ 的二次近似周期解, ϵ 为小参数,远小于 1。

解: 将解和频率展开 ϵ 的幂级数,取到 ϵ^2 为止

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 \quad \omega = \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 \quad (a)$$

$$\text{显然,} \quad \omega_0 = 1 = \omega - \epsilon \omega_1 - \epsilon^2 \omega_2 \quad (b)$$

将(a)式代入微分,可得

$$\begin{aligned} &(\ddot{x}_0 + \epsilon \ddot{x}_1 + \epsilon^2 \ddot{x}_2) + (\omega - \epsilon \omega_1 - \epsilon^2 \omega_2)^2 (x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2) \\ &= \epsilon [1 - (x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2)^2] (\dot{x}_0 + \epsilon \dot{x}_1 + \epsilon^2 \dot{x}_2) \end{aligned}$$

从上式中略去 ϵ^2 以上的项,根据等式两边 ϵ 同次幂系数应相等的原则,可得以下微分方程

$$\epsilon^0: \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0$$

$$\epsilon^1: \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = (1 - x_0^2) \dot{x}_0 + 2\omega \omega_1 x_0$$

$$\epsilon^2: \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = (1 - x_0^2) \dot{x}_1 + 2\omega \omega_1 x_1 + 2\omega \omega_1 x_1 \dot{x}_0$$

设初始条件为 $t=0$ 时, $x(0)=A, \dot{x}(0)=0$, 则有

$$x_0(0) = A, x_1(0) = 0, x_2(0) = 0; \dot{x}_0(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0$$

现依次求各线性微分方程,先解方程 $\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0$ 代入初始条件得方程解为

$$x_0 = A \cos \omega t \quad (c)$$

再解方程 $\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = (1 - x_0^2)\dot{x}_0 + 2\alpha\omega_1 x_0$, 将(b)式代入,经三角函数变换,可得

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = A\omega[(A^2 - 1) - 0.75A^2]\sin \omega t + 2\alpha\omega_1 A \cos \omega t + 0.25A^2\omega \sin 3\omega t$$

由于求的是周期解, $\sin \omega t$, $\cos \omega t$ 前的系数应为零,因而得到

$$A = 2, \omega_1 = 0 \quad (d)$$

原方程简化为

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \omega \sin 3\omega t$$

代入初始条件后 该方程的解为

$$x_1 = \frac{1}{4\omega}(3\sin \omega t - \sin 3\omega t) \quad (e)$$

最后解方程 $\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = (1 - x_0^2)\dot{x}_1 + 2\alpha\omega_1 x_1 + 2\alpha\omega_1 x_1 \dot{x}_0$

将(c)、(d)、(e)代入上式,并经过三角函数运算,可得

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = (0.25 + 4\alpha\omega_2)\cos \omega t - 1.5\cos 3\omega t + 1.25\cos 5\omega t$$

利用周期解的条件, $\cos \omega t$ 的系数应等于零,由此得

$$\omega_2 = -0.0625\omega^{-1} \quad (f)$$

原方程简化为 $\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = -1.5\cos 3\omega t + 1.25\cos 5\omega t$

代入初始条件后的解为

$$x_2 = -\frac{13}{96\omega^2}\cos \omega t - \frac{3}{16\omega^2}\cos 3\omega t + \frac{5}{96\omega^2}\cos 5\omega t \quad (g)$$

所以,方程的二次近似解为

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon x_2 \\ &= 2\cos \omega t + \frac{\epsilon}{4\omega}(3\sin \omega t - \sin 3\omega t) - \frac{\epsilon^2}{96\omega^2}(13\cos \omega t + 18\cos 3\omega t - 5\cos 5\omega t) \\ \omega &= \omega_0 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 = 1 - 0.0625\omega^{-1} \end{aligned}$$

2) 数值积分法

非线性系统动力计算普遍适用的有效方法是逐步积分法。此法将计算时间划分为许多微小相等的时间段 Δt 。因 Δt 很小,可以认为在每一 Δt 内,加速度 $x(t)$ 和载荷 $F(t)$ 的变化是线性的,阻尼系数 c 和劲度系数 k 为常量,这样可在每一 Δt 内按线性系统计算其响应。这样就把一个非线性系统的动力计算简化为一系列逐步变化的线性系统动力计算。

逐步积分法和解析方法相比,它的特点是不要求系统的自振频率,直接计算系统各个时段的响应。它也不受荷载的复杂性和系统是否非线性的影响。

(1) 增量运动方程式。已知系统的弹簧力 F_s 、阻尼力 F_d 和载荷 $F(t)$ 的变化规律如图 2-45(a)、(b)、(c)所示。系统质量 m 为常数,则惯性力 F_i 为线性,系统在 t 与 $t + \Delta t$ 时刻的运动方程分别为

$$\Delta F_i(t) + \Delta F_d(t) + \Delta F_s(t) + \Delta F(t) = 0 \quad (2-93)$$

式中各增量

$$\Delta F_i(t) = F_i(t + \Delta t) - F_i(t) = -m\ddot{x}(t + \Delta t) + m\ddot{x}(t) = -m\ddot{x}(t)$$

$$\Delta F_s(t) = F_s(t + \Delta t) - F_s(t) = -k(t + \Delta t)x(t + \Delta t) + k(t)x(t)$$

$$\Delta F_d(t) = F_d(t + \Delta t) - F_d(t) = -c(t + \Delta t)\dot{x}(t + \Delta t) + c(t)\dot{x}(t)$$

$$\Delta F(t) = F(t + \Delta t) - F(t)$$

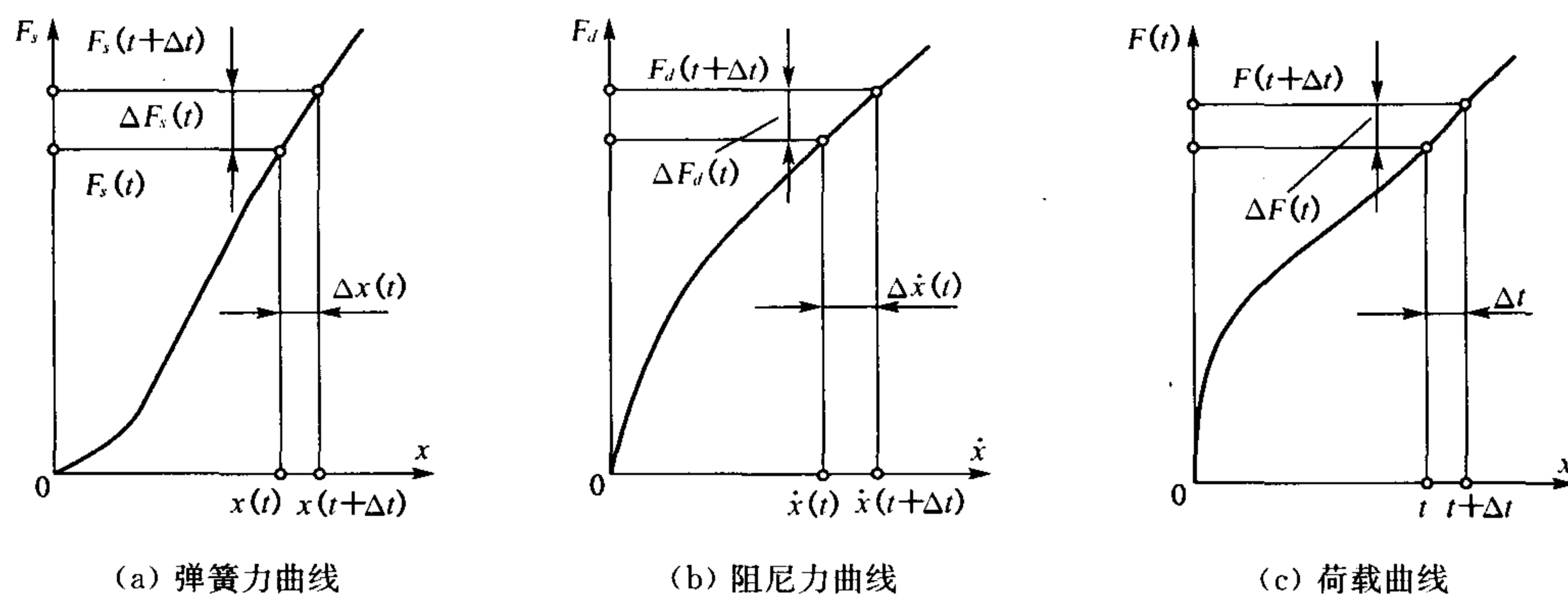


图 2-45 弹簧力、阻尼力和荷载曲线

其中, 载荷增量 $\Delta F(t)$ 由给出的荷载确定, 其余 3 个力的增量都和运动情况有关。

假设在 Δt 时段内, k 和 c 均为常数, 且等于该时段开始时的 k 和 c , 即在图 2-45(a)、(b) 中分别取 $k(t) \approx \left(\frac{dF_s}{dx}\right)_t$, $c(t) \approx \left(\frac{dF_d}{d\dot{x}}\right)_t$ 则该时段弹簧力 F_s 、阻尼力 F_d 分别为

$$\Delta F_s(t) \approx -k(t)\Delta x(t), \Delta F_d(t) \approx -c(t)\Delta \dot{x}(t)$$

式(2-93)增量型运动方程可改为

$$m\Delta \ddot{x}(t) + c(t)\Delta \dot{x}(t) + k(t)\Delta x(t) = \Delta F(t) \quad (2-94)$$

式中: $\Delta x(t)$, $\Delta \dot{x}(t)$, $\Delta \ddot{x}(t)$ 分别为时段 Δt 的位移增量、速度增量和加速度增量。

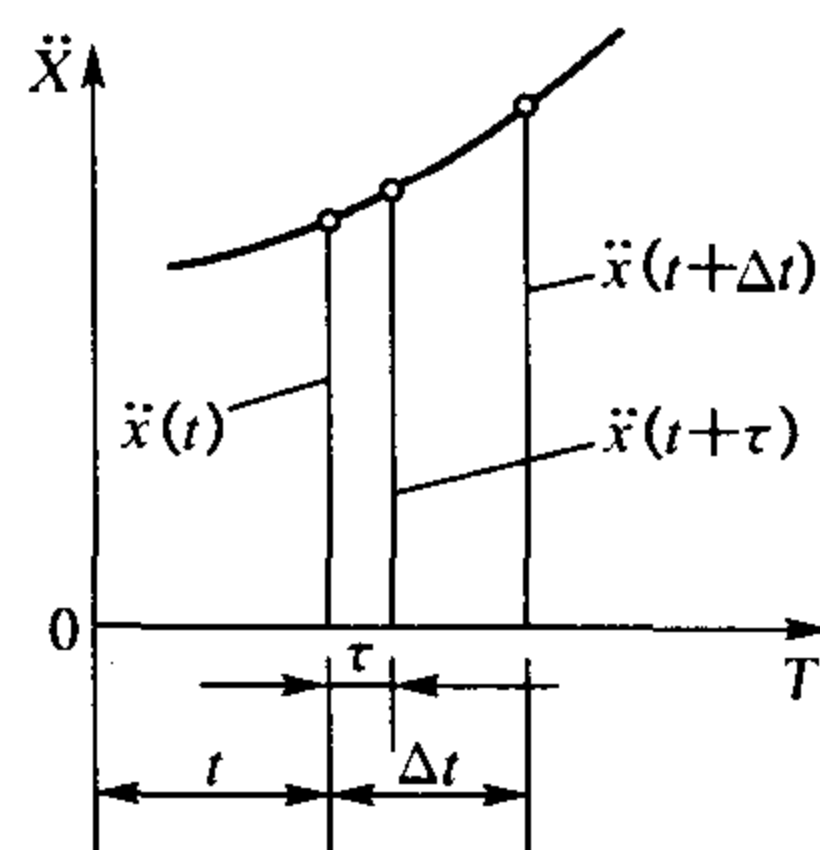
(2) 逐步积分。设在每个时段 Δt 内, 加速度呈直线变化, 如图 2-46 所示, 即

$$\ddot{x}(t+\tau) = \ddot{x}(t) + \frac{\ddot{x}(t+\Delta t) - \ddot{x}(t)}{\Delta t} \tau$$

对 τ 积分, 到 $t+\tau$ 时刻的速度和位移分别为

$$\dot{x}(t+\tau) = \ddot{x}(t)\tau + \frac{\ddot{x}(t+\Delta t) - \ddot{x}(t)}{\Delta t} \frac{\tau^2}{2} + C$$

$$x(t+\tau) = \ddot{x}(t) \frac{\tau^2}{2} + \frac{\ddot{x}(t+\Delta t) - \ddot{x}(t)}{\Delta t} \frac{\tau^3}{6} + C\tau + D$$

图 2-46 Δt 内加速度线性变化

用 $\tau=0$ 时刻的条件可以求得积分常数, $C = \dot{x}(t)$, $D = x(t)$, 将此 C 、 D 代回, 并令 $\tau = \Delta t$, 则得 $t+\Delta t$ 时刻的速度和位移

$$\dot{x}(t+\Delta t) = \dot{x}(t) + \frac{\ddot{x}(t) + \ddot{x}(t+\Delta t)}{2} \cdot \Delta t$$

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \dot{x}(t)\Delta t + \frac{2\ddot{x}(t) + \ddot{x}(t+\Delta t)}{6} \cdot \Delta t^2$$

由此得:

$$\text{速度增量} \quad \Delta \dot{x}(t) = \dot{x}(t+\Delta t) - \dot{x}(t) = \frac{\ddot{x}(t) + \ddot{x}(t+\Delta t)}{2} \cdot \Delta t$$

$$\text{位移增量} \quad \Delta x(t) = x(t+\Delta t) - x(t) = \dot{x}(t)\Delta t + \frac{2\ddot{x}(t) + \ddot{x}(t+\Delta t)}{6} \cdot \Delta t^2$$

应用 $\ddot{x}(t+\Delta t) = \ddot{x}(t) + \Delta \ddot{x}(t)$ 关系从上面两式中消去 $\ddot{x}(t+\Delta t)$ 得

$$\Delta \dot{x}(t) = \ddot{x}(t) \Delta t + \Delta \ddot{x}(t) \frac{\Delta t}{2} \quad (2-95)$$

$$\Delta x(t) = \dot{x}(t) \Delta t + \ddot{x}(t) \frac{\Delta t^2}{2} + \Delta \ddot{x}(t) \frac{\Delta t^2}{6}$$

将此式代入速度增量表达式,得

$$\Delta \dot{x}(t) = \frac{3}{\Delta t} \Delta x(t) - 3\dot{x}(t) - \frac{\Delta t}{2} \ddot{x}(t) \quad (2-96)$$

将式(2-47)、(2-48)代入运动方程式(2-46),可得

$$\tilde{k}(t) \Delta y(t) = \Delta \tilde{F}(t) \quad (2-97)$$

式中: $\tilde{k}(t)$ ——等效刚度。

$\Delta \tilde{F}(t)$ ——等效荷载增量。它们分别为

$$\tilde{k}(t) = k(t) + \frac{6}{\Delta t^3} m + \frac{3}{\Delta t} c(t) \quad (2-98)$$

$$\Delta \tilde{F}(t) = \Delta F(t) + m \left[\frac{6}{\Delta t} \dot{x}(t) + 3\ddot{x}(t) \right] + c(t) \left[3\dot{x}(t) + \frac{\Delta t}{2} \ddot{x}(t) \right] \quad (2-99)$$

(3) 计算步骤。进行某时段 Δt 计算时,要先知道前一时段末的速度和位移,对于第一个时段的计算,则需知初始条件 $x(0)$ 和 $\dot{x}(0)$ 。根据上面导出的公式可以逐个时段计算,步骤如下:

① 由已知的速度和位移及给定的系统非线性特性,找出本时段的刚度系数 $k(t)$ 和阻尼系数 $c(t)$,并求出弹簧力 $F_s(t) = -k(t)x(t)$ 和阻尼力 $F_d(t) = -c(t)\dot{x}(t)$ 。

② 由运动方程求初始加速度

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m} [F(t) + F_d(t) + F_s(t)]$$

③ 计算等效荷载增量 $\Delta \tilde{F}(t)$ 和等效劲度系数 $\tilde{k}(t)$ 。

④ 解出位移增量 $\Delta x(t)$ 和速度增量 $\Delta \dot{x}(t)$ 。

⑤ 最后求出本时段结束时刻的速度和位移

$$\dot{x}(t + \Delta t) = \dot{x}(t) + \Delta \dot{x}(t) \quad x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta x(t)$$

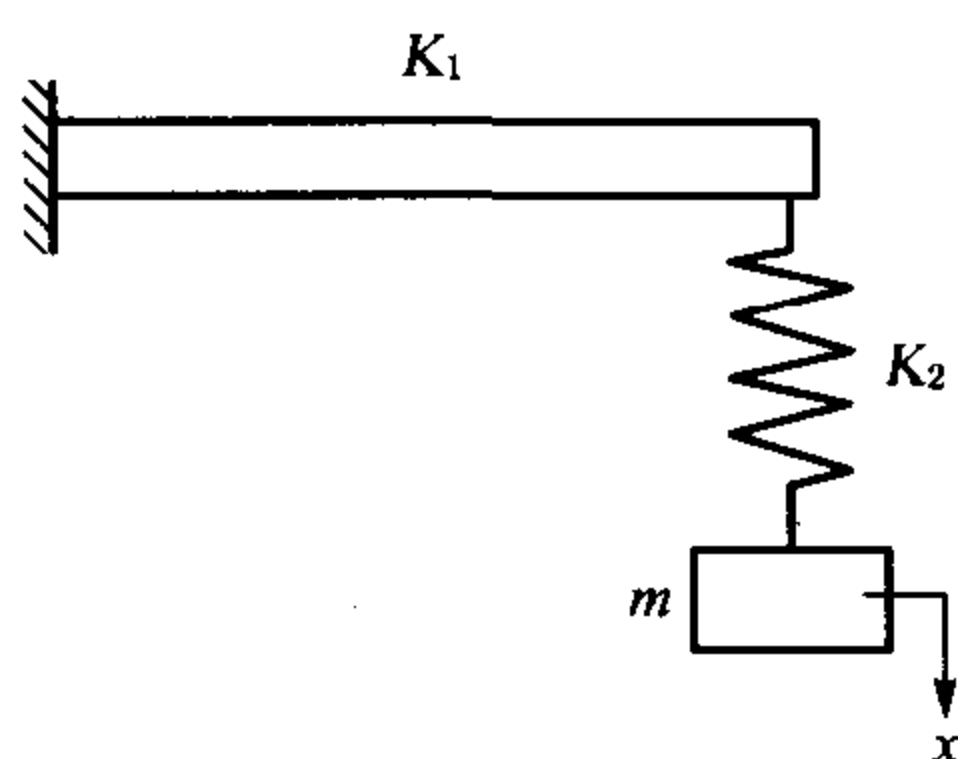
连续应用上述步骤,可以求出各个时段的位移、速度和加速度。

为了保证计算结果有一定的精确程度,往往要把时段分得很小,通常 Δt 要求小于系统自振周期的十分之一,即 $\frac{\Delta t}{T} < \frac{1}{10}$ 。因此,逐步积分法的计算工作量是比较大的,目前一般编制程序用计算机进行计算。

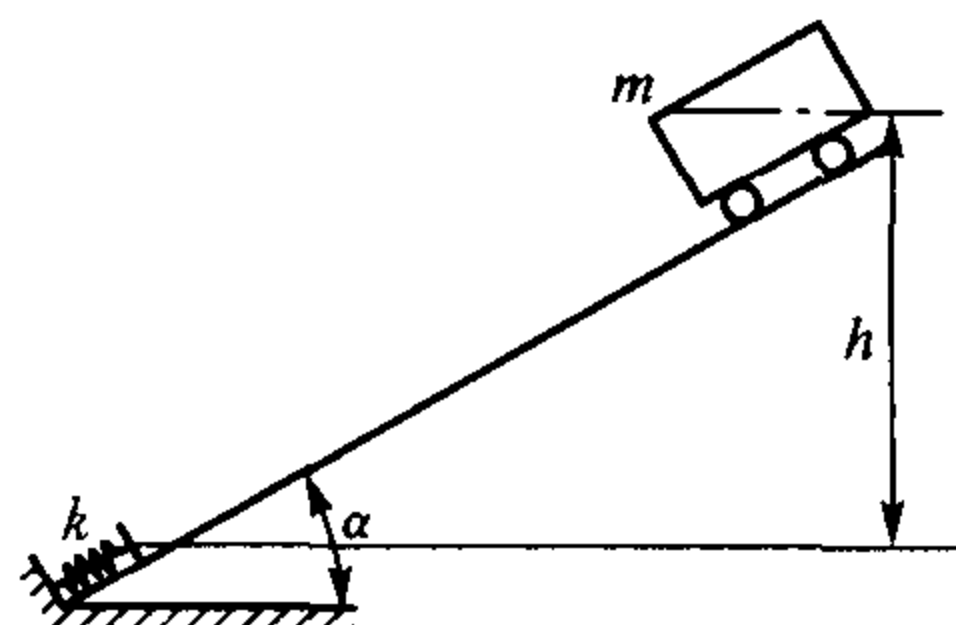
习题与思考题

- 2.1 当结构弹簧刚度增大或质量减小,则固有频率会发生什么变化?
- 2.2 有阻尼系统的自由振动与无阻尼时相比,有哪些变化?
- 2.3 单自由度系统强迫振动,当激振力频率约等于系统的固有频率时,激振与响应的相位角为多大? 主要由哪种响应力平衡激振力? 当激振力频率远高于系统的固有频率时或远低于固有频率时呢?

- 2.4 自由振动的初相位由哪些因素决定? 强迫振动的相位差由哪些因素决定?
- 2.5 强迫振动中, 振幅的大小与哪些因素有关?
- 2.6 何为主动隔振? 何为被动隔振? 为提高隔振器的隔振效果, 应怎样选取隔振器的弹簧刚度?
- 2.7 机械系统的动态特性可用激振力与响应的关系来表示, 激振力比响应叫什么?
- 2.8 周期信号与随机信号的频谱各有哪些主要特点?
- 2.9 什么叫转子临界转速? 发生临界转速时, 转子系统受到损伤的主要是哪个部位?
- 2.10 习题图 2-1 所示结构, 已知 $K_1=2K$, $K_2=K$, 求该结构的固有频率 f_n 。



习题图 2-1



习题图 2-2

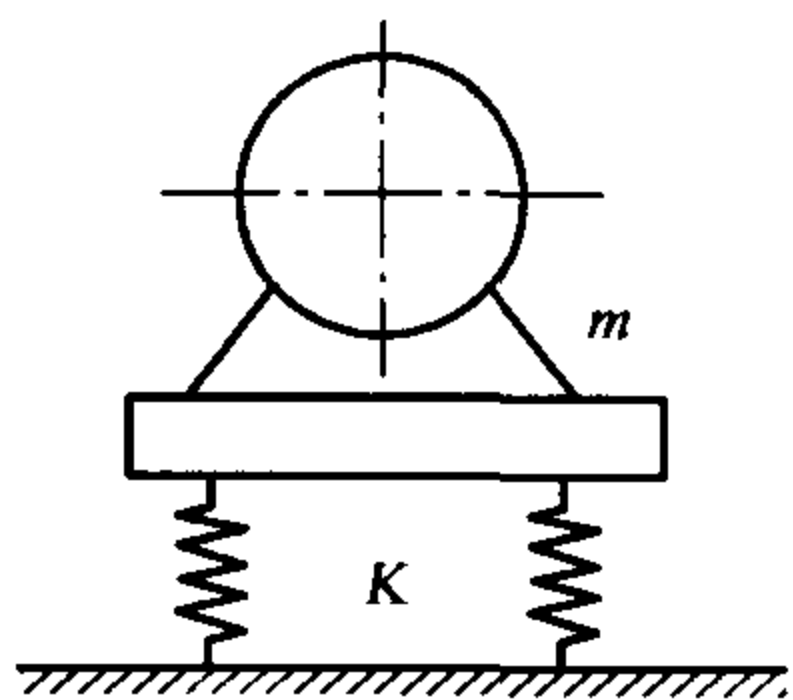
2.11 一质量为 m 的小车在斜面上自高 h 处滑下, 与缓冲器相撞后, 随同缓冲器弹簧一起作自由振动, 弹簧刚度为 k , 斜面倾角为 α , 小车与斜面之间的摩擦力忽略不计, 如习题图 2-2 所示。求小车的振动周期和振幅。

2.12 已知单自由度系统质量 $m=800\text{ kg}$, 弹簧刚度 $K=100\text{ kN/m}$, 阻尼比 $\xi=0.05$, $x_0=5\text{ cm}$, $\dot{x}=3\text{ cm/s}$ 。求: ① 系统的固有圆频率; ② 系统位移振动表达式。

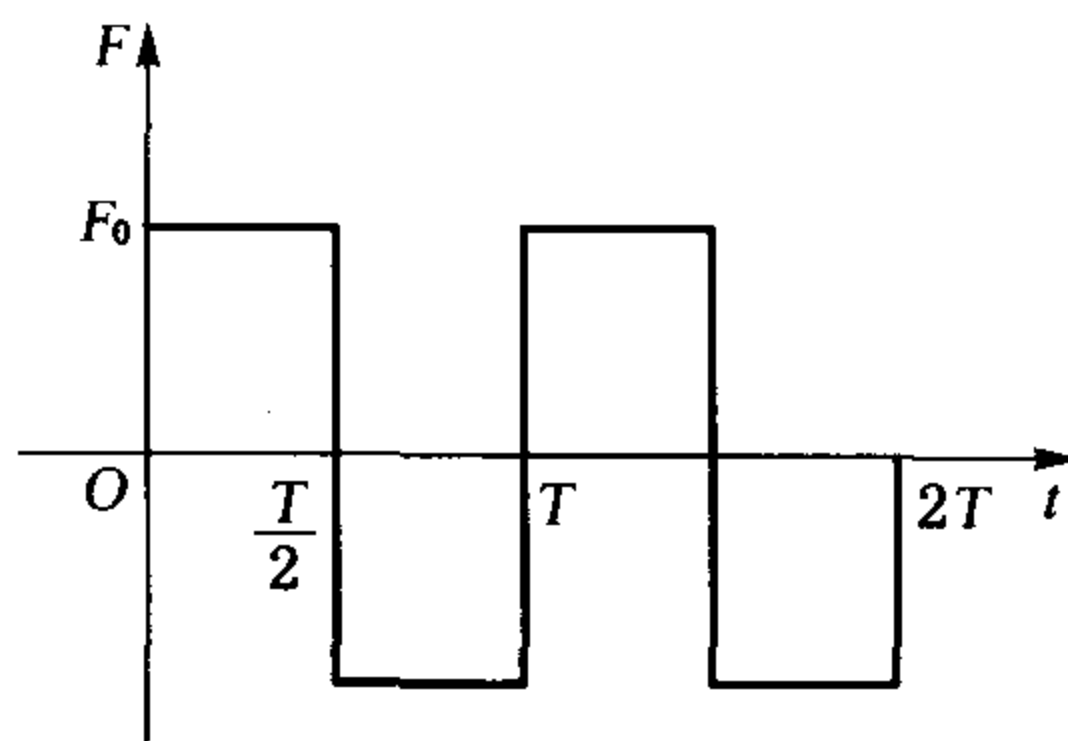
2.13 单自由度系统, 已知质量 $m=9.0\times 10^4\text{ kg}$, 使之产生侧移 3.05 cm 时突然释放, 经 $t=0.64\text{ s}$ 振动一周返回时测得最大侧移为 2.18 cm , 试求: ① 系统的阻尼比 ξ ; ② 系统的自振频率; ③ 系统的刚度 K ; ④ 写出振动位移方程式并写出 $t=1.2\text{ s}$ 时的振动位移。

2.14 一有阻尼弹簧质量系统, 其固有圆频率为 $f_n=4\text{ Hz}$, 弹簧刚度为 $k=3\text{ kg/cm}$ 黏性阻尼系数 $c=1.5\text{ kg}\cdot\text{s/cm}$ 。求在外力 $F=2\cos 3t\text{ kg}$ 作用下的稳态振动振幅和相位角。

2.15 习题图 2-3 所示精密仪器质量 $m=400\text{ kg}$, 用弹簧与地面相连, 现基础以 15 Hz 的频率作竖向简谐振动, 振幅为 1.5 cm , 为使仪器的振幅小于 0.25 cm , 试求弹簧的刚度, 不考虑阻尼。



习题图 2-3



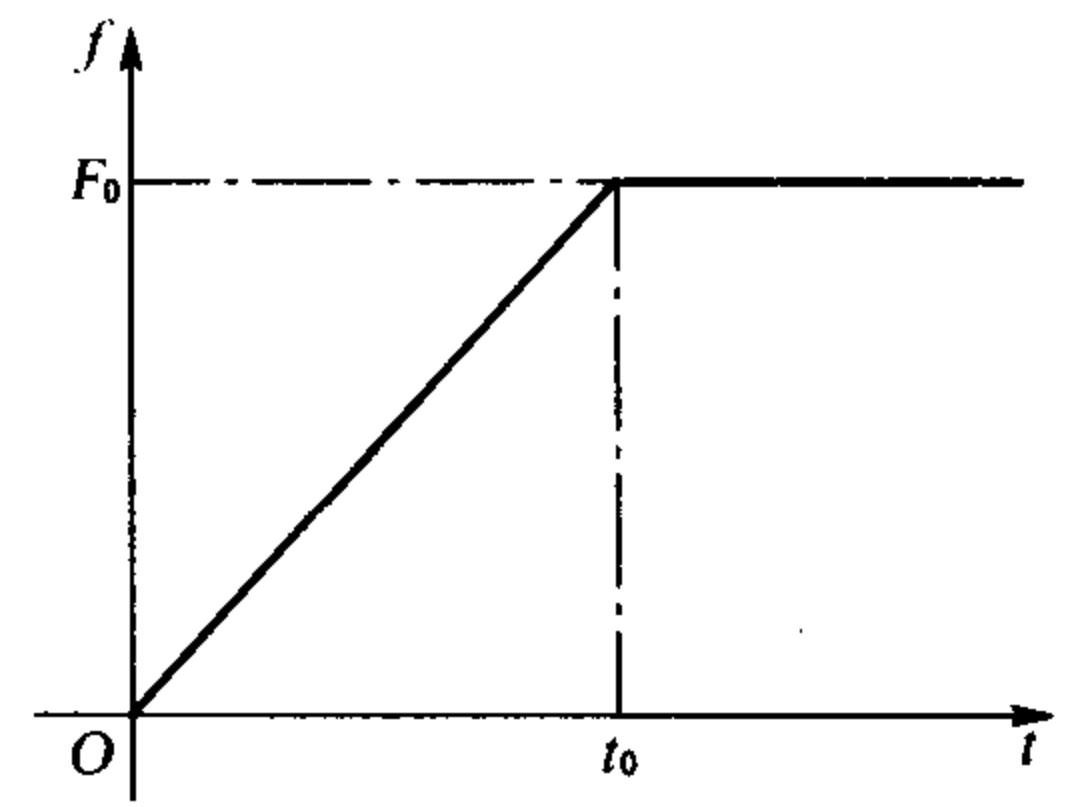
习题图 2-4

2.16 求单自由度系统在图 2-4 所示周期激振力作用下其稳态振动的响应, 不考虑

阻尼。

2.17 求单自由度系统在图 2-5 所示激振力作用下的响应,不考虑阻尼。

2.18 某汽轮机转速为 6 000 r/min,平衡精度应归属 G2.5,请计算其容许最大质量偏心距 e 为多少 μm 。



习题图 2-5

第3章 二自由度系统振动的理论与应用

3.1 二自由度系统振动的运动方程

较为复杂的机械系统,用单自由度的模型往往不能得到满意的结果,必须采用比较复杂的多自由度系统或无限多自由度系统的模型。多自由度系统的自由振动是由多种频率的简谐波组合成的复合运动。这种系统在强迫振动时,只要激振频率与固有频率之一接近,就可能产生共振。二自由度系统是最简单的多自由度系统,它是分析多自由度系统的基础。

二自由度系统需用两个独立坐标才能完全确定系统在空间的几何位置。图3-1是二自由度系统的几个例子,其中(a)为双质量弹簧系统,表示在一定条件下车辆的前部或后部, m_1 为车身, m_2 为车轿, k_1 为悬架刚度,而 k_2 是轮胎的刚度,两个独立坐标 x_1 和 x_2 可完全确定系统在空间的几何位置;(b)虽然是单质量弹簧系统,但是它既有在上下运动,还有在绕质心 c 的转动,因此需用 x 和 θ 两个独立坐标来描述;(c)是扭振系统,扭轴轴心在纸面内,其扭转刚度分别为 k_{t1} 和 k_{t2} ,圆盘 I_1 和 I_2 垂直于扭轴轴线,两圆盘绕扭轴线作扭转振动,用 θ 和 θ_2 来描述,因而它也是二自由度系统。

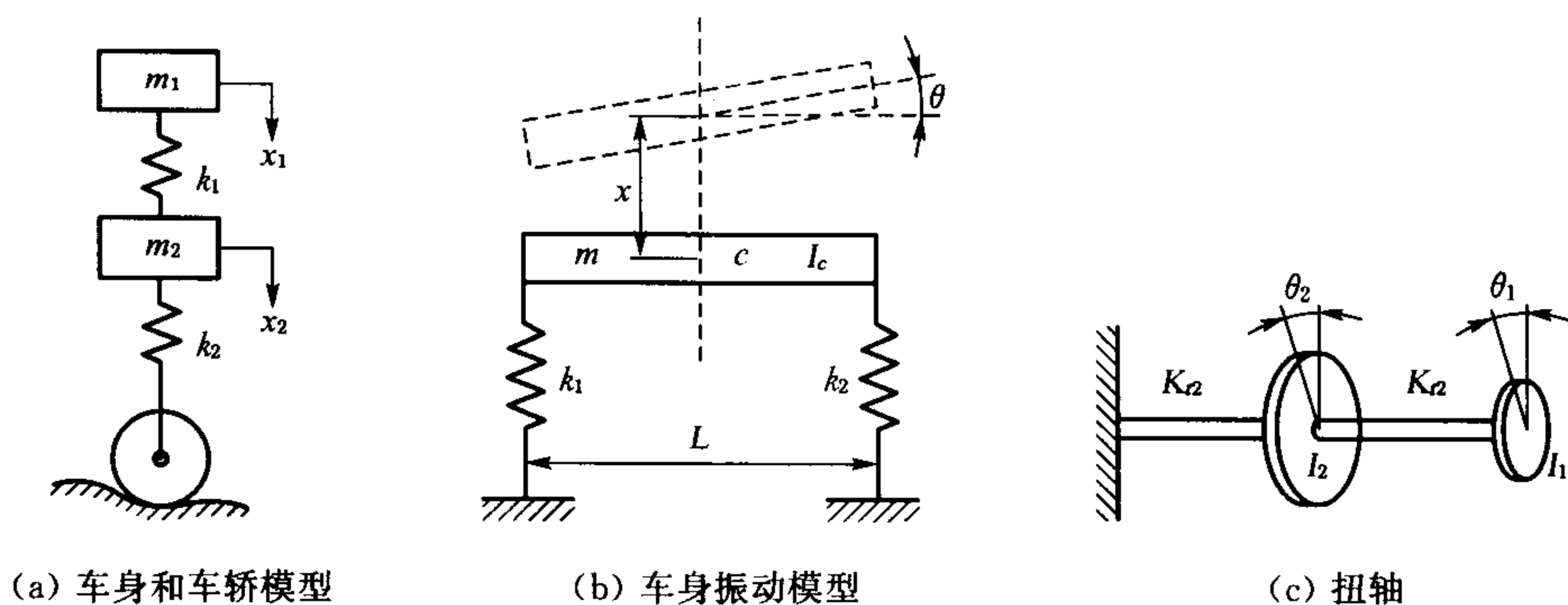


图3-1 二自由度系统示例

图3-2所示为有阻尼的双质量弹簧系统,质量 m_1 和 m_2 在水平方向用刚度分别为 k_1 和 k_2 的弹簧连接起来,阻尼器 c_1 和 c_2 如弹簧一样连接在两质量上, k_1 和 c_1 另一端与支承连接;随时间变化的激振力 $F_1(t)$ 和 $F_2(t)$ 分别作用在 m_1 和 m_2 上;两个质量块只限于沿水平光滑平面作往复直线运动。以静平衡位置坐标原点,两个独立坐标分别为 x_1 和 x_2 。对两质量块的振动过程中任一瞬时取分离体,并对每一质量块应用牛顿第二运动定律,可得如下两个方程

$$m_1 \ddot{x}_1 = F_1(t) - c_1 \dot{x}_1 - k_1 x_1 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = F_2(t) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_2(x_2 - x_1)$$

$$\text{经整理后得} \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2x_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_2x_1 + c_2x_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = F_2(t) \end{cases} \quad (3-1)$$

上述方程组(3-1)即是图 3-2 所示二自由度系统的振动微分方程组,组成方程组的两个微分方程都不是独立的,它们各自都包含着两个变量及其一、二阶导数,不能每个方程单独求解。

现将(3-1)式用矩阵形式表示为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \quad (3-2)$$

式中: $[M]$ ——系统的质量矩阵。

$[C]$ ——系统的阻尼矩阵。

$[K]$ ——系统的刚度矩阵。

$\{x\}$ ——系统的位移列阵。

$\{\dot{x}\}\{\ddot{x}\}$ ——位移的一、二阶导数列阵。

$\{F(t)\}$ ——系统的激振力列阵。

图 3-2 所示系统各矩阵具体形式如下

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad \{\dot{x}\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix},$$

$$\{\ddot{x}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}, \quad \{F(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix}$$

在弹性系统微幅振动中,刚度矩阵 $[K]$ 总是对称的,即永远存在 $K_{ij} = K_{ji}$ 。

对于同一系统,当采用不同的独立坐标来描述时,其 $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ 矩阵中的元素是不同的,但不影响系统的固有特性,系统的固有频率与坐标的选取无关,一定的系统其固有频率是一定的。

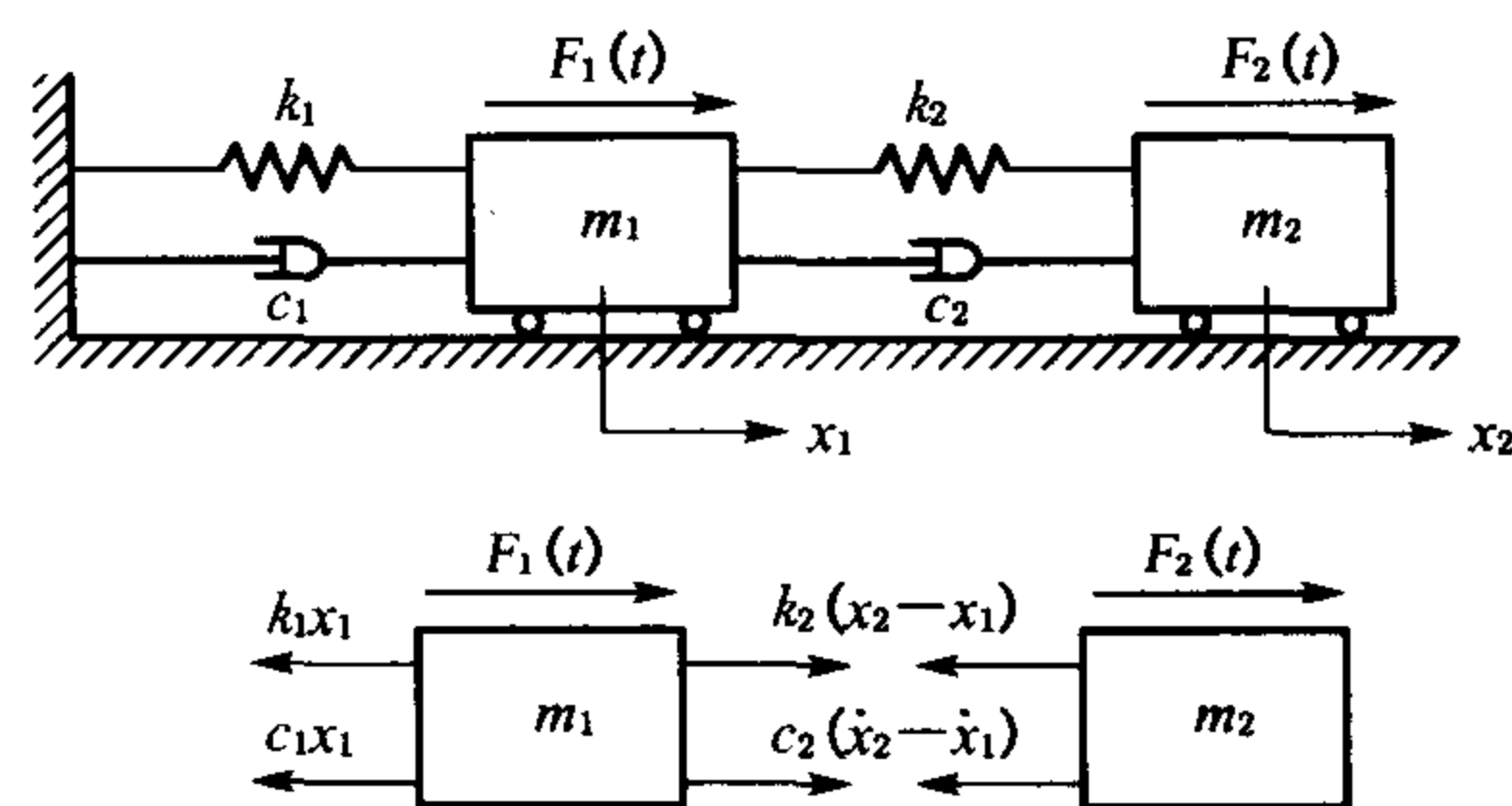


图 3-2 有阻尼双质量弹簧系统

3.2 无阻尼二自由度系统的振动

3.2.1 无阻尼二自由度系统的自由振动

研究自由振动的目的主要是求系统的固有频率。而系统的固有频率与系统的自由度数

是一致的,故二自由度系统有两个固有频率,研究二自由度系统的自由振动还有一个目的是求解系统的主振型,即系统的振动形式。

图 3-3 所示为无阻尼双质量弹簧系统自由振动的力学模型,取静平衡位置为坐标原点,用 x_1 和 x_2 两个独立坐标来描述系统的运动。对振动过程中任何一瞬时的 m_1 和 m_2 取分离体,应用牛顿运动定律,可得其运动方程为其用具体的矩阵形式表示的微分方程为

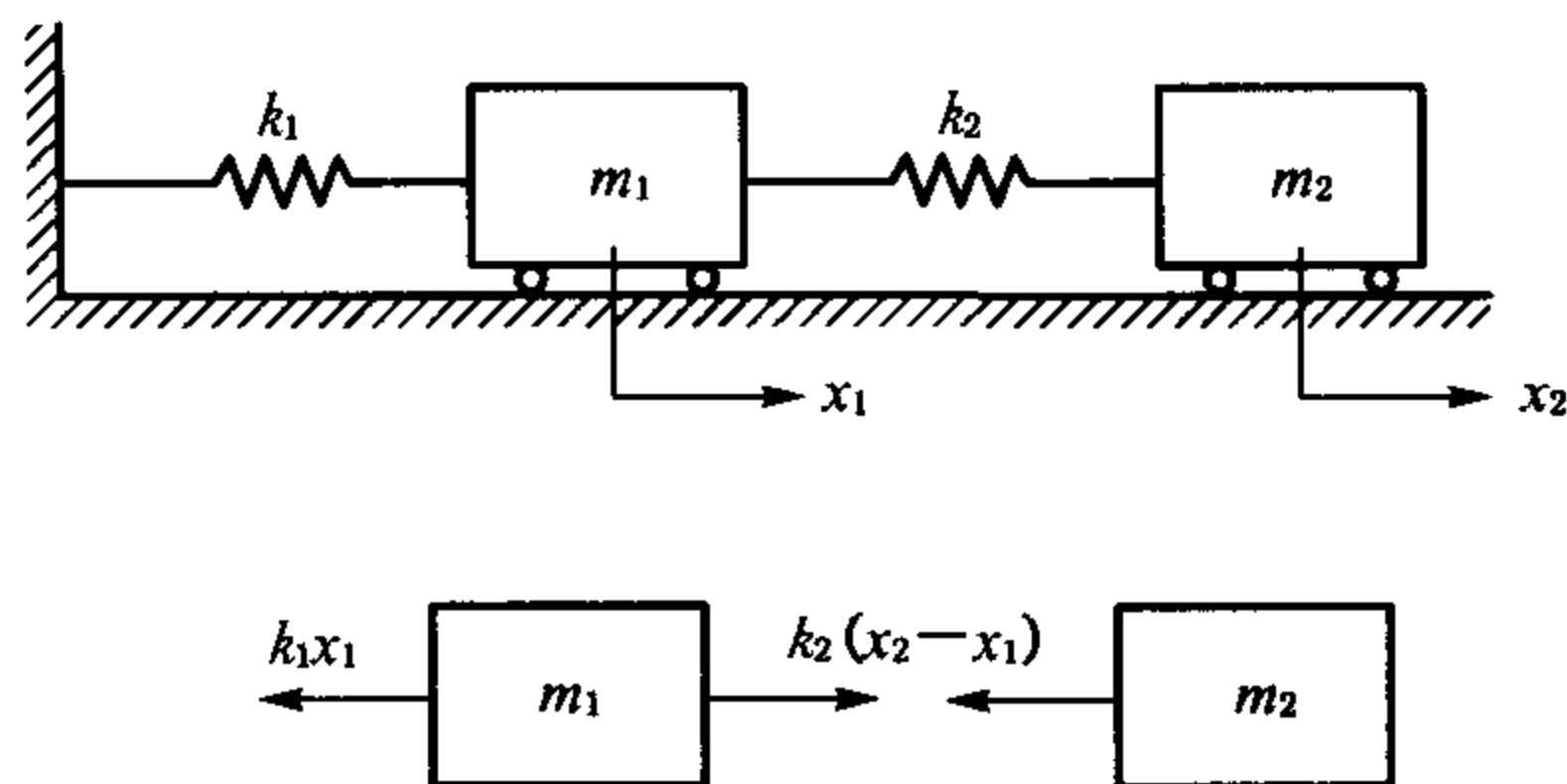


图 3-3 无阻尼双质量弹簧系统

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-3)$$

方程组(3-3)为二阶常系数线性齐次微分方程组,设其一组解为

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_n t + \varphi) \quad (a)$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega_n t + \varphi) \quad (b)$$

式(a)和式(b)意味着两个质量块均服从具有相同频率 ω_n 和相同相角 φ 的同步谐振,式中 A_1 和 A_2 分别为质量 m_1 和 m_2 的振幅,现将所设解(a)式(b)式及其二阶导数代入方程(3-3),并消去 $\sin(\omega_n t + \varphi)$ 可得

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} - \omega_n^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-4)$$

或写成更一般的形式

$$([K] - \omega_n^2 [M]) \{A\} = \{0\} \quad (3-5)$$

式中: $\{A\}$ ——振幅列阵。

将(3-5)式写成展开形式

$$\begin{bmatrix} k_{11} - m_1 \omega_n^2 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - m_2 \omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-6)$$

振幅向量不能全等于零,则(3-6)式成立的条件振幅向量列阵的系数矩阵行列式应等于零,即

$$\begin{vmatrix} k_{11} - m_1 \omega_n^2 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - m_2 \omega_n^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3-7)$$

方程(3-7)称为特征方程。展开此行列式得

$$\begin{aligned} (k_{11} - m_1 \omega_n^2)(k_{22} - m_2 \omega_n^2) - k_{12}^2 &= 0 \\ m_1 m_2 (\omega_n^2)^2 - (m_1 k_{22} + m_2 k_{11}) \omega_n^2 + k_{11} k_{22} - k_{12}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (c)$$

这个特征方程为 ω_n^2 的二次方程。其根称为系统的特征值,即系统的固有频率的平方。应用代数中的二次公式求解方程(c),得

$$\omega_{n1,2}^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3-8)$$

式中: $a = m_1 m_2$, $b = -(m_1 k_{22} + m_2 k_{11})$, $c = k_{11} k_{22} - k_{12}^2 = |K|$

就其物理性质而言, $\omega_{n1}^2, \omega_{n2}^2$ 必定是正的,另外 $b^2 - 4ac$ 的展开式总是正的,故 ω_{n1}^2 和 ω_{n2}^2

是两个实数根。现规定:若 $\omega_{n1} < \omega_{n2}$, ω_{n1} 称为第一阶固有频率,也称基频; ω_{n2} 称为第二阶固有频率。显然,二自由度系统共有两个固有频率,且固有频率同样取决于系统本身的物理性质($m_i, K_i, i = 1, 2$)。

如果行列式 $|K|$ 不是负的,必然 $0 < \sqrt{b^2 - 4ac} < b$, 将 ω_{n1}^2 和 ω_{n2}^2 代入(3-6)式,可知:不能求得振幅 A_1 和 A_2 确定值,但可得对应于 ω_{n1}^2 和 ω_{n2}^2 的两个振幅的比值,称为振幅比。振幅比决定了振动的振型。振幅比的表达式如下:

$$r_1 = \frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}} = \frac{-k_{12}}{k_{11} - \omega_{n1}^2 m_1} = \frac{k_{22} - \omega_{n1}^2 m_2}{-k_{21}} \quad (3-9a)$$

$$r_2 = \frac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}} = \frac{-k_{12}}{k_{11} - \omega_{n2}^2 m_1} = \frac{k_{22} - \omega_{n2}^2 m_2}{-k_{21}} \quad (3-9b)$$

式中 $A_1^{(1)}$ 是 m_1 的运动中由 ω_{n1} 这个简谐运动产生的振幅; $A_2^{(1)}$ 是 m_2 的运动中由 ω_{n1} 产生的振幅;同样 $A_1^{(2)}$ 和 $A_2^{(2)}$ 是分别在 m_1 和 m_2 的运动中由 ω_{n2} 这个简谐运动产生的振幅。 r_1 称为第一振型或称第一主振型, r_2 称为第二振型或第二主振型。系统的固有圆频率由式(3-8)按 $\omega_{n1} \ll \omega_{n2}$ 的方式给出, ω_{n1} 为第一振型的圆频率, ω_{n2} 为第二振型的圆频率。

【例 3-1】 求图 3-3 所示系统的固有圆频率和振型。设系统的 $m_1 = m_2 = m, k_1 = k_2 = k$ 。

解:由方程(3-3)得其运动方程为

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

即 $k_{11} = 2k, k_{12} = k_{21} = -k, k_{22} = k, a = m^2, b = -3mk, c = k^2$

应用式(3-8)可求得

$$\omega_{n1}^2 = \frac{3mk - \sqrt{9m^2k^2 - 4m^2k^2}}{2m^2} = 0.382 \frac{k}{m}$$

$$\omega_{n2}^2 = \frac{3mk + \sqrt{9m^2k^2 - 4m^2k^2}}{2m^2} = 2.618 \frac{k}{m}$$

将 ω_{n1}^2 和 ω_{n2}^2 分别代入(3-9a)式和(3-9b)式,即得一、二阶振型

$$\text{第一振型} \quad r_1 = \frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0.618$$

$$\text{第二振型} \quad r_2 = \frac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}} = \frac{2}{1 - \sqrt{5}} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = -0.618$$

图 3-4(a)表示两个质量按 ω_{n1} 振动的振型图,两个质量块同向运动;图 3-4(b)表示两个质量按 ω_{n2} 振动的振型图,两个质量按反向运动。上述两种振型中的振幅,都是以第二个质量的运动为参照。

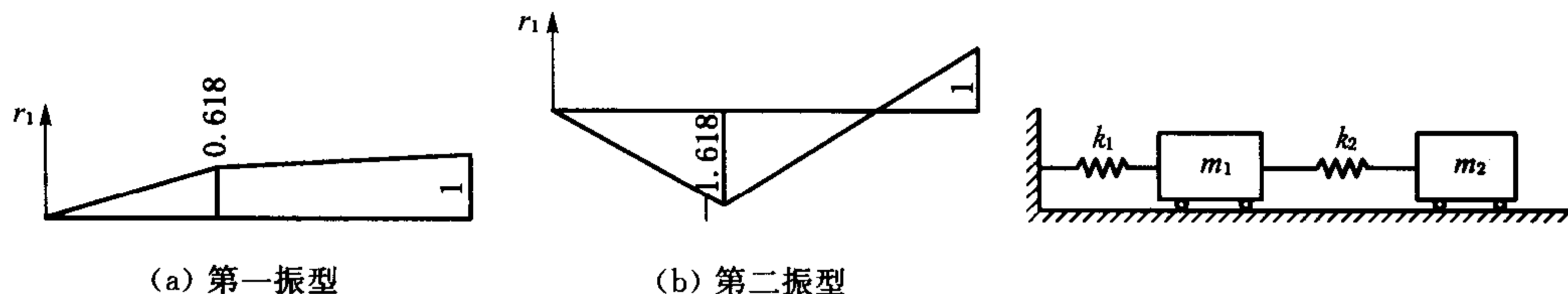


图 3-4 无阻尼二自由度系统

从振型图中可见,系统具有两种可能的同步运动,每一同步运动对应一个固有频率,系统在一般情况下的运动则是两种同步运动的叠加,即

$$\begin{cases} x_1 = A_1^{(1)} \sin(\omega_{n1}t + \varphi_1) + A_1^{(2)} \sin(\omega_{n2}t + \varphi_2) \\ x_2 = A_2^{(1)} \sin(\omega_{n1}t + \varphi_1) + A_2^{(2)} \sin(\omega_{n2}t + \varphi_2) \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x_1 = r_1 A_2^{(1)} \sin(\omega_{n1}t + \varphi_1) + r_2 A_2^{(2)} \sin(\omega_{n2}t + \varphi_2) \\ x_2 = A_2^{(1)} \sin(\omega_{n1}t + \varphi_1) + A_2^{(2)} \sin(\omega_{n2}t + \varphi_2) \end{cases}$$

或写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2^{(1)} \sin(\omega_{n1}t + \varphi_1) \\ A_2^{(2)} \sin(\omega_{n2}t + \varphi_2) \end{Bmatrix} \quad (3-10)$$

式中: $\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ——称为振型矩阵,展开(3-10)式,得

$$\begin{cases} x_1 = r_1(c_1 \cos \omega_{n1}t + c_2 \sin \omega_{n1}t) + r_2(c_3 \cos \omega_{n2}t + c_4 \sin \omega_{n2}t) \\ x_2 = c_1 \cos \omega_{n1}t + c_2 \sin \omega_{n1}t + c_3 \cos \omega_{n2}t + c_4 \sin \omega_{n2}t \end{cases} \quad (3-11)$$

式(3-11)中 c_1, c_2, c_3 及 c_4 4个常量,决定于两个坐标的初始位移和初始速度。设 $t = 0$ 时, $x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, \dot{x}_1 = \dot{x}_{10}, \dot{x}_2 = \dot{x}_{20}$, 则从(3-11)式可求得

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{x_{10} - r_2 x_{20}}{r_1 - r_2}, c_2 = \frac{\dot{x}_{10} - r_2 \dot{x}_{20}}{\omega_{n1}(r_1 - r_2)} \\ c_3 &= \frac{r_1 x_{20} - x_{10}}{r_1 - r_2}, c_4 = \frac{r_1 \dot{x}_{20} - \dot{x}_{10}}{\omega_{n2}(r_1 - r_2)} \end{aligned} \quad (3-12)$$

将 c_1, c_2, c_3 及 c_4 代入(3-11)式中,即得双质量弹簧系统在上述初始干扰下的响应。

归纳起来,固有振型按(a)式和(b)式的形式假设,可使齐次微分方程(3-3)变换为一个代数方程组(3-5),令振幅系数矩阵的行列式等于零,就可得到特征方程并求出固有频率与振型,最后利用初始条件求出4个常数,则系统的总响应就确定了。

【例3-2】 设例3-1系统的初始条件为 $t = 0, x_{10} = x_{20} = 1, \dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$, 求该系统在初始条件下的响应。

解:已求得该系统的固有频率为

$$\omega_{n1}^2 = 0.382 \frac{k}{m}, \omega_{n2}^2 = 2.618 \frac{k}{m}$$

一、二阶振型分别为

$$r_1 = 0.618, r_2 = -1.618$$

由(3-12)求得

$$c_1 = 1.171, c_2 = 0, c_3 = -0.171, c_4 = 0$$

将求得的常数代入(3-11)式,得系统的响应为

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 c_1 \cos \omega_{n1}t + r_2 c_3 \cos \omega_{n2}t = 0.724 \cos \omega_{n1}t + 0.277 \cos \omega_{n2}t \\ x_2 &= c_1 \cos \omega_{n1}t + c_3 \cos \omega_{n2}t = 1.171 \cos \omega_{n1}t - 0.171 \cos \omega_{n2}t \end{aligned}$$

在此情况下,系统的响应只有余弦项,如果初始位移为零,而初始速度为非零,则在响应中只出现正弦项,这和单自由度系统的响应是一致的,在这里两个频率对响应都有贡献。如果初始位移之比恰与第一振型之振幅比相等($\frac{x_{10}}{x_{20}} = r_1$), 且 $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$, 则其

响应为

$$x_1 = x_{10} \cos \omega_{n1} t, \quad x_2 = x_{20} \cos \omega_{n1} t$$

系统的响应由纯第一振型组成,即只有第一固有频率对响应有贡献。

3.2.2 与自由振动有关的几种现象

现讨论图 3-5 所示用弹簧连接的一对单摆。对于这个系统的自由振动,其运动方程用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} mL^2 & 0 \\ 0 & mL^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} kh^2 + mgL & -kh^2 \\ -kh^2 & kh^2 + mgL \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-13)$$

质量矩阵中各项为: $m_1 = m_2 = mL^2$, 刚度矩阵包括重力影响系数的各项为: $K_{11} = K_{22} = kh^2 + mgL$, $K_{12} = K_{21} = -kh^2$ 将上述各项代入(3-8)式,求得固有频率为

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \omega_{n2} = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2kh^2}{mL^2}}$$

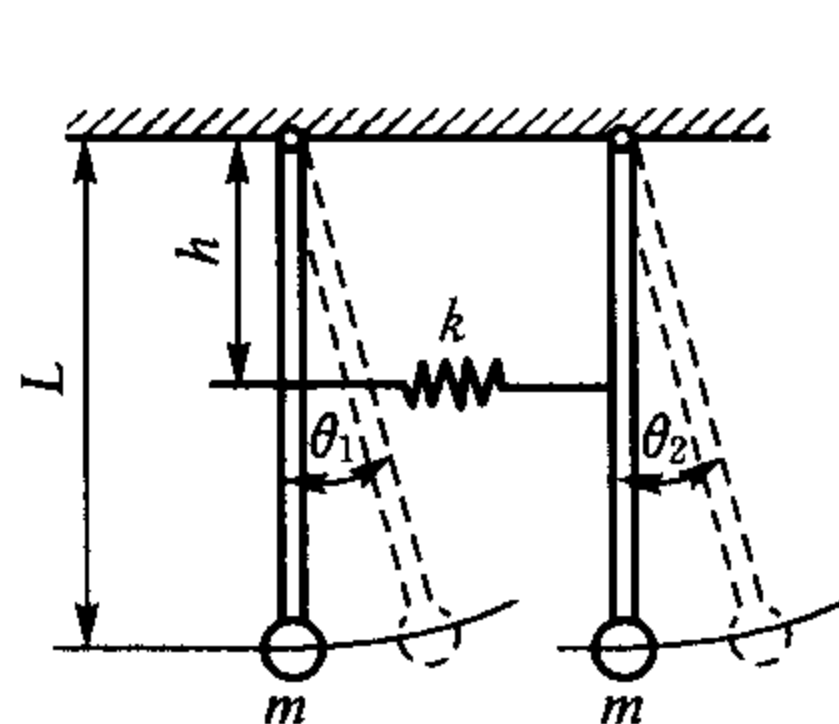
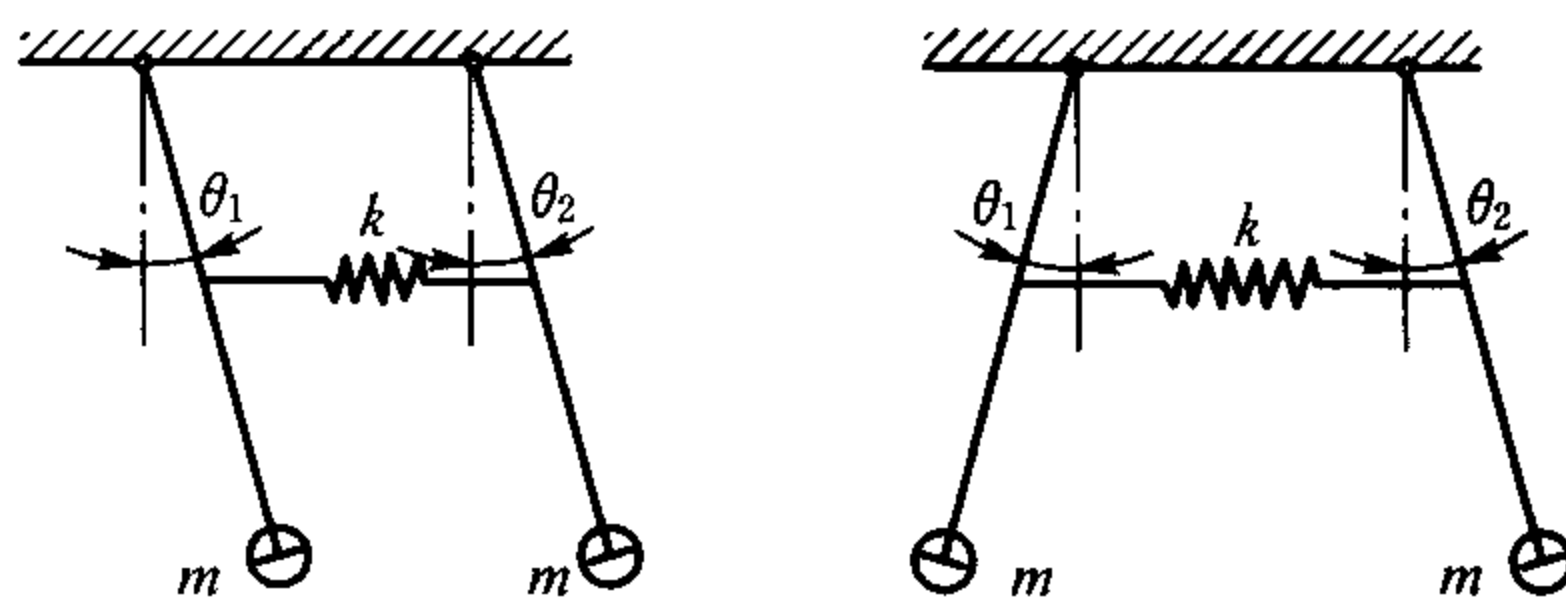


图 3-5 弹簧连接的一对单摆



(a) 第一主振型

(b) 第二主振型

图 3-6 弹簧连接的单摆振型图

从(3-9)求出两个主振型为 $r_1 = 1, r_2 = -1$

这两种振型如图 3-6 所示,图中的振幅是以右边的摆为参照点。在第一振型中,摆以相同的方向和相同的振幅摆动,弹簧无变形。在第二振型中,它们以相反方向和相等的振幅摆动,弹簧周期性地伸长和压缩。

如果用弹簧连接的摆不受重力场作用,则两个固有频率分别为

$$\omega_{n1} = 0, \quad \omega_{n2} = \frac{h}{L} \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

由此可见,该系统的第一振型由刚体运动组成,这种刚体振型固有频率为零,其周期为无穷大。仅有正根的特征方程,称为正定的。若其中有一个或多个零根,则称为半正定的。故具有一个或多个刚体振型的振动系统,有时称为半正定系统。

但如果连接两个摆的弹簧有很小的刚度,则该系统两部分是稍有联系的。在此情况下,第二振型的频率,假如有如下的初始条件:当 $t=0$ 时, $\varphi_{10} = \varphi_0, \varphi_{20} = 0, \dot{\varphi}_{10} = \dot{\varphi}_{20} = 0$, 则可应用(3-12)式算出 $c_1 = -c_3 = \frac{\varphi_0}{2}$ 和 $c_2 = c_4 = 0$, 并从(3-11)式求出在此初始条件下的响应

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\varphi_0}{2} (\cos \omega_{n1} t + \cos \omega_{n2} t) \\ \varphi_2 &= \frac{\varphi_0}{2} (\cos \omega_{n1} t - \cos \omega_{n2} t) \end{aligned} \right\}$$

上式还可以写成

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 \cos \frac{\omega_{n2} - \omega_{n1}}{2} t \cos \frac{\varphi_{n2} + \varphi_{n1}}{2} \\ \varphi_2 &= \varphi_0 \sin \frac{\omega_{n2} - \omega_{n1}}{2} t \sin \frac{\varphi_{n2} + \varphi_{n1}}{2} \end{aligned} \right\}$$

因为联系两摆的弹簧刚度 k 很小, 因此两个固有频率很接近, 可令 $\omega_{n2} - \omega_{n1} = \Delta\omega$, $\omega_{n2} + \omega_{n1} = \omega_a$ 则上式可写成

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \omega_0 \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cos \frac{\omega_a}{2} t \\ \varphi_2 &= \omega_0 \sin \frac{\Delta\omega}{2} t \sin \frac{\omega_a}{2} t \end{aligned} \right\}$$

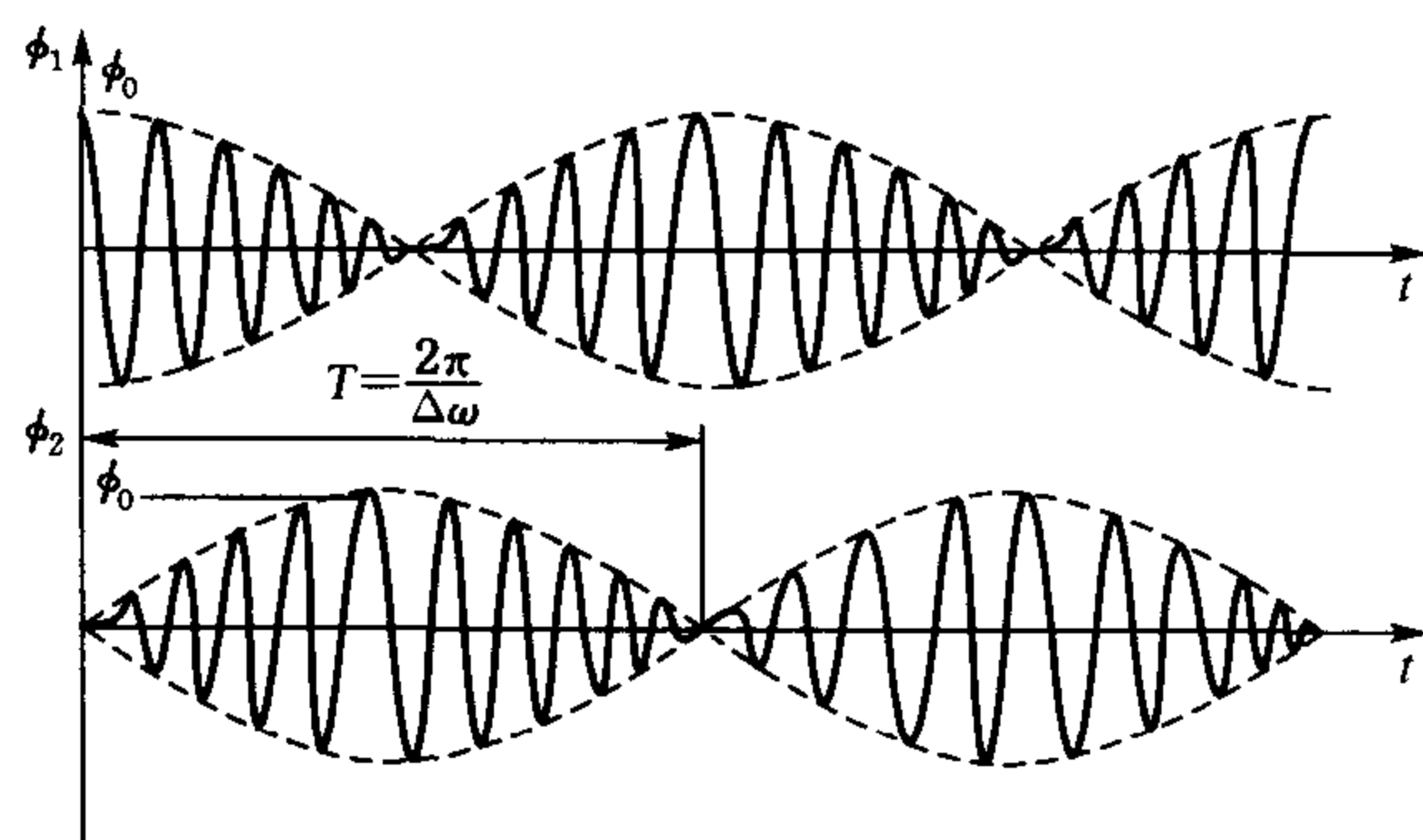


图 3-7 拍现象图示

上式说明, φ_1 是频率分别为 $\Delta\omega$ 和 ω_a 的两个余弦波的乘积。因为 $\Delta\omega$ 远小于 ω_a , 故可以把 φ_1 看作是频率为 $\frac{\omega_a}{2}$, 振幅为 $\omega_0 \cos \frac{\Delta\omega}{2} t$ 缓慢变化的余弦波, 被频率为 $\frac{\Delta\omega}{2}$ 的余弦波所调制, φ_2 的运动也类似, 不过是频率为 $\frac{\omega_a}{2}$ 的正弦波被频率为 $\frac{\Delta\omega}{2}$

的正弦波所调制。 φ_1 和 φ_2 的波形如图 3-7

所示。由图可见, 从 $t = 0$ 开始, 首先左侧摆的摆角从最大幅值逐渐减少至零, 而右侧摆的摆角则从平衡位置开始逐渐增大至最大值。然后开始相反的运动, 并不断地重复, 能量在两个摆之间传递。系统如无阻尼, 则守恒系统的这种能量传递可以一直继续下去, 这种现象称为“拍”, $\Delta\omega$ 称为拍频。拍的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi m \sqrt{gL^3}}{kh^2}$$

可见, 中间连接的弹簧的刚度越小, 则周期就越长。

拍是一种比较普遍的现象。凡是由两个频率相近的简谐振动合成的振动, 都可能产生拍的现象。

【例 3-3】 在图 3-8 所示扭轴系统中, 假设其轴的每一部分具有相同的扭转刚度 k_t , 且 $J_2 = 2J_1$, 如果整个系统以等角速度旋转, 试确定, 当轴突然从两端卡住后的自由振动响应。

解: 可知, $m_1 = J_1$, $m_2 = 2J_1$, $K_{11} = K_{22} = 2K_t$; $K_{12} = K_{21} = -k_t$ 将这些值代入运动方程中, 得系统的运动方程为

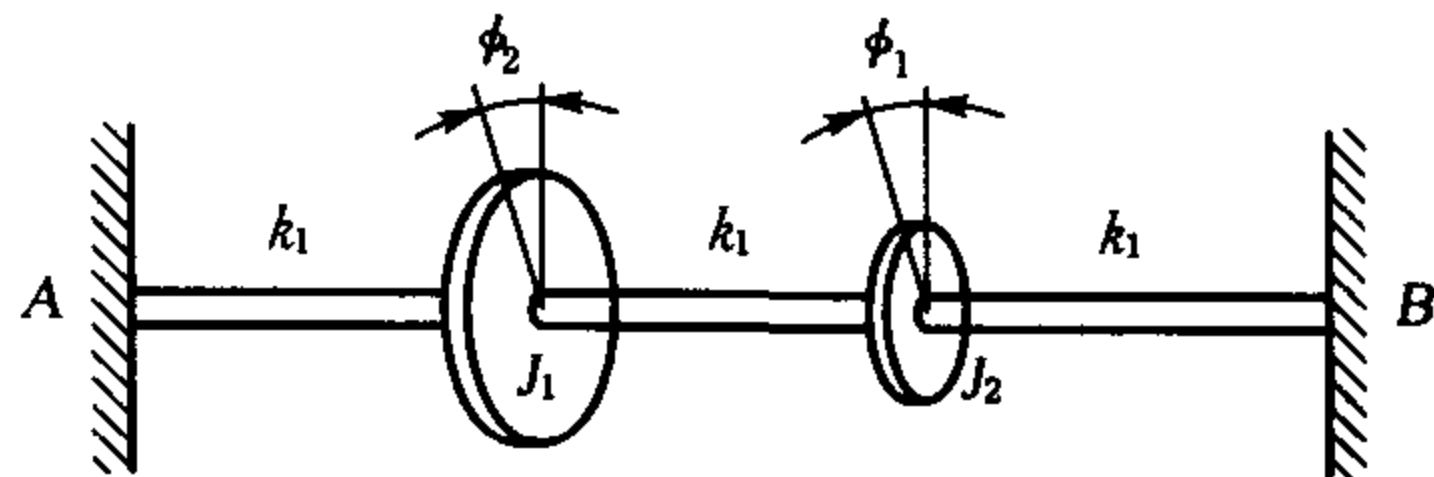


图 3-8 二自由度扭振系统

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & 2J_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_t & -k_t \\ -k_t & 2k_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

由式(3-9)求得其固有频率为

$$\omega_{n1}^2 = \frac{(3 - \sqrt{3}k_t)}{2J_1} = 0.634 \frac{k_t}{J_1}$$

$$\omega_{n2}^2 = \frac{(3 + \sqrt{3}k_t)}{2J_1} = 2.366 \frac{k_t}{J_1}$$

由式(3-9)求得两振型分别为

$$r_1 = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = 0.732,$$

$$r_2 = \frac{2}{1 - \sqrt{3}} = -2.732$$

以横坐标表示扭转系统各点的静平衡位置,纵坐标表示轴上各点的振型(振幅比),可做出主振型图,如图 3-9 所示。图 3-9(a)为第一阶振型,图 3-9(b)为第二阶振型。第二阶振型中在中间扭转上有一个始终不动的点,称为节点。振型中的节点数为阶数减一。

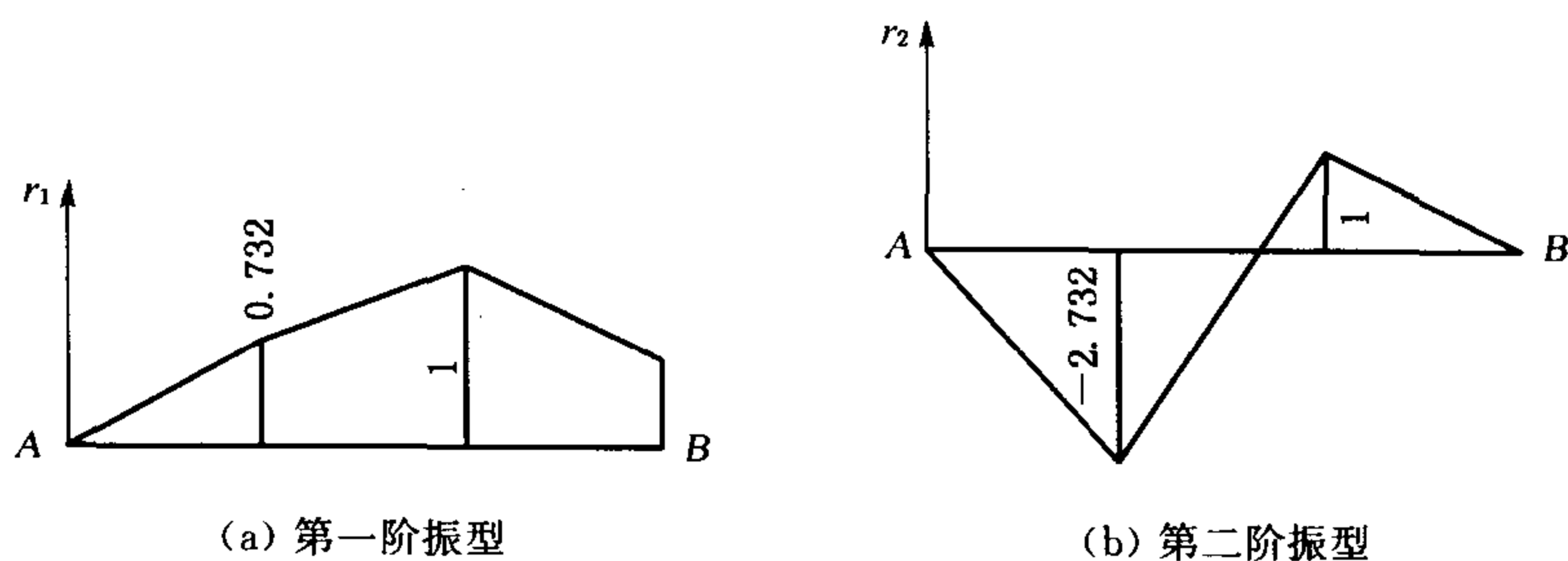


图 3-9 扭轴的振动形态

根据题意, $t=0$ 时, $\varphi_{10} = \varphi_{20} = 0$, $\dot{\varphi}_{10} = \dot{\varphi}_{20} = \dot{\varphi}_0$, 由(3-12)式求得

$$c_1 = c_3 = 0, c_2 = 1.352\varphi_0\sqrt{\frac{J_1}{k_t}}, c_4 = -0.0502\varphi_0\sqrt{\frac{J_1}{k_t}}$$

将求得的 r_1 、 r_2 、 c_2 和 c_4 和代入(3-11)式中,得系统在所得初始条件下自由振动的响应为

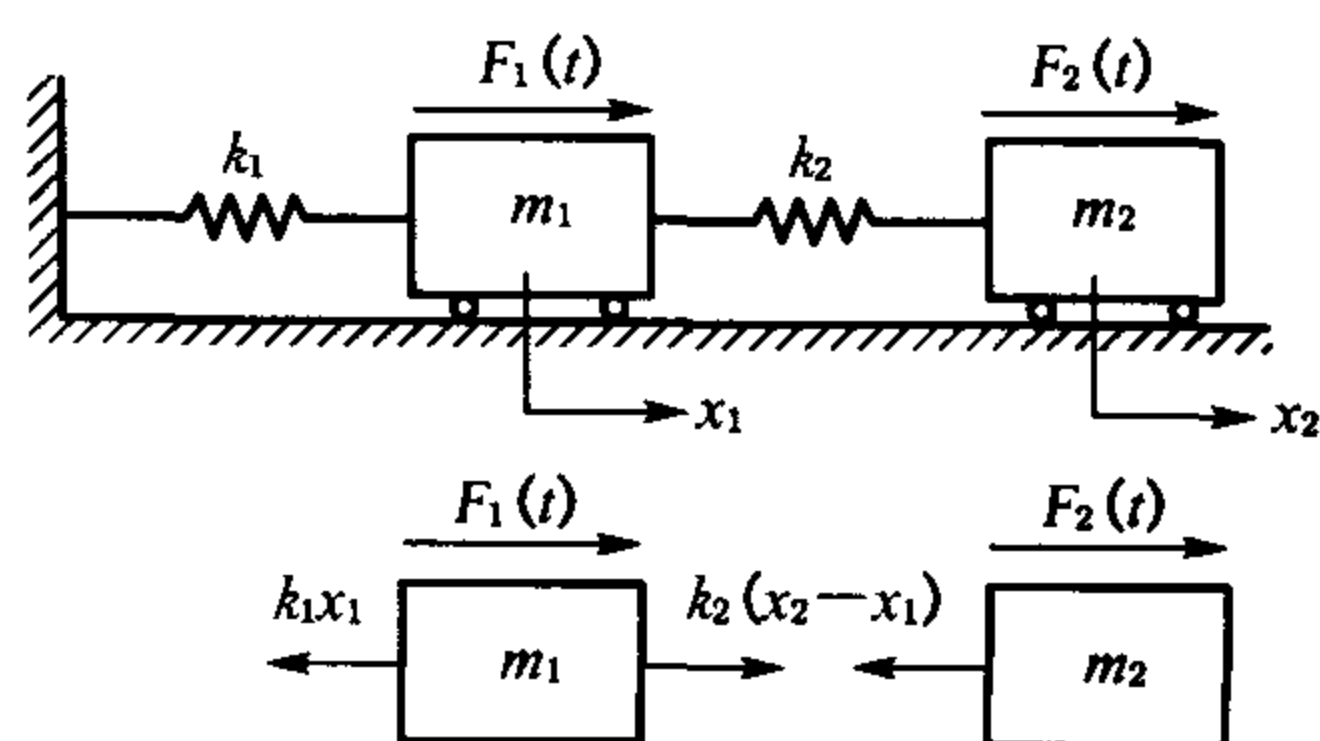
$$\varphi_1 = (0.990\sin \omega_{n1}t + 0.137\sin \omega_{n2}t)\dot{\varphi}_0\sqrt{\frac{J_1}{k_t}}$$

$$\varphi_2 = (1.352\sin \omega_{n1}t - 0.0502\sin \omega_{n2}t)\dot{\varphi}_0\sqrt{\frac{J_1}{k_t}}$$

3.2.3 无阻尼二自由度系统的强迫振动

图 3-10 所示为无阻尼二自由度系统对简谐激励的力学模型,质量 m_1 上作用有激振力 $F_1 \sin \omega t$, 质量 m_2 上作用有激振力 $F_2 \sin \omega t$, 根据牛顿第二定律,其运动方程为

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \sin \omega t$$



(3-14) 图 3-10 无阻尼二自由度强迫振动系统

写成简洁的形式为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \sin \omega t \quad (3-15)$$

上式的解由齐次方程的通解〔自由振动, 见式(3-10)〕与非齐次方程的特解, 即稳态振动, 叠加而成。系统稳态振动的频率与激振频率 ω 相同, 特解可取为

$$x_1 = B_1 \sin \omega t, \quad x_2 = B_2 \sin \omega t$$

或简写为

$$\{x\} = \{B\} \sin \omega t$$

式中 B_1, B_2 为稳态振动振幅。将所设解代入(3-14)式, 并消去 $\sin \omega t$, 得到下列代数方程

$$\begin{bmatrix} k_{11} - \omega^2 m_1 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

振幅表达式为

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} - \omega^2 m_1 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - \omega^2 m_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

简写为

$$\{B\} = [Z]^{-1} \{F\} \quad (3-17)$$

位移响应为

$$\{x\} = [Z]^{-1} \{F\} \sin \omega t \quad (3-18)$$

由式(3-17)解得

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{(k_{22} - \omega^2 m_2) F_1 - k_{12} F_2}{(k_{11} - \omega^2 m_1)(k_{22} - \omega^2 m_2) - k_{12} k_{21}} \\ B_2 &= \frac{(k_{11} - \omega^2 m_1) F_2 - k_{21} F_1}{(k_{11} - \omega^2 m_1)(k_{22} - \omega^2 m_2) - k_{12} k_{21}} \end{aligned} \quad (3-19)$$

式(3-19)还可以写成如下形式

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{(k_{22} - \omega^2 m_2) F_1 - k_{12} F_2}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_{n1}^2) (\omega^2 - \omega_{n2}^2)} \\ B_2 &= \frac{(k_{11} - \omega^2 m_1) F_2 - k_{21} F_1}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_{n1}^2) (\omega^2 - \omega_{n2}^2)} \end{aligned} \quad (3-20)$$

由上式可知, 系统的响应不仅取决于激振力的幅值, 更重要的是和系统固有频率与激振 ω 频率有关, 当激振频率 ω 等于系统任一固有频率时, 其振幅理论上将为无穷大, 即发生共振现象。二自由度系统存在两个共振频率。其振幅比(振型)为

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{(k_{22} - \omega^2 m_2) F_1 - k_{12} F_2}{(k_{11} - \omega^2 m_1) F_2 - k_{21} F_1} \quad (3-21)$$

分析上式可知: 当 $F_1 = 0$ 和 $\omega = \omega_{n1}$ 或 $\omega = \omega_{n2}$ 时, 此比值与(3-9)式所给的 r_1 或 r_2 第一种形式相同。反之, 当 $F_2 = 0$ 和 $\omega = \omega_{n1}$ 或 $\omega = \omega_{n2}$ 时, 此比值与(3-9)式所给的或第二种形式相同。如果用 $-k_{21}$ 去除(3-21)式中的分子和分母, 可得:

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{r_i F_1 + F_2}{F_1 + \frac{F_2}{r_i}} \quad (i = 1, 2) \quad (3-22)$$

上式意味着强迫振动共振时的振型就是相应的自由振动时的主振型。

为了做出二自由度系统稳态振幅的响应谱, 对问题的参数假定具体值, 设图 3-10 所示系统的参数为: $m_1 = 2m, m_2 = m, k_1 = k_2 = k, F_1(t) = F_1 \sin \omega t, F_2(t) = 0$, 并引进符号

$$\omega_0^2 = \frac{k_1}{m_1} = \frac{k}{2m}$$

用(3-8)式求算 ω_0^2 以表达的固有频率,得

$$\omega_{n1}^2 = 0.586\omega_0^2, \omega_{n2}^2 = 3.414\omega_0^2$$

式(3-18)中 $[Z]^{-1}$ 以 ω_0^2 表达时为

$$[Z]^{-1} = \frac{k}{k^2 \left[2 \left(\frac{1 - \omega^2}{2\omega_0^2} \right) - 1 \right]} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} & 1 \\ 1 & 2 \left(1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \right) \end{Bmatrix}$$

在此情况下, $[Z]^{-1}$ 中所有各项的单位均为 $1/k$, 现令 $[\beta] = k[Z]^{-1}$, 则 $[\beta]$ 中各元素均为无量纲的量, 所讨论系统的响应由(3-18)式给出

$$\{x\} = [Z]^{-1} \{F\} \sin \omega t = [\beta] \left\{ \frac{F_1}{k} \right\} \sin \omega t$$

式中 $[\beta]$ 矩阵为放大因子矩阵。由(3-19)式得: 当 $F_1(t) = F_1 \sin \omega t$, $F_2(t) = 0$ 时强迫振动的振幅分别为

$$B_{11} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2}}{2 \left(1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \right)^2 - 1} \cdot \frac{F_1}{k}$$

$$B_{21} = \frac{1}{2 \left(1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \right)^2 - 1} \cdot \frac{F_1}{k}$$

其放大因子分别为

$$\beta_{11} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2}}{2 \left(1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \right)^2 - 1}, \quad \beta_{21} = \frac{1}{2 \left(1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \right)^2 - 1}$$

图 3-11 所示为上列放大因子的无量纲图。其纵坐标值为 β_{11}, β_{21} , 横坐标值为 $\frac{\omega}{\omega_0}$ 。

由图 3-11 可见:

(1) 当 $\omega = 0$ 时, 这两个放大因子都等于 1, 当 ω 逐渐增大时, 这两个放大因子 β_{11}, β_{21} 都是正的, 表明两质量块的运动与激振力 $F_1(t) = F_1 \sin t$ 是同相位振动。

(2) 当 ω 接近第一固有频率 ω_{n1} 时, 两个放大因子趋于无穷大, 产生第一次共振。

(3) 当 ω 稍大于 ω_{n1} 时, 两个放大因子都是负的, 表明质量块运动与激振力不同相, 但是两质量块的运动彼此是同相的。将 ω 进一步增大, 两个放大因子的绝对值都逐渐减小。

(4) 直到 ω 增加到 $\omega = \sqrt{2}\omega_0$ 时, $\beta_{11} = 0, \beta_{21} = -1$ 。即当 $\omega = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ 时, 第一个质量块是停住的。这一现象称为反共振现象。

(5) 当 $\omega > \sqrt{2}\omega_0$ 时, β_{11} 是正的, 而 β_{21} 仍为负, 这意味着两个质量块的运动彼此不同相,

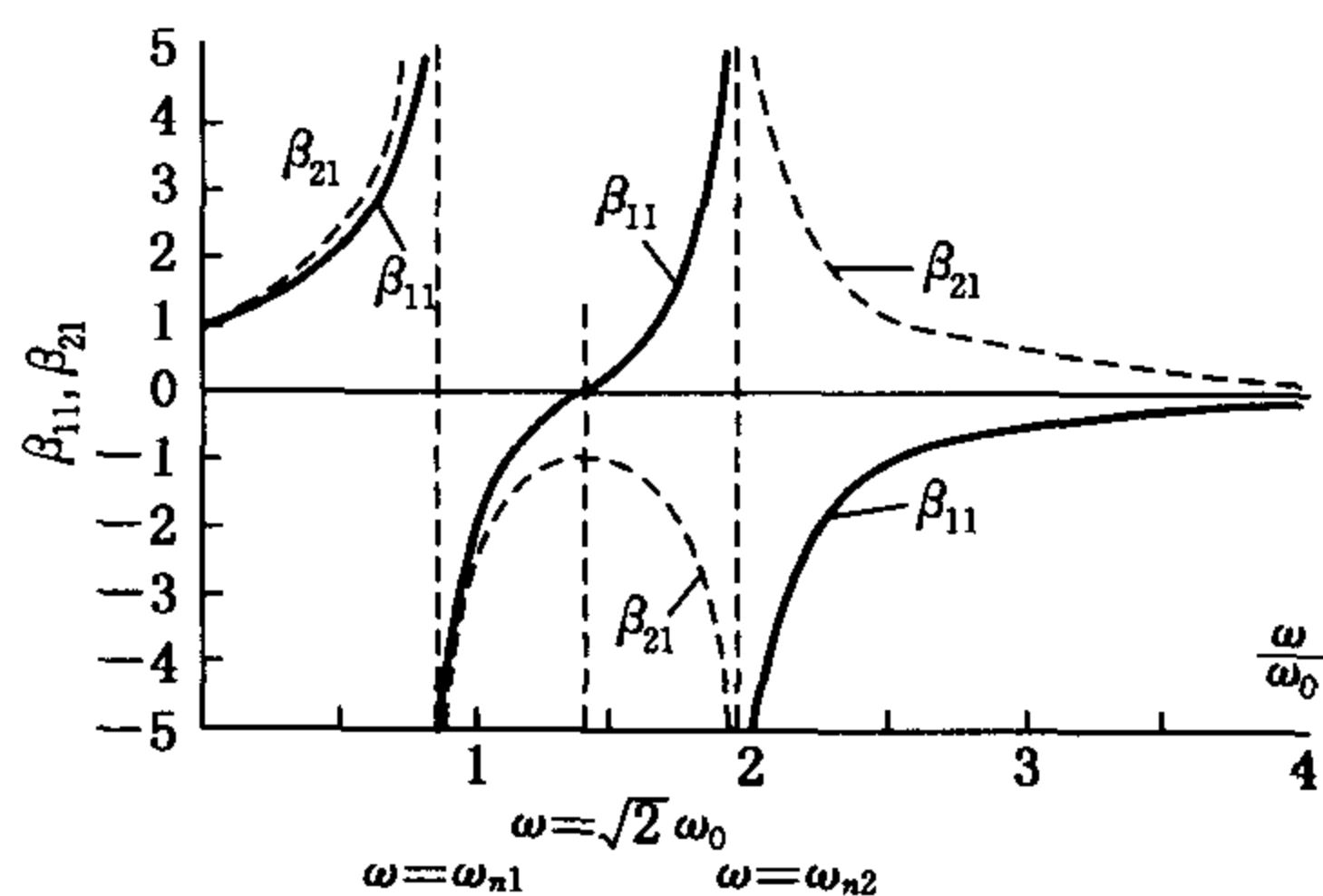


图 3-11 二自由度无阻尼系统幅频特性曲线

但第一质量块的运动与激振力是同相的。当 $\omega = \omega_{n2}$ 时, 系统产生第二次共振, 两个放大因子第二次成为无穷大。

(6) 当 ω 远超过 ω_{n2} 时, 两质量块的运动趋于零。

3.3 有阻尼二自由度系统的振动

3.3.1 有阻尼二自由度系统的自由振动

图 3-12 所示为双质量阻尼弹簧系统自由振动系统。根据分离体的受力情况, 对每一分离体应用牛顿运动定律, 可得系统的运动方程为

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3-23)$$

由于该齐次方程出现了阻尼, 所以方程的解要复杂得多, 可写成矩阵形式

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (3-24)$$

其中

$$\begin{aligned} [M] &= \begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \\ [C] &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \\ [K] &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

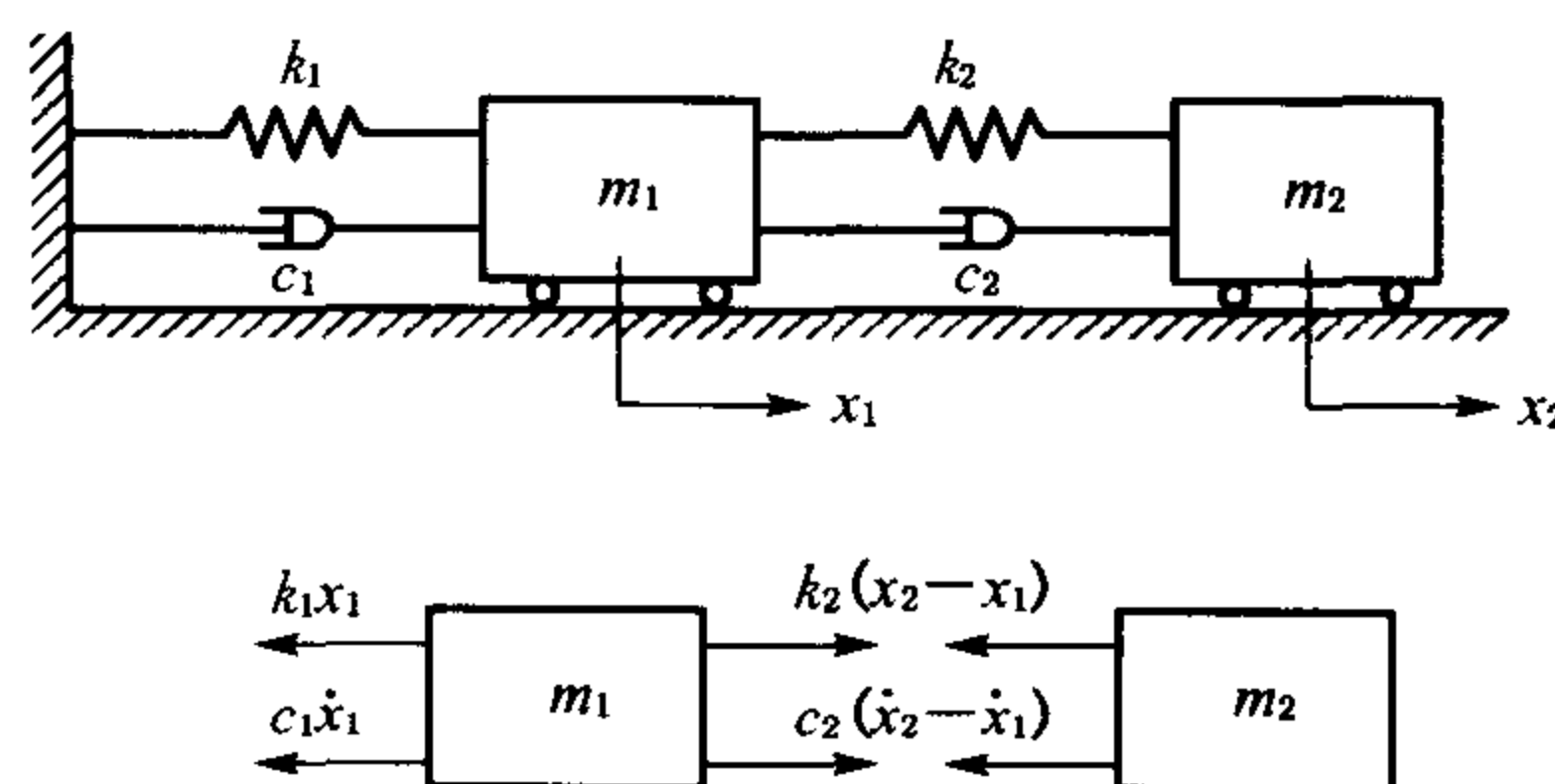


图 3-12 有阻尼二自由度系统

该方程的解应有以下形式

$$\begin{cases} x_1 = A_1 e^{st} \\ x_2 = A_2 e^{st} \end{cases}$$

代入方程(3-24)得:

$$\begin{bmatrix} m_{11}s^2 + c_{11}s + k_{11} & c_{12}s + k_{12} \\ c_{21}s + k_{21} & m_{22}s^2 + c_{22}s + k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-25)$$

为使 A_1 和 A_2 不为零, 系数行列式必为零, 即可得特征方程

$$(m_{11}s^2 + c_{11}s + k_{11})(m_{22}s^2 + c_{22}s + k_{22}) - (c_{12}s + k_{12})(c_{21}s + k_{21}) = 0$$

当阻尼较小时, 系统作自由衰减振动, 方程有以下共轭复数根

$$\begin{aligned} s_{11} &= -n_1 + j\omega_{d1} & s_{12} &= -n_1 - j\omega_{d1} \\ s_{21} &= -n_2 + j\omega_{d2} & s_{22} &= -n_2 - j\omega_{d2} \end{aligned} \quad (3-26)$$

式中: n_1, n_2 ——衰减系数。

ω_{d1}, ω_{d2} ——有阻尼时的固有频率。

通过式(3-25)可求得振幅比。

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{A_1^{(11)}}{A_2^{(11)}} = \frac{-c_{12}s_{11} - k_{12}}{m_{11}s_{11}^2 + c_{11}s_{11} + k_{11}} = \frac{m_{22}s_{11}^2 + c_{22}s_{11} + k_{22}}{-c_{21}s_{11} - k_{21}} \\ r_{12} &= \frac{A_1^{(12)}}{A_2^{(12)}} = \frac{-c_{12}s_{12} - k_{12}}{m_{11}s_{12}^2 + c_{11}s_{12} + k_{11}} = \frac{m_{22}s_{12}^2 + c_{22}s_{12} + k_{22}}{-c_{21}s_{12} - k_{21}} \end{aligned}$$

$$r_{21} = \frac{A_1^{(21)}}{A_2^{(21)}} = \frac{-c_{12}s_{21} - k_{12}}{m_{11}s_{21}^2 + c_{11}s_{21} + k_{11}} = \frac{m_{22}s_{21}^2 + c_{22}s_{21} + k_{22}}{-c_{21}s_{21} - k_{21}}$$

$$r_{22} = \frac{A_1^{(22)}}{A_2^{(22)}} = \frac{-c_{12}s_{22} - k_{12}}{m_{11}s_{22}^2 + c_{11}s_{22} + k_{11}} = \frac{m_{22}s_{22}^2 + c_{22}s_{22} + k_{22}}{-c_{21}s_{22} - k_{21}}$$

可得方程(3-24)的解为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r_{11}A_2^{(11)}e^{s_{11}t} + r_{12}A_2^{(12)}e^{s_{12}t} + r_{21}A_2^{(21)}e^{s_{21}t} + r_{22}A_2^{(22)}e^{s_{22}t} \\ x_2 &= A_2^{(11)}e^{s_{11}t} + A_2^{(12)}e^{s_{12}t} + A_2^{(21)}e^{s_{21}t} + A_2^{(22)}e^{s_{22}t} \end{aligned} \right\} \quad (3-27)$$

将式(3-26)代入式(3-27),并注意到以下数学关系式

$$e^{j\omega_{d1}t} = \cos \omega_{d1}t + j \sin \omega_{d1}t, \quad e^{-j\omega_{d1}t} = \cos \omega_{d1}t - j \sin \omega_{d1}t$$

$$e^{j\omega_{d2}t} = \cos \omega_{d2}t + j \sin \omega_{d2}t, \quad e^{-j\omega_{d2}t} = \cos \omega_{d2}t - j \sin \omega_{d2}t$$

方程的解可改写为如下形式

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= e^{-n_1t} (r_1 D_1 \cos \omega_{d1}t + r'_1 D_2 \sin \omega_{d1}t) \\ &\quad + e^{-n_2t} (r_2 D_3 \cos \omega_{d2}t + r'_2 D_4 \sin \omega_{d2}t) \\ x_2 &= e^{-n_1t} (D_1 \cos \omega_{d1}t + D_2 \sin \omega_{d1}t) \\ &\quad + e^{-n_2t} (D_3 \cos \omega_{d2}t + D_4 \sin \omega_{d2}t) \end{aligned} \right\} \quad (3-28)$$

在有阻尼情况下,振幅 e^{-n_1t}, e^{-n_2t} 随时间而衰减,最终消失。当阻尼很小时,有阻尼的衰减振动圆频率 ω_{d1}, ω_{d2} 与无阻尼固有频率 ω_{n1}, ω_{n2} 近似相等,振幅比 r_1 与 r'_1, r_2 与 r'_2 也近似相等,方程的解可写成

$$\left. \begin{aligned} x_1 &\approx r_1 e^{-n_1t} (D_1 \cos \omega_{n1}t + D_2 \sin \omega_{n1}t) \\ &\quad + r_2 e^{-n_2t} (D_3 \cos \omega_{n2}t + D_4 \sin \omega_{n2}t) \\ x_2 &\approx e^{-n_1t} (D_1 \cos \omega_{n1}t + D_2 \sin \omega_{n1}t) \\ &\quad + e^{-n_2t} (D_3 \cos \omega_{n2}t + D_4 \sin \omega_{n2}t) \end{aligned} \right\} \quad (3-29)$$

当阻尼很大时,特征方程的根全为负的实数根,其解不是周期性振动,很快就衰减为零。

3.3.2 有阻尼二自由度系统的强迫振动

为了讨论方便,我们只假设在 m_1 上作一简谐激振力 $F(t) = F_1 \sin \omega t$, 如图 3-13。可得系统的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 &= F_1 \sin \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-30)$$

写为矩阵形式

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\}$$

该方程的全解应包括两部分,即自由衰减振动部分和强迫振动部分。自由振动部分与上一节完全相同,故这里只讨论稳态振动。如单自由度系统所述的一样,系统的稳态响应一定是与激振同频率的,但由于系统存在阻尼,使响应和激振之间落后一相角差,现设其稳态解为

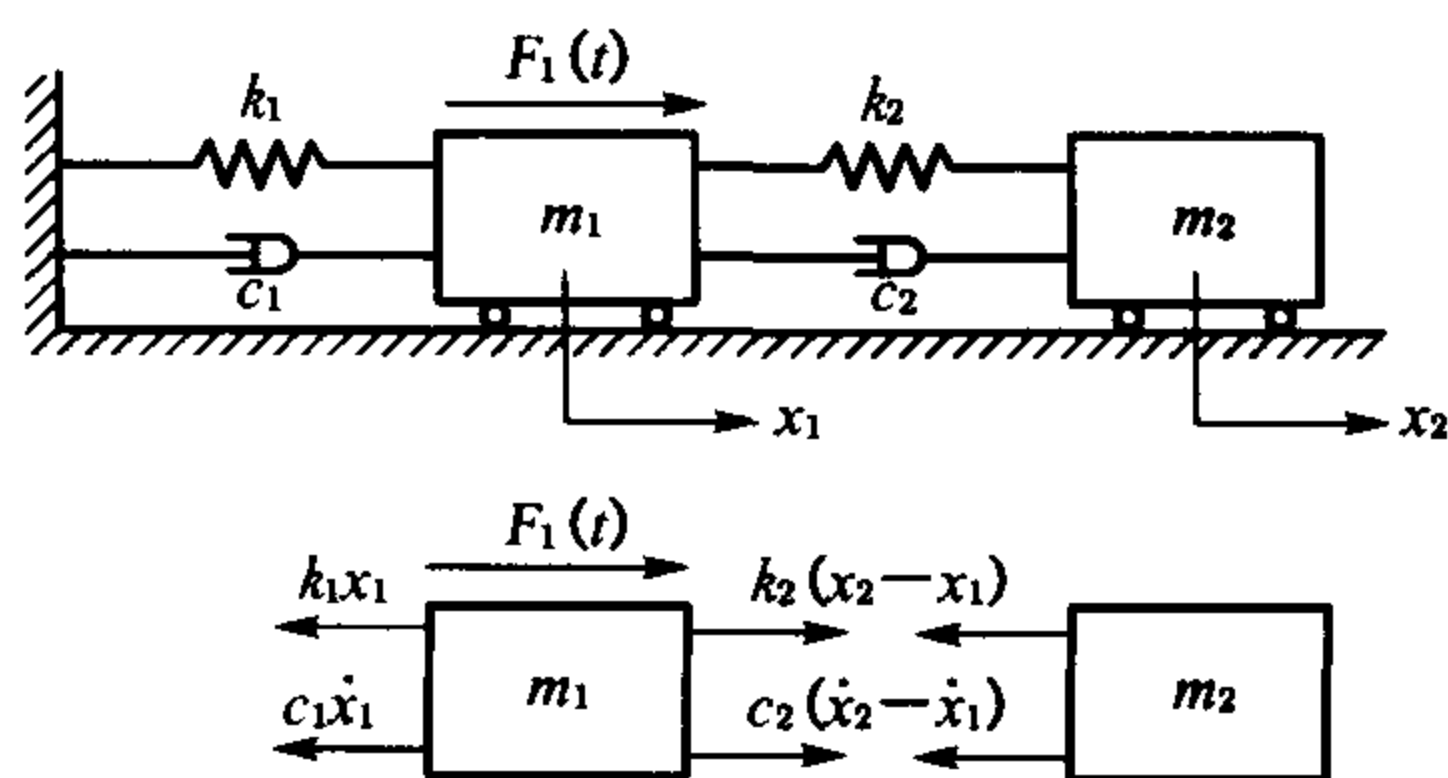


图 3-13 有阻尼二自由度系统的强迫振动

$$\begin{aligned}x_1 &= B_{1c} \cos \omega t + B_{1s} \sin \omega t \\x_2 &= B_{2c} \cos \omega t + B_{2s} \sin \omega t\end{aligned}\quad (3-31)$$

它们的一阶、二阶导数分别为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -B_{1c}\omega \sin \omega t + B_{1s}\omega \cos \omega t \\ \dot{x}_2 &= -B_{2c}\omega \sin \omega t + B_{2s}\omega \cos \omega t \\ \ddot{x}_1 &= -B_{1c}\omega^2 \cos \omega t - B_{1s}\omega^2 \sin \omega t \\ \ddot{x}_2 &= -B_{2c}\omega^2 \cos \omega t - B_{2s}\omega^2 \sin \omega t\end{aligned}$$

将 x_1, x_2 及它们的一阶、二阶导数代入运动微分方程, 经简化后可得

$$\begin{aligned}& [(k_{11} - m_{11}\omega^2)B_{1c} + k_{12}B_{2c} + c_{11}\omega B_{1s} + c_{12}\omega B_{2s}] \cos \omega t + \\& [(k_{11} - m_{11}\omega^2)B_{1s} + k_{12}B_{2s} - c_{11}\omega B_{1c} - c_{12}\omega B_{2s}] \sin \omega t = F_1 \sin \omega t \\& [(k_{22} - m_{22}\omega^2)B_{2c} + k_{12}B_{1c} + c_{12}\omega B_{1s} + c_{22}\omega B_{2s}] \cos \omega t + \\& [(k_{22} - m_{22}\omega^2)B_{2s} + k_{12}B_{1s} - c_{12}\omega B_{1c} - c_{22}\omega B_{2s}] \sin \omega t = 0\end{aligned}\quad (3-32)$$

为使上式恒等, 三角函数的系数必为零, 可得以下方程

$$\begin{aligned}(k_{11} - m_{11}\omega^2)B_{1c} + k_{12}B_{2c} + c_{11}\omega B_{1s} + c_{12}\omega B_{2s} &= 0 \\(k_{11} - m_{11}\omega^2)B_{1s} + k_{12}B_{2s} - c_{11}\omega B_{1c} - c_{12}\omega B_{2s} &= F_1 \\(k_{22} - m_{22}\omega^2)B_{2c} + k_{12}B_{1c} + c_{12}\omega B_{1s} + c_{22}\omega B_{2s} &= 0 \\(k_{22} - m_{22}\omega^2)B_{2s} + k_{12}B_{1s} - c_{12}\omega B_{1c} - c_{22}\omega B_{2s} &= 0\end{aligned}\quad (3-33)$$

根据上述 4 个方程组成的方程组, 可解出 4 个未知数 $B_{1c}, B_{1s}, B_{2c}, B_{2s}$ (但过程较复杂)。这时振动位移可表示为

$$\begin{aligned}x_1 &= B_1 \sin(\omega t - \phi_1) \\x_2 &= B_2 \sin(\omega t - \phi_2)\end{aligned}\quad (3-34)$$

$$B_1 = \sqrt{B_{1c}^2 + B_{1s}^2}, \quad B_2 = \sqrt{B_{2c}^2 + B_{2s}^2}$$

式中:

$$\phi_1 = \arctan \frac{-B_{1c}}{B_{1s}}, \quad \phi_2 = \arctan \frac{-B_{2c}}{B_{2s}}$$

这样, 理论上求出有阻尼二自由度系统稳态振动的振幅和相位是没有问题的。

3.3.3 求强迫振动方程稳态解的复数法

上述求稳态解的一般方法虽然可行, 但解四元方程组的过程比较复杂, 用复数法求解运动方程较为简便, 将原方程写成复数形式

$$\left. \begin{aligned}m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= F_1 e^{j\omega t} \\m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 &= 0\end{aligned} \right\} \quad (3-35)$$

该方程式中, $\ddot{x}_1, \dot{x}_1, x_1, \ddot{x}_2, \dot{x}_2, x_2, F_1 e^{j\omega t}$ 均为复数。

设方程的稳态解为

$$\begin{aligned}x_1 &= \bar{B}_1 e^{j\omega t} \\x_2 &= \bar{B}_2 e^{j\omega t}\end{aligned}\quad (3-36)$$

则其一阶和二阶导数分别为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= j \bar{B}_1 \omega e^{j\omega t}, \quad \dot{x}_2 = j \bar{B}_2 \omega e^{j\omega t} \\ \ddot{x}_1 &= -\bar{B}_1 \omega^2 e^{j\omega t}, \quad \ddot{x}_2 = -\bar{B}_2 \omega^2 e^{j\omega t}\end{aligned}$$

将所设解及其一、二阶导数代入运动方程,写成矩阵形式并消去 $e^{j\omega t}$ 得

$$\begin{bmatrix} [(k_{11} - m_1\omega^2) + j\omega c_{11}] & k_{12} + j\omega c_{12} \\ k_{12} + j\omega c_{12} & [(k_{22} - m_2\omega^2) + j\omega c_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-37)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 e^{-j\psi_1} \\ B_2 e^{-j\psi_2} \end{Bmatrix} \quad (3-38)$$

从式(3-37)可得出振幅表达式

可解得

$$B_1 e^{-j\psi_1} = \frac{(k_{22} - m_2\omega^2 + j\omega c_{22})F_1}{[(k_{11} - m_1\omega^2) + j\omega c_{11}][(k_{22} - m_2\omega^2) + j\omega c_{22}] - (k_{12} + j\omega c_{12})^2}$$

$$B_2 e^{-j\psi_2} = \frac{(k_{12} + j\omega c_{12})F_1}{[(k_{11} - m_1\omega^2) + j\omega c_{11}][(k_{22} - m_2\omega^2) + j\omega c_{22}] - (k_{12} + j\omega c_{12})^2}$$

为了便于讨论,根据复数计算法则将上两式可简写为以下形式

$$\bar{B}_1 = B_1 e^{-j\psi_1} = \frac{(h + jd)F_1}{a + jb} = F_1 \sqrt{\frac{h^2 + d^2}{a^2 + b^2}} e^{-j\psi_1} \quad (3-39)$$

$$\bar{B}_2 = B_2 e^{-j\psi_2} = \frac{(f + jg)F_1}{a + jb} = F_1 \sqrt{\frac{f^2 + g^2}{a^2 + b^2}} e^{-j\psi_2} \quad (3-40)$$

式中:

$$a = (k_{11} - m_1\omega^2)(k_{22} - m_2\omega^2) - k_{12}^2 - c_{11}c_{22}\omega^2 + c_{12}^2\omega^2$$

$$b = (k_{11} - m_1\omega^2)c_{22}\omega + (k_{22} - m_2\omega^2)c_{11}\omega - 2k_{12}\omega c_{12}$$

$$h = k_{22} - m_2\omega^2, d = c_{22}\omega, f = -k_{12}, g = -c_{12}\omega$$

振幅和相位角的值分别为

$$B_1 = F_1 \sqrt{\frac{h^2 + d^2}{a^2 + b^2}}, B_2 = F_1 \sqrt{\frac{f^2 + g^2}{a^2 + b^2}} \quad (3-41)$$

$$\psi_1 = \arctan \frac{bh - ad}{ah + bd}, \psi_2 = \arctan \frac{bf - ag}{af + bg} \quad (3-42)$$

将 \bar{B}_1, \bar{B}_2 的值代入式(3-36),得

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \bar{B}_1 e^{j\omega t} \\ \bar{B}_2 e^{j\omega t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 e^{-j\psi_1} e^{j\omega t} \\ B_2 e^{-j\psi_2} e^{j\omega t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 e^{j(\omega t - \psi_1)} \\ B_2 e^{j(\omega t - \psi_2)} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} B_1 [\cos(\omega t - \psi_1) + j \sin(\omega t - \psi_1)] \\ B_2 [\cos(\omega t - \psi_2) + j \sin(\omega t - \psi_2)] \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3-43)$$

而稳态响应取上式的虚部即可,所以

$$\begin{aligned} x_1 &= B_1 \sin(\omega t - \psi_1) \\ x_2 &= B_2 \sin(\omega t - \psi_2) \end{aligned} \quad (3-44)$$

这与式(3-34)是一致的。

现根据前面结果讨论稳态响应的幅频特性。为了便于讨论,现假设式(3-30)中: $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k$, $c_1 = c_2 = c$ 。引入下列符号

$$\lambda = \frac{\omega}{\omega_{n1}}, \eta_1 = \omega_{n1}^2 \frac{m}{k}, \eta_2 = \omega_{n2}^2 \frac{m}{k}, \xi = \frac{c}{2m\omega_{n1}}, B_0 = \frac{F_0}{k}$$

代入式(3-41),并将分子分母同除以 k^2 ,则振幅可化为无因次表达式,相当于前节中介绍的放大因子,现用 β_1 和 β_2 表示为

$$\beta_1 = \frac{B_1}{B_0} = \frac{\sqrt{(2 - \eta_1 \lambda^2)^2 + (2\xi\eta_1 \lambda)^2}}{\sqrt{\left[\eta_1^2 (\lambda^2 - 1) \left(\lambda^2 - \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) - (2\xi\eta_1 \lambda)^2 \right]^2 + (2\xi\eta_1 \lambda)^2 (2 - 3\eta_1 \lambda^2)^2}}$$

$$\beta_2 = \frac{B_2}{B_0} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\eta_1 \lambda)^2}}{\sqrt{\left[\eta_1^2 (\lambda^2 - 1) \left(\lambda^2 - \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) - (2\xi\eta_1 \lambda)^2 \right]^2 + (2\xi\eta_1 \lambda)^2 (2 - 3\eta_1 \lambda^2)^2}} \quad (3-45)$$

$$\omega_{n1}^2 = 0.382 \frac{k}{m}, \quad \omega_{n2}^2 = 2.618 \frac{k}{m}$$

因此, $\eta_1 = 0.382$, $\eta_2 = 2.618$ 。把这些数代入(3-45)式,可以看出, β_1 和 β_2 只与阻尼比 ξ 和频率比 λ 有关,如单自由度强迫振动一样,我们把 ξ 当作参量,就可得到 β_1 (或 β_2) 与 λ 的幅频特性曲线,值得注意的是,这里的阻尼比 ξ 是对基频而言的。图3-14表示了 β_1 与 λ 的曲线,从这组曲线可以看出与单自由度系统的幅频特性曲线有类似之点:

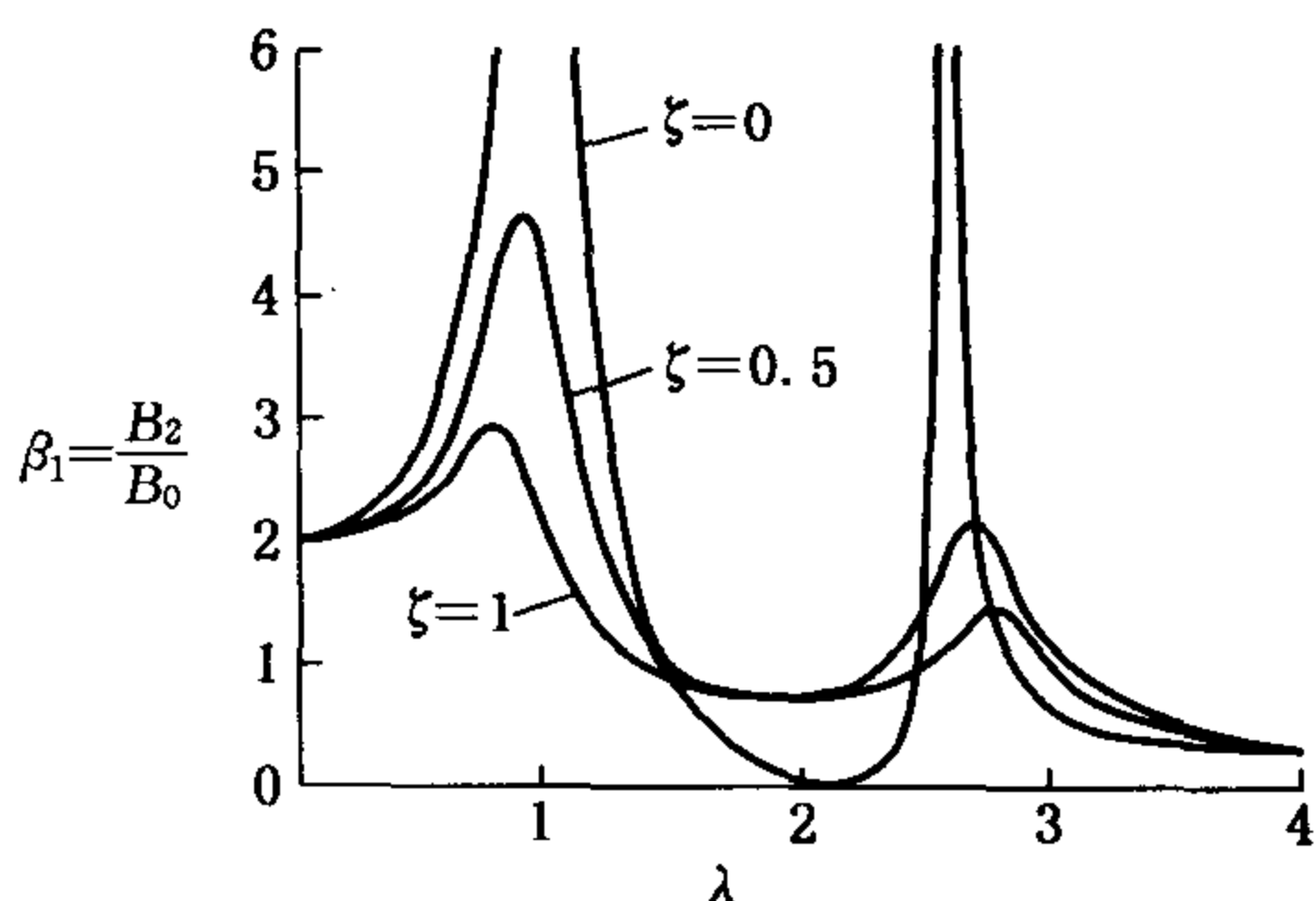


图 3-14 二自由度幅频特性曲线

(1) 当激振频率与系统固有频率接近时,系统将出现共振现象,当无阻尼时,振幅无穷大,因为二自由度系统有两个固有频率,故有两个共振峰。

(2) 阻尼对抑制共振峰有明显的作用,在相同阻尼的情况下,高频共振峰降低的程度要比频率低的那个更明显,所以实际结构的动态响应可只考虑最低几阶振型。

3.4 动力消振器

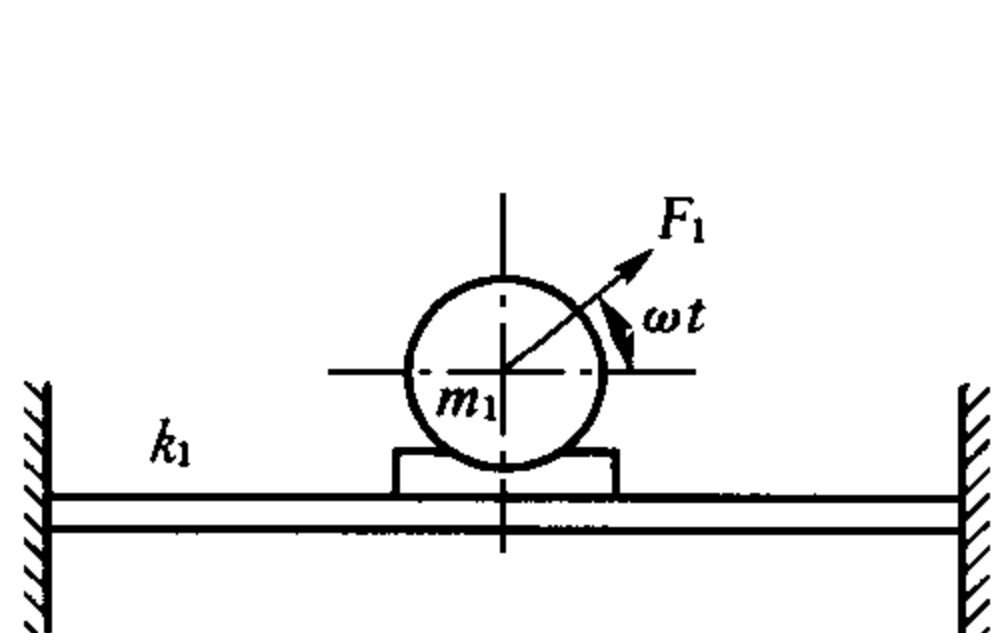
3.4.1 无阻尼动力消振器

本书 3.2 节无阻尼二自由度系统振动理论中提到反共振现象,当 $\omega = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ 时, β_{11} 成为零。这一事实很重要。在此频率时,第一个质量块静止不动。

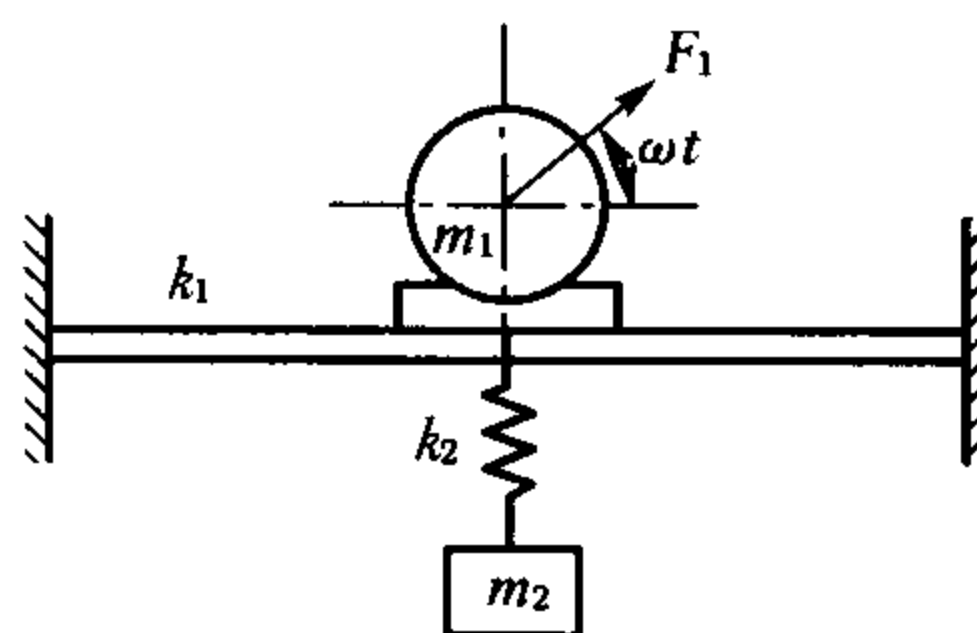
双质量弹簧系统实际上是由两个系统 (m_1, k_1) 和 (m_2, k_2) 组合而成,如果 (m_1, k_1) 是主系统,则产生激烈振动。为消除主系统的振动,可设计附加系统 (m_2, k_2) ,根据反共振现象,只要适当选择附加系统的参数 m_2, k_2 便可使主系统减振。

现在,我们来说明这种条件的具体应用。图 3-15(a) 中电动机质量 m_1 , 支于刚度为 k_1 的钢梁上,当电机角速度 $\omega = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ 时,由于电机转子的不平衡所引起的离心力的垂直分量, $F_1 \sin \omega t$ 引起系统上下的剧烈振动,为了抑制这种振动,附加上一个刚度为 k_2 的弹簧和质量为 m_2 的辅助系统,如图 3-15(b) 所示。其运动方程为

$$\begin{bmatrix} m_0 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \sin \omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$



(a) 梁横向振动模型



(b) 动力减振器模型

图 3-15 无阻尼动力减振器原理

由式(3-19)得其振幅为

$$B_1 = \frac{(k_{22} - \omega^2 m_2) F_1}{(k_{11} - \omega^2 m_1)(k_{22} - \omega^2 m_2) - k_{12} k_{21}}$$

$$B_2 = \frac{-k_{21} F_1}{(k_{11} - \omega^2 m_1)(k_{22} - \omega^2 m_2) - k_{12} k_{21}}$$

如果 m_2 和 k_2 按 $\omega = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ 来选定,那么,就得到电动机振动消失的二自由度系统,而辅助质量 m_2 以振幅 $\left(\frac{-F_1}{k_2}\right)$ 进行振动,通过 k_2 对主系统产生一个力 $x_2 k_2 = -F_1 \sin \omega t$ 与激振力相抵消。这种辅助系统称为无阻尼动力消振器。

当 $\omega = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ 时, $B_1 = 0$ 这是无阻尼条件下的结论,当存在阻尼时,主系统不是完全不动,且随着阻尼的增加,振幅也随着增加。因此采用无阻尼动力消振器应注意减小阻尼。

在设计该动力减振器时,首先选定 k_2 值,使 $\left(\frac{-F_1}{k_2}\right)$ 为一适当值,然后选定满足 $\omega = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ 的质量 m_2 。设计时,常常使动力减振器辅助系统与主系统之间存在 $\frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2}$ 的关系。由于整个系统是二自由度系统,所以有两个新的固有频率。

现引进质量比, $\mu = \frac{m_2}{m_1}$, $\frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2} = \omega_0^2$ 代入式(3-8),得

$$\omega_{n1,2}^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{\mu}{2} \mu \sqrt{\frac{1}{4} \mu^2 + \mu} \right) \quad (3-46)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\omega_{n1,2}}{\omega_0} = \sqrt{1 + \frac{\mu}{2} \mu \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + \mu}} \quad (3-47)$$

当质量比 μ 很小时, $\lambda_{1,2}$ 彼此很接近,易引起共振,因此,要求 μ 必须较大,一般应使 $\mu > 0.1$ 。即辅助系统质量不能过小,一般至少应大于主质量的十分之一。

这种减振器适宜应用于定转速旋转机械的减振。但当主系统中还有其他激振力时,则还要校核这些激振力是否会引发共振。

3.4.2 有阻尼的消振器

实际上,系统总是有阻尼的。下面讨论图 3-16 所示系统。该系统在主要质量 m_1 与辅助质量 m_2 之间安装了一个阻尼器,因为包括阻尼,故称有阻尼的消振器,它可以抑制变转速和定转速机器中的振动。 m_1 上的激振力为 $F(t) = F_1 \sin \omega t$, 阻尼器的阻尼系数为 c 。图 3-16 所示系统的振动微分方程为

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 + c\dot{x}_1 - c\dot{x}_2 = F_1 \sin \omega t \quad (3-48)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 - c\dot{x}_1 + c\dot{x}_2 = 0$$

设其解为
$$\begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} = \begin{cases} B_1 e^{j(\omega t - \phi_1)} \\ B_2 e^{j(\omega t - \phi_2)} \end{cases}$$

应用上一节的方法,可得此系统稳定响应振幅的表达式。我们图 3-16 有阻尼的消振器感兴趣的是系统中主质量 m_1 的振幅。

$$B_1 = \frac{F_1 \sqrt{(k_2 - \omega^2 m_2)^2 + (\omega c)^2}}{\sqrt{[(k_1 - \omega^2 m_1)(k_2 - \omega^2 m_2) - \omega^2 m_2 k_2]^2 + [(\omega c)(k_1 - \omega^2 m_1 - \omega^2 m_2)]^2}} \quad (a)$$

为了简化阻尼消振器的讨论,引进下列符号

$$B_0 = \frac{F_1}{k_1}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \omega_a = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}, \beta = \frac{m_2}{m_1}, \delta = \frac{\omega_a}{\omega_0}, \gamma = \frac{\omega}{\omega_0}, \mu = \frac{c}{2m_2\omega_a}$$

其中 β 值表示消振器系统与主系统的质量之比; δ 值表示消振器系统与主系统的频率之比; μ 值表示消振器系统的阻尼比。

引用这些符号(a)式可以写成下列无量纲的形式

$$\frac{B_1^2}{B_0^2} = \frac{4\mu^2 \gamma^2 (\gamma^2 - \delta^2)^2}{4\mu^2 \gamma^2 (\gamma^2 - 1 + \beta\gamma^2)^2 + [\beta\delta^2 \gamma^2 - (\gamma^2 - 1)(\gamma^2 - \delta^2)]^2} \quad (3-49)$$

图 3-17 是在 $\beta = \frac{1}{20}$, $\delta = 1$ 时,取一定的阻尼比 μ 值,以频率比 γ ($\gamma = \frac{\omega}{\omega_0}$) 为横坐标,以振幅 $\frac{B_1}{B_0}$ 为纵坐标的一组幅频曲线。

令阻尼比 $\mu = 0$, 则式(3-49)可写成

$$\frac{B_1}{B_0} = \frac{(\gamma^2 - \delta^2)}{\beta\delta^2 \gamma^2 - (\gamma^2 - 1)(\gamma^2 - \delta^2)} \quad (3-50)$$

阻尼 $\mu = 0$ 时的幅频如图 3-17 中虚线所示。 $\gamma = 0.895$ 和 $\gamma = 1.12$ 时出现两次共振。

如令阻尼比 $\mu = \infty$, 那么质量 m_1 和 m_2 之间无相对运动, 系统变为只有一个质量 $m_1 + m_2$ 和弹簧刚度为 k_1 的单自由度系统。根据式(3-49), 此时的无量纲表达式为

$$\frac{B_1^2}{B_0^2} = \frac{1}{(\gamma^2 - 1 + \beta\gamma^2)^2} \quad (3-51)$$

令式(3-51)的分母为零, 可得到幅频特性峰值的频率比

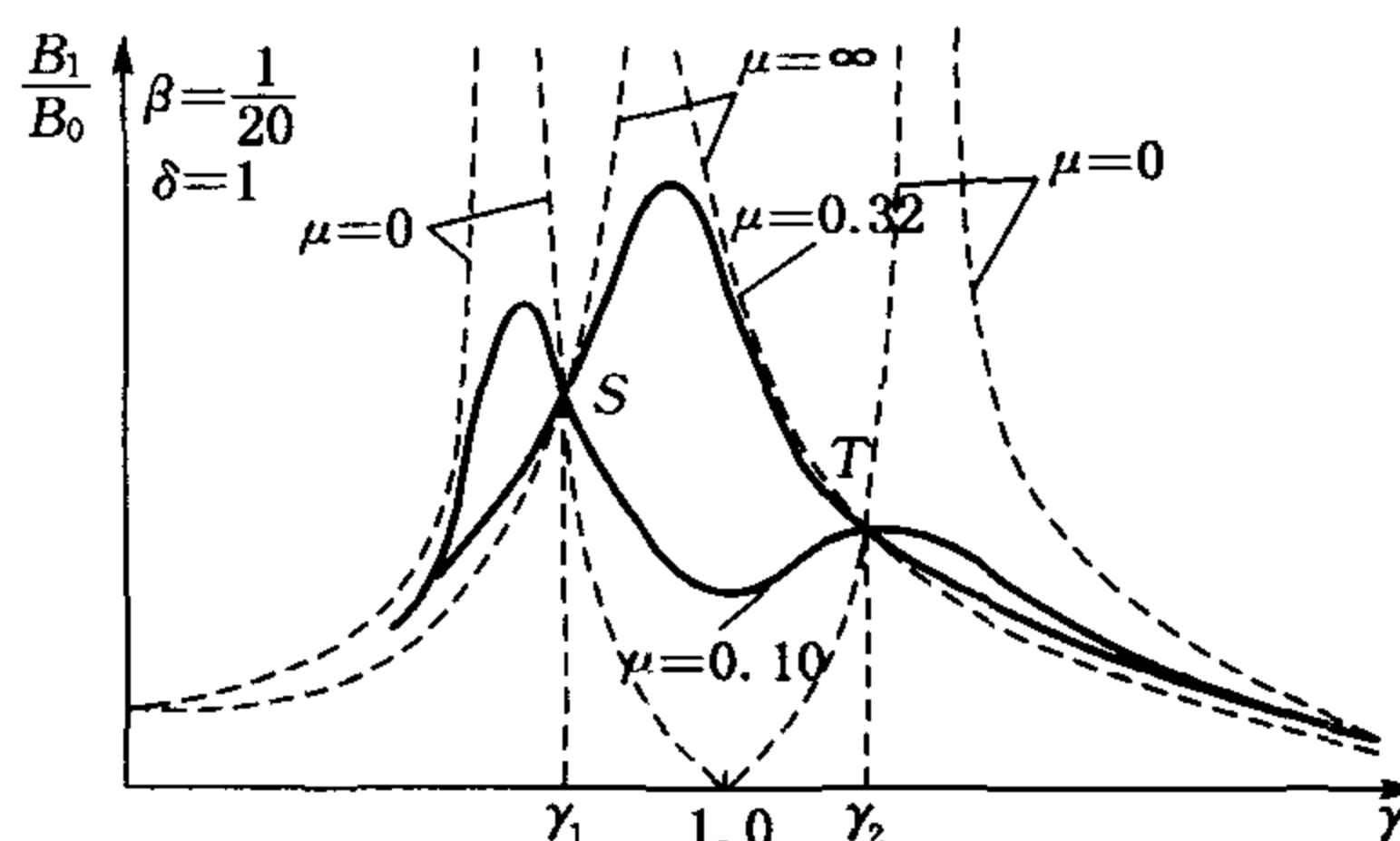
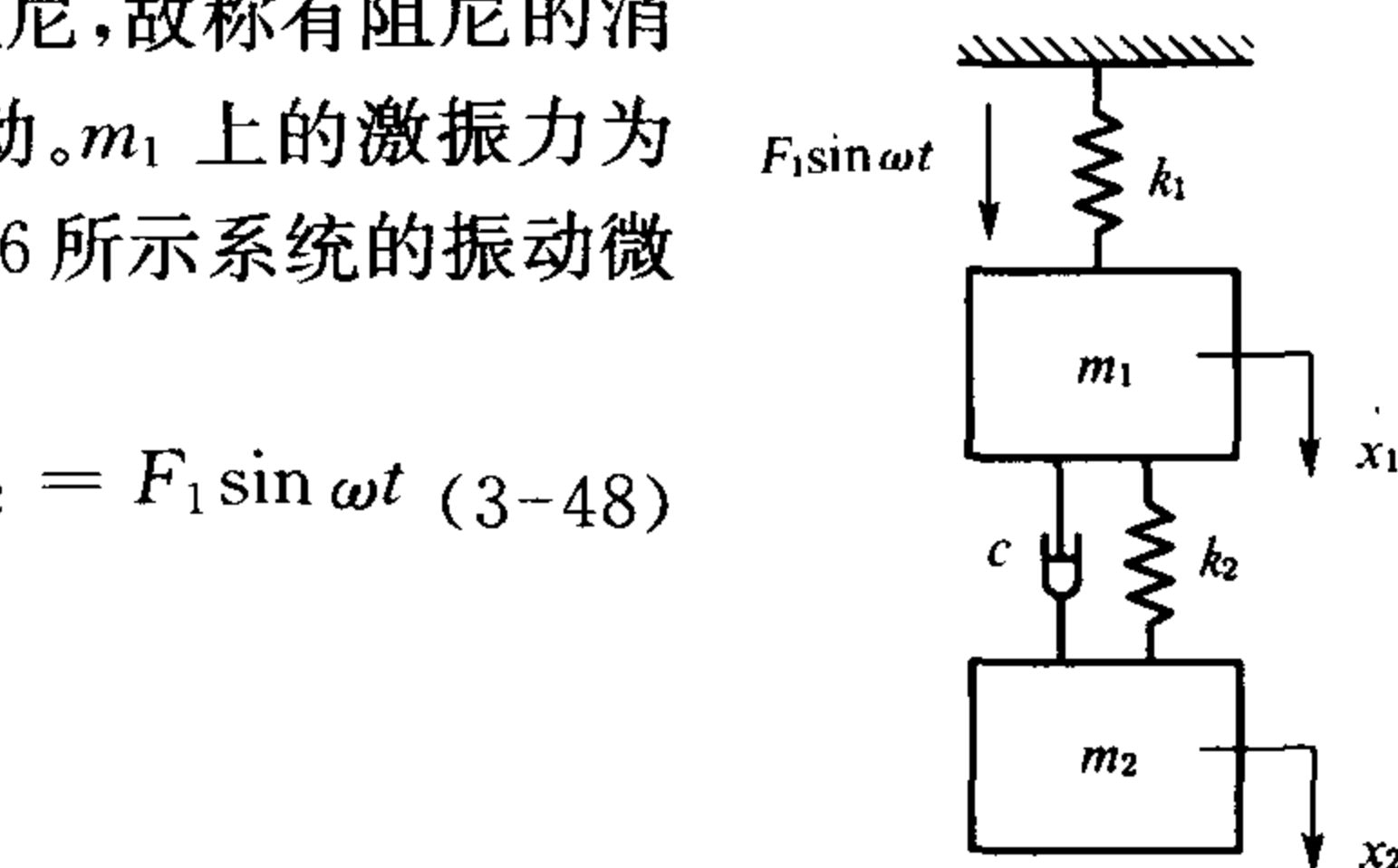


图 3-17 主质量的幅频特性

$$\gamma_{cr} = \frac{1}{\sqrt{1+\beta}} = 0.976 \quad (3-52)$$

对于 $\mu = \infty$ 的幅频特性曲线也用虚线表示在图 3-17 中, 它与单自由度系统的幅频特性曲线相同, 对于其他阻尼的幅频特性曲线, 可根据 (3-49) 式求出, 图中还表示了 $\mu=0.10$ 和 $\mu=0.32$ 时的幅频曲线。

可以看到, 图 3-17 中所有幅频曲线都交于 S 点和 T 点。这意味着在这两点相应频率比 γ 值下主系统的振幅与阻尼无关。S 点和 T 点相应的 γ 值可令式 (3-50) 和式 (3-51) 的绝对值相等, 即

$$\frac{\gamma^2 - \delta^2}{\beta\delta^2\gamma^2 - (\gamma^2 - 1)(\gamma^2 - \delta^2)} = \frac{\pm 1}{\gamma^2 - 1 + \beta\gamma^2} \quad (3-53)$$

式 (3-53) 可写成

$$\gamma^4 - 2\gamma^2 \frac{1 + \delta^2 + \beta\delta^2}{2 + \beta} + \frac{2\delta^2}{2 + \beta} = 0 \quad (3-54)$$

从式 (3-54) 式可以求出两个根 γ_1^2 和 γ_2^2 , 它们就是 S 点和 T 点横坐标的平方。于是 S 点和 T 点的纵坐标值为

$$\frac{(B_1)_S}{B_0} = \frac{1}{\gamma_1^2 - 1 + \beta\gamma_1^2} \quad (3-55)$$

$$\frac{(B_1)_T}{B_0} = \frac{1}{\gamma_1^2 - 1 + \beta\gamma_1^2} \quad (3-56)$$

幅频特性曲线的纵坐标与 S 点和 T 点的纵坐标有关, 较为满意的情况是使 S, T 的纵坐标值相等, 即

$$-\frac{1}{\gamma_1^2 - 1 + \beta\gamma_1^2} = \frac{1}{\gamma_1^2 - 1 + \beta\gamma_2^2}$$

或

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \frac{1}{1 + \beta} \quad (3-57)$$

$\gamma_1^2 + \gamma_2^2$ 是方程 (3-54) 的两根之和, 据此可得

$$\delta = \frac{1}{1 + \beta} \quad (3-58)$$

式 (3-58) 表示 S 点和 T 点在同一条水平线上时 δ 与 β 的关系。如果吸振器质量 m_2 已确定, 则 β 值为已知, δ 就确定了, 也就是确定了吸振器的频率和弹簧刚度。为了确定相应于 S 点和 T 点的振幅, 将式 (3-58) 式代入式 (3-54), 得方程

$$\gamma^4 - \frac{2\gamma^2}{1 + \beta} + \frac{2}{(2 + \beta)(1 + \beta)^2} = 0$$

解得

$$\gamma_{S, T}^2 = \frac{1}{1 + \beta} \left(1 \pm \mu \sqrt{\frac{\beta}{2 + \beta}} \right) \quad (3-59)$$

将式 (3-59) 求得的 γ_1^2 和 γ_2^2 代入式 (3-55) 和式 (3-56) 可得

$$\frac{(B_1)_T}{B_0} = \frac{(B_1)_S}{B_0} = \sqrt{\frac{2 + \beta}{\beta}} \quad (3-60)$$

综上所述, 阻尼消振器的有关参数包括主、副系统频率之比 δ 、质量之比 β 和消振器阻尼比 μ 的选取原则是: 使幅频特性曲线上的 S 点和 T 点在同一条水平线上, 设法降低这两

点的幅值高度,并使其成为曲线上的最高点。这样,主质量振幅就减小,被限制在 S 点和 T 点所对应的振幅之下。如图 3-18 就是满足上述要求的主质量特性图,它们的质量比 $\beta = 0.25$ 。由图可看出,主质量在 S 点和 T 点具有最大值。阻尼消振器的设计要点归纳如下:

(1) 首先根据式(3-58)和式(3-60)来确定最佳 δ 值与 β 值。

其中式(3-58)确定使 S 点和 T 点在同一条水平线上时最佳 δ 值与 β 值之间的关系,式(3-60)表示在最佳 δ 值下 S 和 T 两点振幅与 β 值的关系。

由式(3-60)可见,增大 β 值,即增加辅助质量 m_2 ,可降低 S 和 T 两点振幅高度, m_2 越大消振效果越好。

(2) 最佳阻尼比 μ 的选取原则,通过对式(3-49)求导使 $\frac{\partial B_1}{\partial \gamma} = 0$,求得相应的 μ 值。并将最佳 δ 值代入其中,可分别求出使 S 点和 T 点成为最高点时的 μ 值,一般最佳 μ 值可取

$$\mu \approx \sqrt{\frac{3\beta}{8(1+\beta)^3}} \quad (3-61)$$

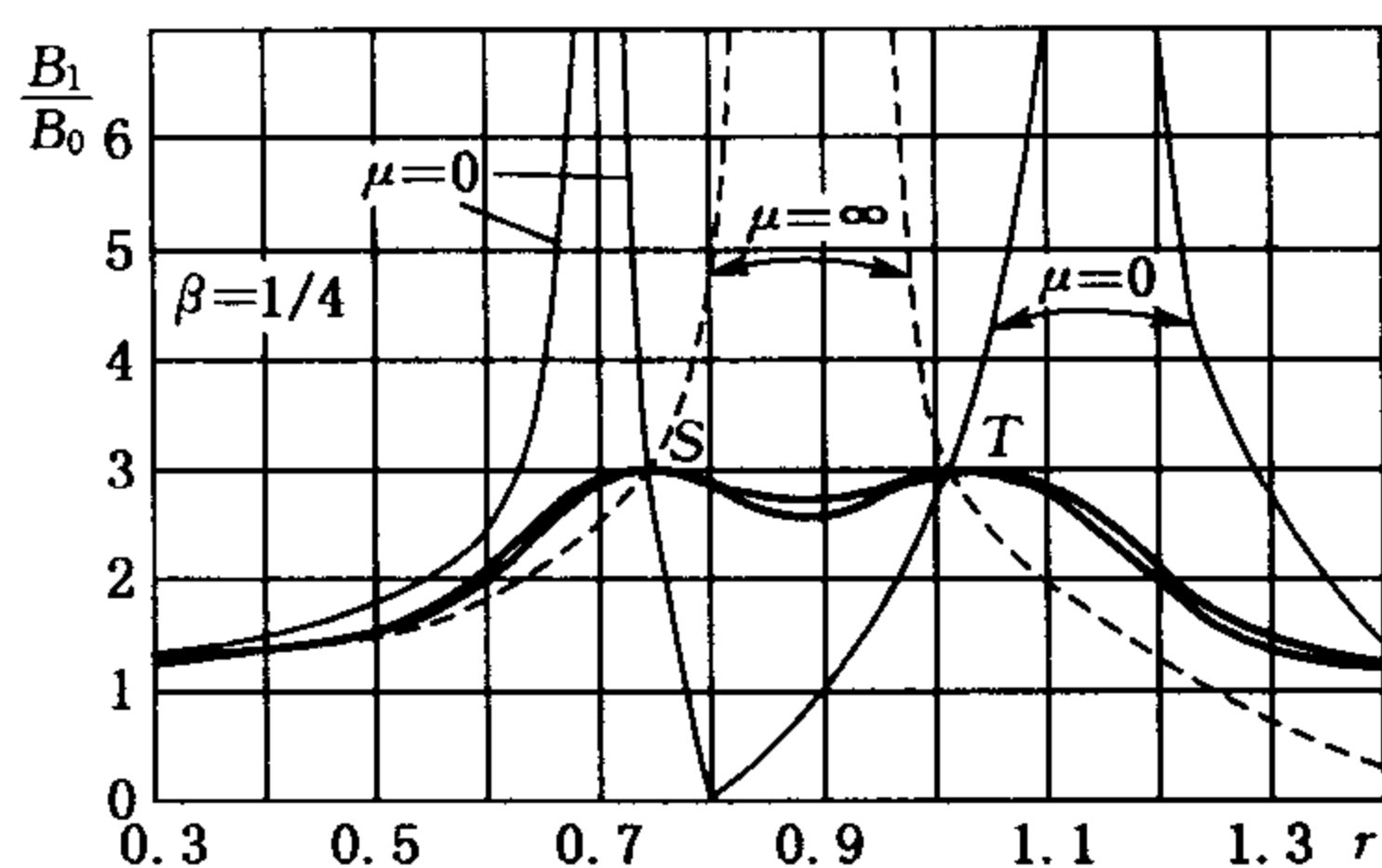


图 3-18 选择合理阻尼的主质量的幅频特性

3.5 坐标的耦合与解耦

3.5.1 广义坐标与耦合

所谓广义坐标是指可以任意选择的足以描述系统在空间位置的一组彼此独立的坐标。同一系统可以用不同的坐标系来描述。若同一系统用不同的坐标来描述,系统的质量矩阵 $[M]$ 、刚度矩阵 $[K]$ 及阻尼矩阵 $[C]$ 的元素可能是不相同的,但并不影响系统的固有特性。也就是说坐标可以任意选择,对问题的研究没有影响。但合理的选择坐标可以使问题的分析简便。

为了说明坐标选择对耦合的影响,现对图 3-19(a)所示无阻尼系统选择几种坐标,写出其运动方程。图中质量为 m 的刚性杆件,由弹簧 k_1 和 k_2 支承于杆的 A 、 D 点,约束是为了限制杆沿 x 方向的平动, C 点为杆的质心, J_c 表示绕通过 C 点垂直于 Z 轴的转动惯量, B 点满足的条件为

$$k_1 L_4 = k_2 L_5 \quad (a)$$

图 3-19(b)选择 A 点的平动坐标 y_A , 和 A 点的角位移, θ_A 、 D 处的弹簧力和 C 点的惯性力如图 3-19(b)所示。此时,根据达朗培尔原理,得出沿 y 方向的力的平衡方程

$$m(\ddot{y}_A + L_1 \ddot{\theta}_A) + k_1 y_A + k_2 (y_A + L \theta_A) = 0 \quad (b)$$

对 A 点计算力矩,可得到第二个平衡方程

$$m(\ddot{y}_A + L_1 \ddot{\theta}_A) L_1 + k_2 (y_A + L \theta_A) + J_c \ddot{\theta}_A = 0 \quad (c)$$

两个平衡方程(b)和(c)可合写成矩阵形式

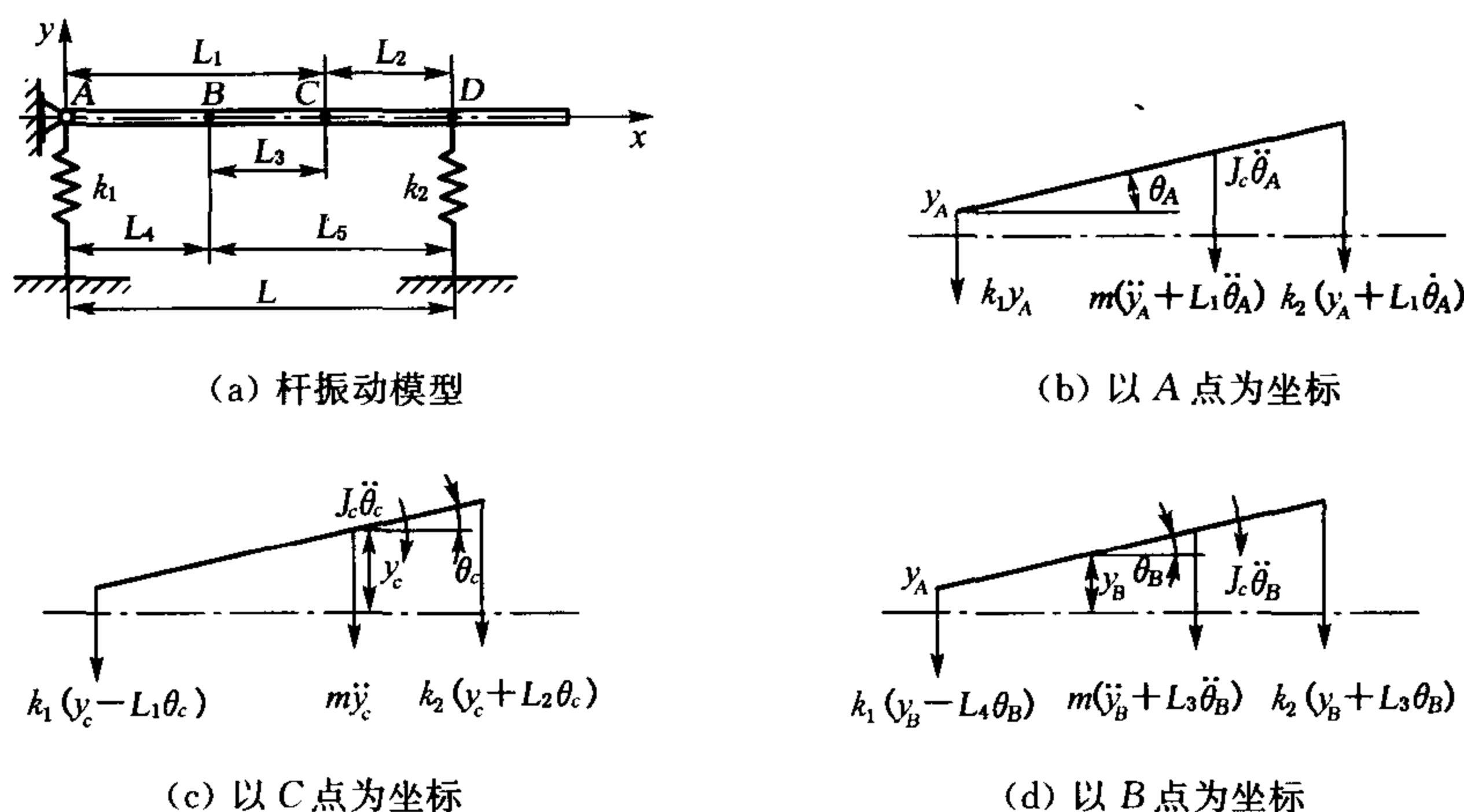


图 3-19 不同坐标的耦合情况

$$\begin{bmatrix} m & mL_1 \\ mL_1 & J_c + mL_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_A \\ \ddot{\theta}_A \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 L \\ k_2 L & k_2 L_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_A \\ \theta_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-62)$$

上述方程的第一、二式都包含有变量的二阶导数 \ddot{y}_A 和 $\ddot{\theta}_A$, 这就是说方程之间存在着惯性力间的相互联系, 这种联系称为动力耦合或惯性耦合。同时这两个方程还各自包含 y_A 和 θ_A , 使两个方程还存在着弹性的联系, 这种联系称为弹性耦合或静力耦合。

图 3-19(c) 是选择质心 C 的位移坐标 y_c 和转动坐标 θ_c , 根据作用于杆上的弹性力和惯性力, 应用达朗培尔原理, 可得杆件的两个运动方程为

$$m\ddot{y}_c + k_1(y_c - \theta_c L_1) + k_2(y_c + \theta_c L_2) = 0 \quad (d)$$

$$J_c \ddot{\theta}_c + k_2(y_c + \theta_c L_2)L_2 - k_1(y_c - \theta_c L_1)L_1 = 0 \quad (e)$$

按矩阵形式可合写成

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_c \\ \ddot{\theta}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 L_2 - k_1 L_1 \\ k_2 L_2 - k_1 L_1 & k_2 L_2^2 + k_1 L_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_c \\ \theta_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-63)$$

方程(3-30)的第一式只包含 \ddot{y}_c 而不包含 $\ddot{\theta}_c$, 第二式只包含 $\ddot{\theta}_c$ 而不包含 \ddot{y}_c , 故不存在动力耦合。但两个方程各自都包含 y_c 和 θ_c , 使两个方程存在着弹性耦合。即用这组坐标描述系统的方程没有动力耦合而只有弹性耦合。

图 3-19(d) 是选择 B 点的位移坐标 y_B 和转动坐标 θ_B , 根据作用于杆上的弹性力和惯性力, 同样应用达朗培尔原理, 可得杆件的两个运动方程为

$$m(\ddot{y}_B + \ddot{\theta}_B L_3) + k_1(y_B + \theta_B L_4) + k_2(y_B + \theta_B L_5) = 0 \quad (f)$$

$$J_c \ddot{\theta}_B + m(\ddot{y}_B + \ddot{\theta}_B L_3)L_3 + k_2(y_B + \theta_B L_5)L_5 - k_1(y_B - \theta_B L_4)L_4 = 0 \quad (g)$$

按矩阵形式, 注意到(a)式所给的条件, (f)式和(g)方程可写成

$$\begin{bmatrix} m & mL_3 \\ mL_3 & J_c + mL_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_B \\ \ddot{\theta}_B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & k_2 L_5^2 + k_1 L_4^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_B \\ \theta_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-64)$$

也就是说采用点的两个坐标 y_B 和 θ_B 来描述系统时, 则两个方程不存在弹性耦合, 而只有动力耦合。

以上采用不同的坐标来描述同一系统时, 其质量矩阵 $[M]$ 及刚度矩阵 $[K]$ 中的元素是

不相同的,用C点的两个坐标 y_c 和 θ_c 来描述系统时,其质量矩阵是对角矩阵,称为动力解耦。当用B点的两个坐标 y_B 和 θ_B 来描述系统时,其刚度矩阵是对角阵,称为静力解耦。坐标选取不同,就可改变方程的耦合情况。由此推论,只要坐标选取得当,可以使两种耦合都解除。这就是主坐标。若动力和静力均解耦,则几个联立微分方程组就变成几个独立的微分方程,就可像单自由度系统那样独立地求解方程。

3.5.2 解耦与主坐标

从上节的讨论可知由于描述系统的坐标选择不同,则质量矩阵 $[M]$ 和刚度矩阵 $[K]$ 出现的耦合情况就不同。现以双质量弹簧系统为例,其运动方程为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (a_1)$$

这个方程组一般情况是耦合的。在本章第二节是我们曾求得(3-9)式的两振型为

$$\gamma_1 = \frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}}, \quad \gamma_2 = \frac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}}$$

这两个振型说明:当按第一固有频率 ω_{n1} 振动时,如 m_1 的位移为 γ_1 ,则 m_2 的位移为 1;当按第二固有频率 ω_{n2} 振动时,如 m_1 的位移为 γ_2 ,则 m_2 的位移为 1。我们可以把振型写成矩阵形式,即方程(3-10)中的振型矩阵

$$[A] = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

现在引入一组新的坐标 $\{q\}$,并在原坐标 $\{x\}$ 与新坐标进行变换时,把振型矩阵作为变换矩阵,即

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

则

$$\begin{cases} x_1 = \gamma_1 q_1 + \gamma_2 q_2 \\ x_2 = q_1 + q_2 \end{cases} \quad (b_1)$$

把(a₁)式展开

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ m_1 \ddot{x}_1 + k_{11} x_1 + k_{12} x_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_{21} x_1 + k_{22} x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (c_1)$$

将(b₁)式代入(c₁)式,得

$$m_1 (\gamma_1 \ddot{q}_1 + \gamma_2 \ddot{q}_2) + K_{11} (\gamma_1 q_1 + \gamma_2 q_2) + K_{12} (q_1 + q_2) = 0 \quad (d_1)$$

$$m_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + K_{21} (\gamma_1 q_1 + \gamma_2 q_2) + K_{22} (q_1 + q_2) = 0 \quad (e_1)$$

将(d₁)式乘 m_2 , (e₁)式乘 $m_1 \gamma_1$ 然后两式相减得

$$\begin{aligned} m_1 m_2 (\gamma_1 - \gamma_2) \ddot{q}_2 + (K_{11} \gamma_2 m_2 + K_{12} m_2 - K_{21} m_1 \gamma_1 \gamma_2 - K_{22} m_1 \gamma_1) q_2 \\ + (K_{11} \gamma_1 m_2 + K_{12} m_2 - K_{21} m_1 \gamma_1^2 - K_{22} m_1 \gamma_1) q_1 = 0 \end{aligned}$$

并将

$$\gamma_1 = \frac{K_{22} - \omega_{n1}^2 m_2}{-K_{21}}, \quad \gamma_2 = \frac{K_{22} - \omega_{n2}^2 m_2}{-K_{21}}$$

代入上式,可得

$$\ddot{q}_2 + \omega_{n2}^2 q_2 = 0 \quad (f_1)$$

同理可得

$$\ddot{q}_1 + \omega_{n2}^2 q_1 = 0 \quad (g_1)$$

方程(f₁)和(g₁)是两个独立的微分方程,可以单独求解,一组新的坐标 q_1 和 q_2 就是主坐标,也称模态坐标。

从数学上可以表达如下

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} &= \{0\} \\ [M][A]\{\ddot{q}\} + [K][A]\{q\} &= \{0\} \\ [A]^T[M][A]\{\ddot{q}\} + [A]^T[K][A]\{q\} &= \{0\} \\ [M]_P\{\ddot{q}\} + [K]_P\{q\} &= \{0\} \end{aligned} \quad (h_1)$$

式(h₁)中 $[M]_P$ 和 $[K]_P$ 称为主质量矩阵和主刚度矩阵。它们都是对角阵

$$[M]_P = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, [K]_P = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}$$

对于双质量弹簧系统,已知 $m_1 = m_2 = m, k_1 = k_2 = k$,由本章第二节中可知

$$[A] = \begin{bmatrix} 0.618 & -1.618 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, [M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} [M]_P &= [A]^T[M][A] \\ &= \begin{bmatrix} 0.618 & 1 \\ -1.618 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.618 & -1.618 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.382m & 0 \\ 0 & 3.618m \end{bmatrix} \\ [K]_P &= [A]^T[K][A] \\ &= \begin{bmatrix} 0.618 & 1 \\ -1.618 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.618 & -1.618 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.528k & 0 \\ 0 & 9.47k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

将 $[M]_P$ 和 $[K]_P$ 代入(h₁)式,得

$$\begin{bmatrix} 1.382m & 0 \\ 0 & 3.618m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.528k & 0 \\ 0 & 9.47k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (i_1)$$

从(i₁)式可求得

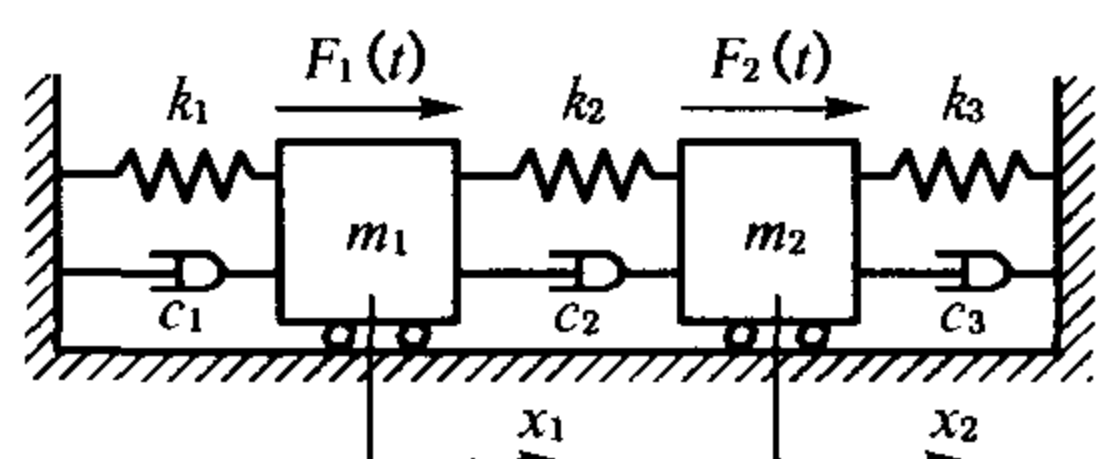
$$\begin{aligned} \omega_{n1}^2 &= \frac{0.528k}{1.382m} = 0.382 \frac{k}{m} \\ \omega_{n2}^2 &= \frac{9.47k}{3.618m} = 2.618 \frac{k}{m} \end{aligned}$$

这与例3-1求得的结果完全一致。

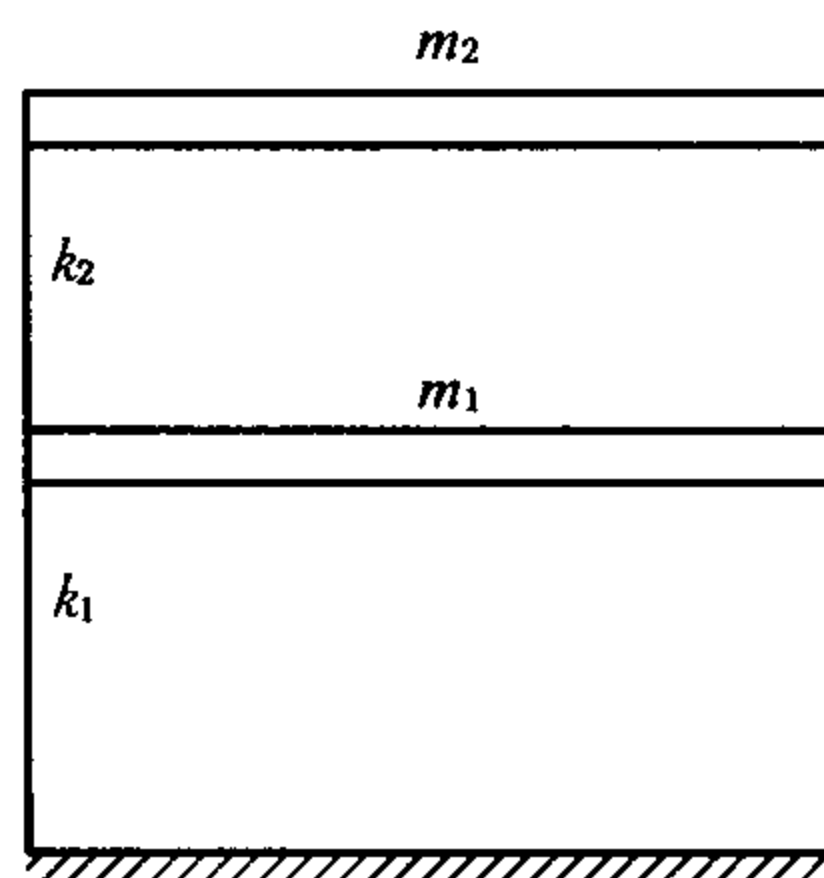
习题与思考题

3.1 二自由度系统有几个固有频率?

- 3.2 为什么必须要考虑二自由度系统振动的振型?
- 3.3 二自由度系统主振型所表示的意义是什么?
- 3.4 坐标的耦合有哪两种,其含义是什么?
- 3.5 二自由度系统强迫振动时的振型与主振型之间有什么关系?
- 3.6 试求习题图 3-1 所示二自由度的运动方程及其质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵。



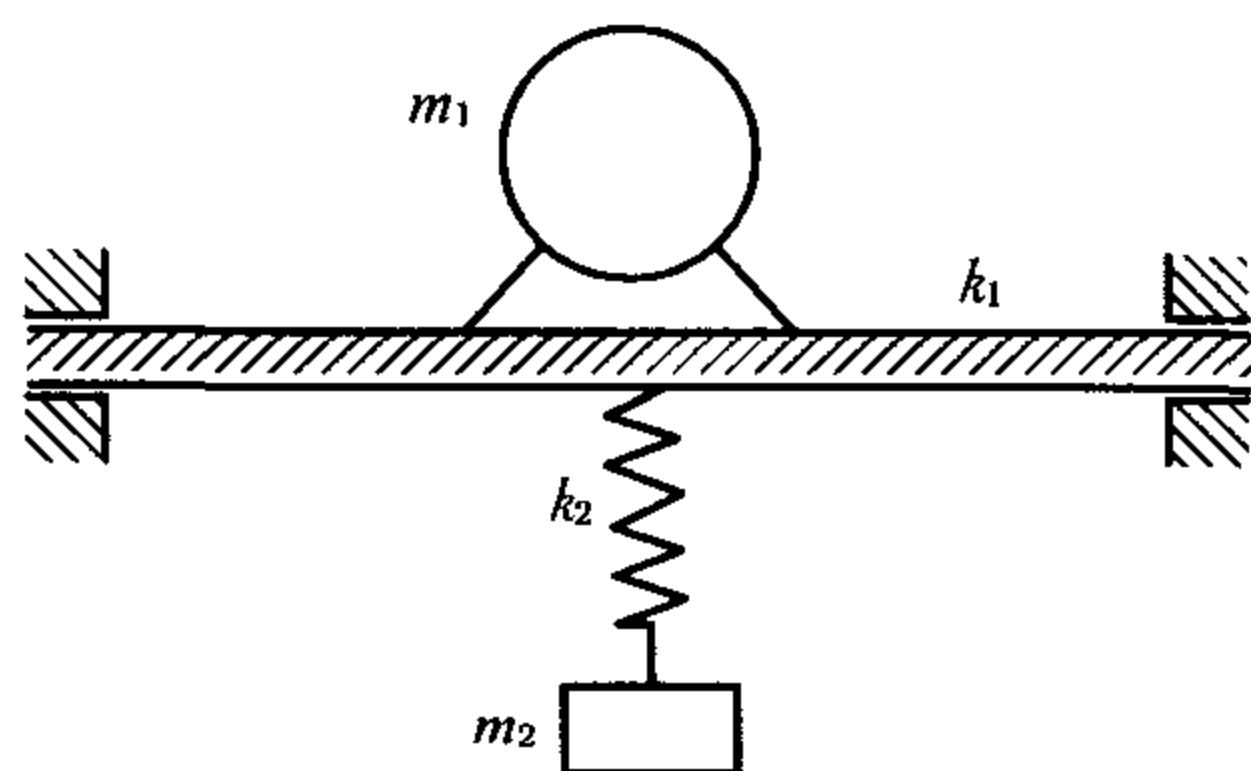
习题图 3-1



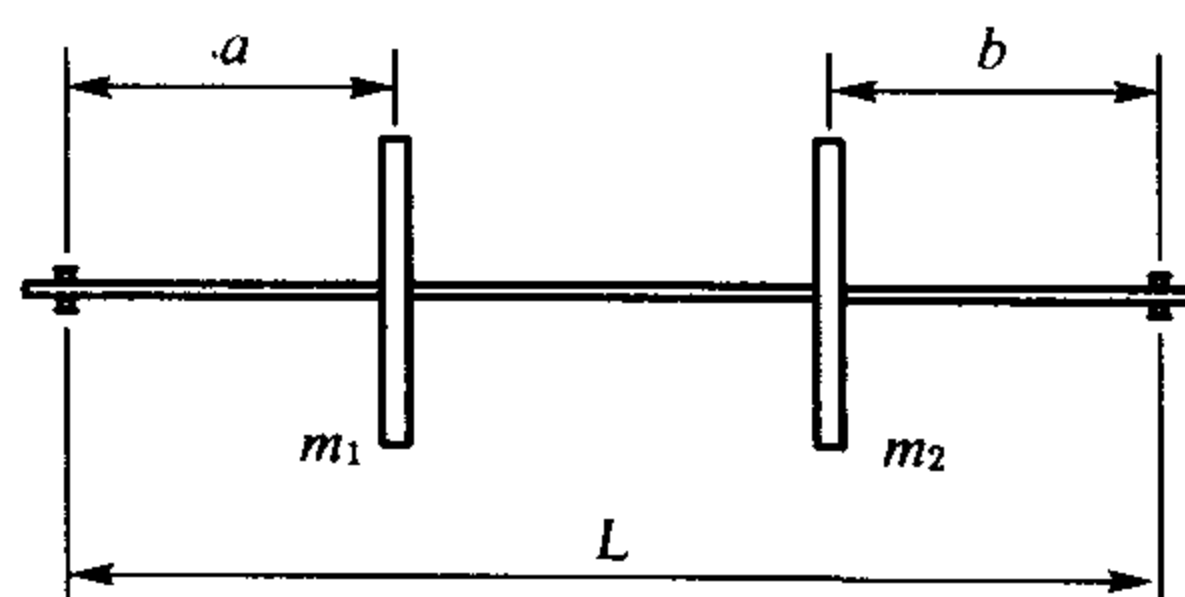
习题图 3-2

3.7 习题图 3-2 所示为二自由度建筑结构,图中 $m_1 = 1.5m$, $m_2 = m$, $k_1 = 1.5k$, $k_2 = k$, 试计算该系统的固有频率和对应的主振型,并画出振型图。

3.8 习题图 3-3 所示为二自由度系统,机器质量 m_1 ,支于刚度为 k_1 的梁上,机器转速为 1500 r/min,由于转子的质量不平衡引起的离心力的垂直分量使系统产生上下激烈振动。为控制该振动,现设一辅助系统,已确定辅助系统的质量 m_2 为 40 kg,求辅助系统的弹簧刚度 k_2 。



习题图 3-3



习题图 3-4

3.9 习题图 3-4 所示为双转子系统,可视为一具有两个集中质量的简支梁,试计算该系统的固有频率。提示:集中质量处的横向位移表达式为 $\frac{m_1 g a^2 (l-a)^2}{3EIL}$ 。式中: g ——重力加速度; E ——材料弹性模量, $E = 2.0 \times 10^5$ MPa; I ——轴的截面惯性矩, $I = \frac{\pi}{64} d^2$, d 为转轴直径。

第4章 多自由度系统的振动

4.1 多自由度系统的振动微分方程

前面各章讨论了具有一个和两个自由度的系统,对很多问题来说,已能够用来解释它们的动力特性。但也有很多问题,不能用这种过分简化的力学模型来进行分析,例如,工程上常见的机械零件总是由梁、杆、板、壳或其他各种元件组成的复杂的弹性结构,其质量和刚度都是分布的,理论上都是一些具有无限多自由度的系统,即连续弹性体。在系统的质量和刚度分布得不很均匀的情况下,可以把弹性体系统的振动简化为具有有限多个自由度的系统来分析,以得到它主要的,即较低频率的一些特性和规律。

近几十年来,随着电子计算机的广泛运用,一种更有效的离散化方法——有限元法,得到了迅速的发展,应用这种方法,可使任何复杂的弹性结构的振动问题,都离散化为多自由度系统来处理,限于篇幅,这种方法在本教程中不做详细介绍。

多自由度系统与二自由度系统并没有本质的区别,只是由于自由度数的增加,在分析和计算时需要更有效的处理方法。对于多自由度系统的这组耦合的二阶常微分方程组,可以采用直接求其解析解或数值解的方法进行研究,也可采用另一种更便于分析的解法,那就是振型叠加法(模态分析法)。这种方法是通过坐标变换,使一组互相耦合的二阶常微分方程组变成一组互相独立的二阶常微分方程组,其中每个方程就如单自由度系统那样求解,这不仅在系统受有更复杂载荷情况下,可以简化运动分析的过程,而且各阶固有频率对整个振动的参与情况也一目了然。

本章首先叙述多自由度系统振动微分方程的建立方法,包括用牛顿定律建立的刚度系数法和应用达朗培尔原理的柔度系数法,以及更为普遍的拉格朗日方程法。为了能够用线性变换把系统的运动方程简化为比较简单的形式,求得振型矩阵和特征值是必需的。在此基础上介绍振型叠加法。最后介绍求解固有频率的几种近似方法。

4.1.1 作用力方程与刚度系数

对于图4-1所示无阻尼三自由度弹簧质量系统,我们可参照二自由度系统的方法,写出其微分方程

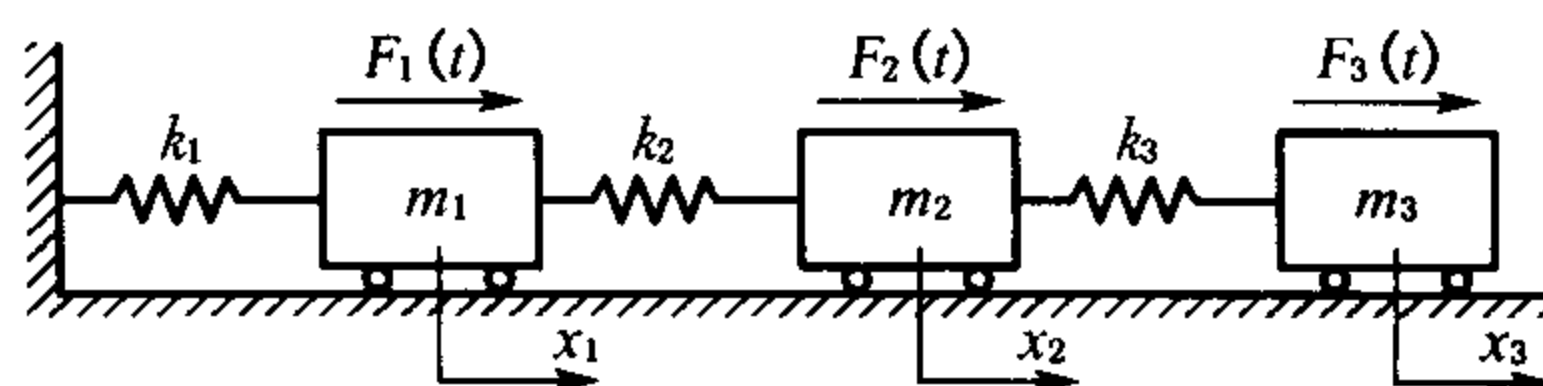


图4-1 三自由度弹簧质量系统

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix} \quad (4-1)$$

或更一般地写成

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix}$$

该式可简单地写成

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \quad (4-2)$$

(4-2)式称为用矩阵符号表示的作用力方程,它可以代表许多种运动方程,其中的作用力也可以是力或力矩;位移可以是线位移或角位移,线刚度和质量也可以是角刚度和转动惯量。

刚度矩阵中的元素 k_{ij} 表示质量 m_j 的位移 $x_j = 1$;而其余质量位移 $x_i (i \neq j) = 0$ 时在 x_i 处所需要的力,称为刚度系数。

令质量 m_1 的位移 $x_1 = 1$,而 $x_2 = x_3 = 0$,为保持这种状态,则在 m_1 、 m_2 和 m_3 上所需的力分别为

$$k_{11} = k_1 x_1 + k_2 x_1 = k_1 + k_2$$

$$k_{21} = -k_2 x_1 = -k_2$$

$$k_{31} = 0$$

它们构成了刚度矩阵的第一列。

同理,可得刚度矩阵的第二列、第三列分别为

$$k_{12} = -k_2 \quad K_{13} = 0$$

$$k_{22} = k_2 + k_3 \quad K_{23} = -k_3$$

$$k_{32} = -k_3 \quad K_{33} = k_3$$

线弹性系统微幅振动的刚度矩阵总是对称的,即 $K_{ij} = k_{ji}$ 的关系是永远存在的。图4-1所示集中质量块的模型,其位移坐标是集中在各自的质心上的,故其质量矩阵是对角阵。因此,只要应用刚度系数法,求出刚度矩阵的每一元素,即可建立系统的运动微分方程。

若系统存在阻尼,则与弹簧并行的还应画出阻尼器。对于黏性阻尼,阻尼矩阵的每一个元素 C_{ij} 可以如下求得:当第 j 个质量具有单位速度而其他质量的速度均为零时,克服第 j 个质量的阻尼器阻力而在第 i 个质量上所需施加的力。然后把阻尼力这一项加到运动方程中去,就可得到具有阻尼的多自由度系统用矩阵符号表示的运动微分方程

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \quad (4-3)$$

有阻尼和无阻尼的自由振动微分方程分别为

$$[M]\{\dot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = 0 \quad (4-4)$$

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0$$

4.1.2 位移方程和柔度系数

机械系统还可以通过受力后产生的变形来建立系统的运动方程,这样建立的运动方程称为位移方程。同一系统,同一广义坐标的作用力方程和位移方程是等价的。现引进柔度

的概念,在单位力作用下,弹簧常数为 k 的弹簧所产生位移 δ 称为弹簧的柔度,显然 $\delta = \frac{1}{k}$, 对于图 4-1 所示系统 3 个弹簧的柔度分别为

$$\delta_1 = \frac{1}{k_1}, \delta_2 = \frac{1}{k_2}, \delta_3 = \frac{1}{k_3}$$

假定图 4-1 所示系统各质量上的力 $F_1(t)$, $F_2(t)$ 和 $F_3(t)$ 是静止地作用上去的(以致不出现惯性力),则各质量块的位移为

$$(x_1)_{st} = \delta_1 [F_1(t) + F_2(t) + F_3(t)] \quad (a)$$

$$(x_2)_{st} = \delta_1 [F_1(t) + F_2(t) + F_3(t)] + \delta_2 [F_2(t) + F_3(t)] \quad (b)$$

$$(x_3)_{st} = \delta_1 [F_1(t) + F_2(t) + F_3(t)] + \delta_2 [F_2(t) + F_3(t)] + \delta_3 F_3(t) \quad (c)$$

(a)、(b)、(c)三式以矩阵形式表示如下

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_{st} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_1 & \delta_1 \\ \delta_1 & \delta_1 + \delta_2 & \delta_1 + \delta_2 \\ \delta_1 & \delta_1 + \delta_2 & \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix} \quad (d)$$

$$\text{简写成} \quad \{x\}_{st} = [\delta] \{F(t)\} \quad (e)$$

式中 $[\delta]$ 表示柔度矩阵

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_1 & \delta_1 \\ \delta_1 & \delta_1 + \delta_2 & \delta_1 + \delta_2 \\ \delta_1 & \delta_1 + \delta_2 & \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \end{bmatrix} \quad (f)$$

这个矩阵包括柔度影响系数,柔度系数 δ_{ij} 定义为:在第 j 个质量上作用单位力时,在第 i 个质量上所产生的位移。对于图 4-1 所示系统,令 $F_1(t) = 1$, $F_2(t) = F_3(t) = 0$, 则各质量块产生的位移为

$$\delta_{11} = \delta_{21} = \delta_{31} = \delta_1$$

它们组成了柔度矩阵的第一列。

如令 $F_2(t) = 1$, $F_1(t) = F_3(t) = 0$, 则各质量块的位移分别为

$$\delta_{12} = \delta_1$$

$$\delta_{22} = \delta_1 + \delta_2$$

$$\delta_{32} = \delta_1 + \delta_2$$

它们组成柔度矩阵的第二列。

同理,令 $F_3(t) = 1$, $F_1(t) = F_2(t) = 0$, 则各质量块的位移分别为

$$\delta_{13} = \delta_1$$

$$\delta_{23} = \delta_1 + \delta_2$$

$$\delta_{33} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

它们组成了柔度矩阵的第三列。

同时可以看到,如刚度矩阵那样,线性系统的柔度矩阵总是对称的,即 $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ 。

现在令 $F_1(t)$, $F_2(t)$ 和 $F_3(t)$ 是随时间变化的动态力。故必须考虑惯性力 $-m_1\ddot{x}_1$, $-m_2\ddot{x}_2$ 和 $-m_3\ddot{x}_3$, 在此情况下,重写(d)式,得

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_1 & \delta_1 \\ \delta_1 & \delta_1 + \delta_2 & \delta_1 + \delta_2 \\ \delta_1 & \delta_1 + \delta_2 & \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1(t) - m_1\ddot{x}_1 \\ F_2(t) - m_2\ddot{x}_2 \\ F_3(t) - m_3\ddot{x}_3 \end{Bmatrix} \quad (g)$$

如果将质量和加速度阵列分开来放置,则(g)式写成下列展开形式

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_1 & \delta_1 \\ \delta_1 & \delta_1 + \delta_2 & \delta_1 + \delta_2 \\ \delta_1 & \delta_1 + \delta_2 & \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} \quad (4-5)$$

或更简单地表达为

$$\{x\} = [\delta](\{F(t)\} - [M]\{\ddot{x}\}) \quad (4-6)$$

这个式子表示:动力位移等于柔度矩阵与作用力的乘积,所施加的作用力和惯性作用力均包括在右边的括号内。对于 n 个自由度系统,上式表示 n 个方程组。

为了将位移方程与作用力方程作比较,对(4-2)式求得 x 如下

$$\{x\} = [K]^{-1}(\{F(t)\} - [M]\{\ddot{x}\}) \quad (h)$$

比较(4-6)式和(h),可以得到

$$[\delta] = [K]^{-1} \quad (4-7)$$

为对应于同一系统同一坐标的柔度矩阵 $[\delta]$ 与刚度矩阵 $[K]$ 式。如果对(4-5)式中的柔度矩阵 $[\delta]$ 求逆,可通过行列式及矩阵运算,并应用 $\delta_1 = \frac{1}{k_1}$, $\delta_2 = \frac{1}{k_2}$, $\delta_3 = \frac{1}{k_3}$ 的关系得到

$$[\delta]^{-1} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

这刚好是运动作用力方程(4-1)式的刚度矩阵。

对大多数振动系统,运用带有刚度系数的作用力方程是比较容易分析的,但在有些情况下,用柔度系数的位移方程更为方便。

【例 4-1】 图 4-2(a)表示 3 个质量 m_1 , m_2 , m_3 固定在一紧弦上,各跨距相等,均为 L ,求系统质量在垂直方向的自由振动方程。

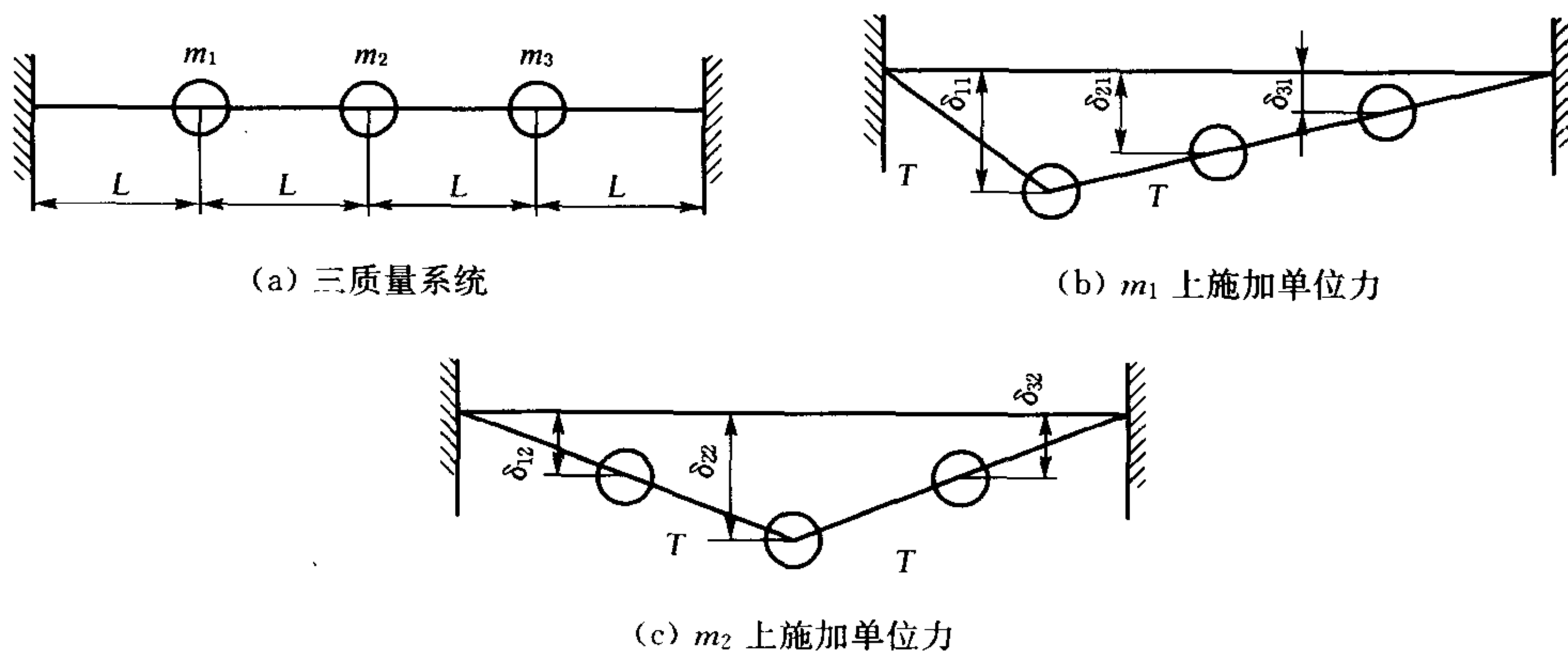


图 4-2 一张紧弦上的质量系统

解: 根据柔度系数的定义,首先对 m_1 施加单位力,于是系统就产生如图 4-2(b)所示的变形。设弦的张力 T 较大而质量位移较小,故可认为在振动过程中弦的张力 T 保持不变,质量 m_1 的受力平衡方程为

$$T \sin \alpha_1 + T \sin \alpha_2 = 1$$

由于 $\sin a_1 = \frac{\delta_{11}}{L}, \quad \sin a_2 = \frac{\delta_{11}}{3L}$

因此有 $\frac{T\delta_{11}}{L} + \frac{T\delta_{11}}{3L} = 1, \quad \delta_{11} = \frac{3L}{4T}$

根据图 4-2(b) 的比例关系得

$$\frac{\delta_{11}}{3L} = \frac{\delta_{21}}{2L} = \frac{\delta_{31}}{L}$$

于是

$$\delta_{21} = \frac{2}{3}\delta_{11} = \frac{L}{2T}$$

$$\delta_{31} = \frac{1}{3}\delta_{11} = \frac{L}{4T}$$

由于对称关系, 当对 m_3 施加一铅垂方向的单位力时, 有

$$\delta_{33} = \delta_{11} = \frac{3L}{4T}, \quad \delta_{23} = \delta_{21} = \frac{L}{2T}, \quad \delta_{13} = \delta_{31} = \frac{L}{4T}$$

对 m_2 施加一铅垂方向的单位力时, 其变形如图 4-3(c) 所示, 可得

$$\delta_{22} = \frac{L}{T}, \quad \delta_{21} = \delta_{32} = \frac{L}{2T}$$

因此得柔度矩阵为

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \frac{3L}{4T} & \frac{L}{2T} & \frac{L}{4T} \\ \frac{L}{2T} & \frac{L}{T} & \frac{L}{2T} \\ \frac{L}{4T} & \frac{L}{2T} & \frac{3L}{4T} \end{bmatrix} = \frac{L}{4T} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

根据(4-6)式, 系统自由振动的微分方程为

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} + \frac{L}{4T} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

4.1.3 拉格朗日方程的应用

多自由度系统虽然可以直接用刚度系数法和柔度系数法来建立系统的运动微分方程, 但是在许多情况下运用拉格朗日方程更为方便。实际上, 拉格朗日方程是第二章讲过的能量法的推广。对于一个守恒系统, 系统的动能和势能的总和是常数, 即

$$\frac{d}{dt}(T+U) = 0$$

式中: T ——系统动能, 它是系统广义速度和广义坐标的函数。

U ——系统的势能, 是系统广义坐标的函数。

第二章中已导出单自由度系统的动能和势能为

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad U = \frac{1}{2}kx^2$$

这个结论推广到多自由度系统, 并用广义坐标表示为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (\text{a})$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i q_j \quad (\text{b})$$

写成矩阵形式分别为

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\} \quad (\text{c})$$

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} \quad (\text{d})$$

对动能和势能分别进行全微分,可得

$$dT = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] dq_i \quad (\text{e})$$

$$dU = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_i \quad (\text{f})$$

根据机械能守恒定律,可得

$$\frac{d}{dt}(T+U) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} \right] dq_i = 0 \quad (\text{g})$$

因为 n 个独立广义坐标是独立的,且 dq_i 不可能全等于零,因此上式成立的条件为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2 \cdots n) \quad (\text{h})$$

当系统上还作用有除势力以外的附加力时,其他外力 Q_i 在 dq_i 上所做的功为

$$dW = \sum_{i=1}^n Q_i dq_i$$

令 $\frac{d}{dt}(T+U) = dW$ 可得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (4-8)$$

式(4-8)就是拉格朗日方程,式中是除有势力以外的所有外力,其中包括阻尼力,阻尼力可表示为

$$Q_k = - \sum_{i=1}^n c_{ij} \dot{q}_i$$

【例 4-2】 用拉格朗日方程求图 4-1 所示的自由振动微分方程。

解: 设各质量 m_1, m_2, m_3 离开平衡位置的位移分别为 x_1, x_2, x_3 并把它们作为广义坐标,则

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + m_3 \dot{x}_3^2)$$

$$U = \frac{1}{2} [k_1 x_1^2 + k_2 (x_2 - x_1)^2 + k_3 (x_3 - x_2)^2]$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} = m_3 \dot{x}_3$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \ddot{x}_2, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} \right) = m_3 \ddot{x}_3$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial T}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = -k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_3} = -k_3x_2 + k_3x_3$$

根据拉格朗日方程,图 4-1 所示系统的自由振动微分方程为

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3 = 0$$

$$m_3\ddot{x}_3 - k_3x_2 + k_3x_3 = 0$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

该方程与式(4-1)对应的齐次方程是一样的。

【例 4-3】 图 4-3 表示串联在一起的数学摆,且 $L_1 = L_2 = L_3 = L$, $m_1 = m_2 = m_3 = m$, 试用拉格朗日方程建立系统的运动微分方程。

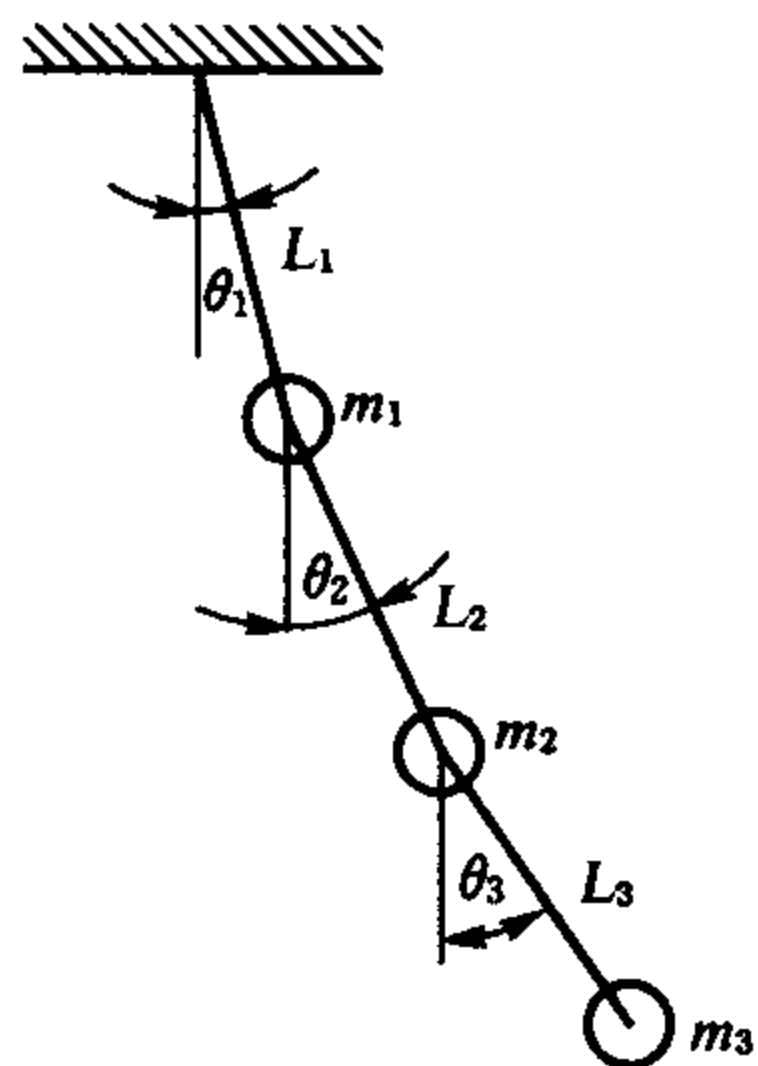


图 4-3 串联数学摆模型

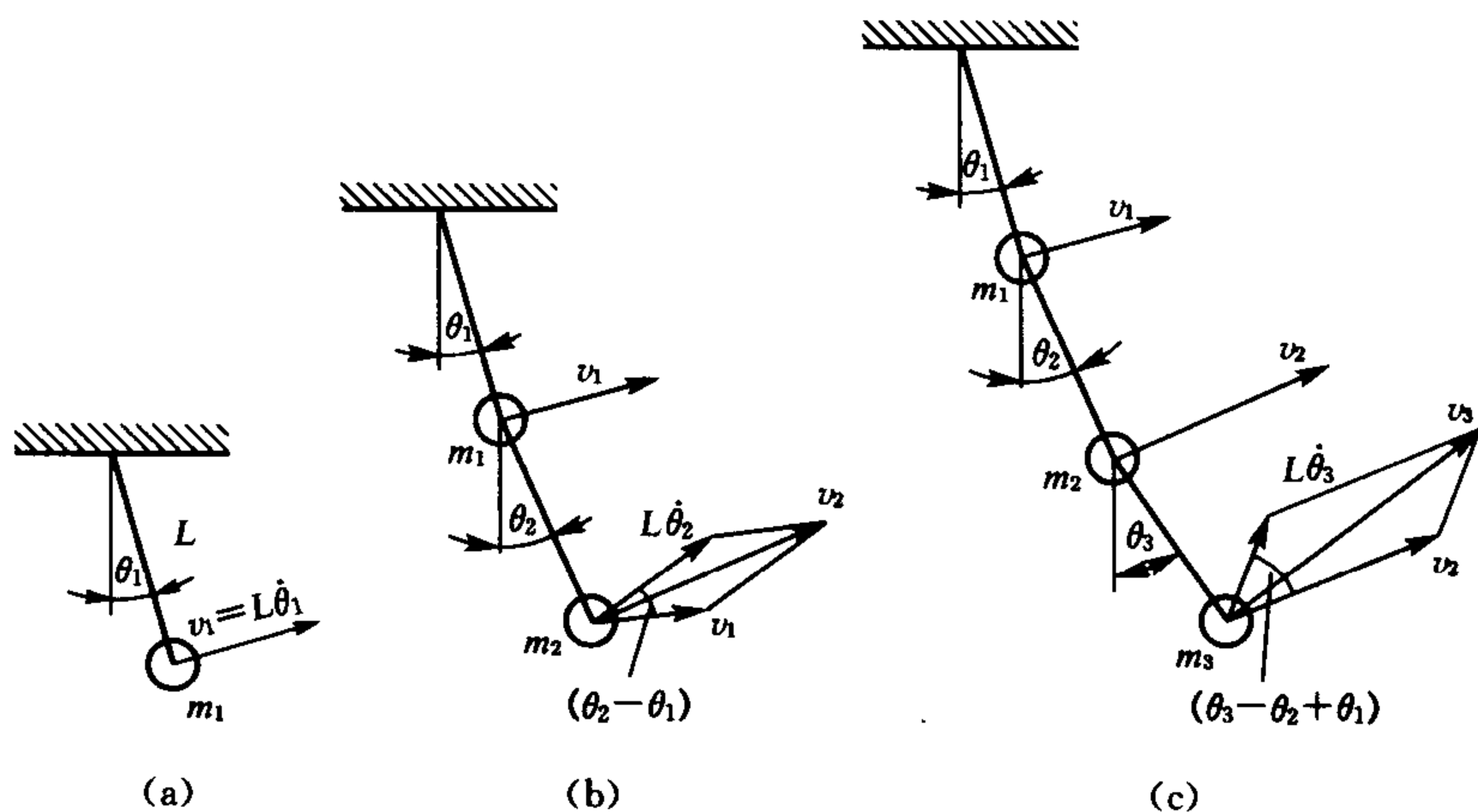


图 4-4 摆锤的速度分解图

解: 3 个摆在某瞬时的位置用 3 个与铅垂线的夹角 θ_1 、 θ_2 和 θ_3 表示,用速度合成法把 3 个摆锤的绝对速度图解于图 4-4,得各速度分别为

$$v_1^2 = (L\dot{\theta}_1)^2$$

$$\begin{aligned} v_2^2 &= (L\dot{\theta}_1)^2 + (L\dot{\theta}_2)^2 + 2L^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2 - \theta_1) \\ &\approx L^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) = \dot{L}^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3^2 &= v_2^2 + (L\dot{\theta}_3)^2 + 2v_2(L\dot{\theta}_3)\cos(\theta_3 - \theta_2 + \theta_1) \\ &\approx \dot{L}^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 \end{aligned}$$

故系统的动能为

$$T = \frac{mL^2}{2} [\dot{\theta}_1^2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2]$$

系统的势能为

$$U = 3mgL(1 - \cos \theta_1) + 2mgL(1 - \cos \theta_2) + mgL(1 - \cos \theta_3)$$

把 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 看作广义坐标, 利用拉格朗日方程, 可得相应于 3 个坐标的运动方程

$$3mL^2\ddot{\theta}_1 + 2mL\ddot{\theta}_2 + mL\ddot{\theta}_3 + 3mL\theta_1 = 0$$

$$2mL^2\ddot{\theta}_1 + 2mL\ddot{\theta}_2 + mL\ddot{\theta}_3 + 2mL\theta_2 = 0$$

$$mL^2\ddot{\theta}_1 + mL\ddot{\theta}_2 + mL\ddot{\theta}_3 + mL\theta_3 = 0$$

写成矩阵形式为

$$mL^2 \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + mgL \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

从以上例子可以看出, 用拉格朗日方程法建立系统的运动方程较为规范化, 对复杂系统只要写出系统的动能和势能, 建立的方程不易出错, 这是拉格朗日方程的优点。

4.1.4 固有频率和主振型

1) 固有频率

已知无阻尼的 n 自由度系统的自由振动微分方程具有下述一般形式

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (4-9)$$

式中 $m_{ij} = m_{ji}$, $k_{ij} = k_{ji}$

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (4-10)$$

设上式的解为

$$x_i = A_i (\sin \omega_n t + \varphi) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad (4-11)$$

即假设系统偏离静平衡位置后作自由振动时, 各 x_i 在同一固有频率 ω_n , 同一相位角 φ 作自由振动, 式中 A_i 表示 x_i 的振幅。将所设解代入(4-9)式得

$$\left. \begin{aligned} (K_{11} - M_{11}\omega_n^2)A_1 + (K_{12} - M_{12}\omega_n^2)A_2 + \cdots + (K_{1n} - M_{1n}\omega_n^2)A_n &= 0 \\ (K_{21} - M_{21}\omega_n^2)A_1 + (K_{22} - M_{22}\omega_n^2)A_2 + \cdots + (K_{2n} - M_{2n}\omega_n^2)A_n &= 0 \\ \Lambda \\ (K_{n1} - M_{n1}\omega_n^2)A_1 + (K_{n2} - M_{n2}\omega_n^2)A_2 + \cdots + (K_{nn} - M_{nn}\omega_n^2)A_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-12)$$

用矩阵形式表示为

$$[K]\{A\} - \omega_n^2 [M]\{A\} = \{0\} \quad (4-13)$$

式(4-12)或式(4-13)是一组 A_i 的 n 元线性齐次方程组, 其非零解的条件为系数行列式必须等于零

$$\begin{bmatrix} k_{11} - m_{11}\omega_n^2 & k_{12} - m_{12}\omega_n^2 & \cdots & k_{1n} - m_{1n}\omega_n^2 \\ k_{21} - m_{21}\omega_n^2 & k_{22} - m_{22}\omega_n^2 & \cdots & k_{2n} - m_{2n}\omega_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} - m_{n1}\omega_n^2 & k_{n2} - m_{n2}\omega_n^2 & \cdots & k_{nn} - m_{nn}\omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (4-14)$$

上式称为特征方程,即频率方程,其展开后可得 ω_n^2 的 n 次代数方程

$$\omega_n^{2n} + a_1 \omega_n^{2(n-1)} + a_2 \omega_n^{2(n-2)} + \cdots + a_{n-1} \omega_n^2 + a_n = 0 \quad (4-15)$$

对于系统仅在平衡位置附近作微小振动的正定系统来说,从(4-15)式可解得 ω_n^2 的 n 个大于零的正实根,我们称 ω_n^2 的 n 个根为特征值,也就是多自由度系统各阶固有频率的平方值,在大多数情况下,这 n 个频率值是不相等的,可将其从小到大按次序排列如下

$$0 < \omega_{n1} < \omega_{n2} < \cdots < \omega_{nn-1} < \omega_{nn} \quad (4-16)$$

2) 无阻尼自由振动的一般解

在求得各阶固有频率 ω_{nj} 后,从式(4-12)中划去不独立的某一式(如最后一式),并将其余的 $n-1$ 个方程式中某一相同的 A_i 项(如 A_n 项)移到等式右边,把 ω_{nj}^2 ($j=1, 2, \cdots, n$) 值代入 ω_n^2 , 可得如下方程组

$$\left. \begin{aligned} (k_{11} - m_{11}\omega_{nj}^2)A_1 + (k_{12} - m_{12}\omega_{nj}^2)A_2 + \cdots + (k_{1n-1} - m_{1n-1}\omega_{nj}^2)A_{n-1} \\ = - (k_{1n} - m_{1n}\omega_{nj}^2)A_n \\ (k_{21} - m_{21}\omega_{nj}^2)A_1 + (k_{22} - m_{22}\omega_{nj}^2)A_2 + \cdots + (k_{2n-1} - m_{2n-1}\omega_{nj}^2)A_{n-1} \\ = - (k_{2n} - m_{2n}\omega_{nj}^2)A_n \\ \dots\dots\dots \\ (k_{n-11} - m_{n-11}\omega_{nj}^2)A_1 + (k_{n-12} - m_{n-12}\omega_{nj}^2)A_2 + \cdots + (k_{n-1n-1} - m_{n-1n-1}\omega_{nj}^2)A_{n-1} \\ = - (k_{n-1n} - m_{n-1n}\omega_{nj}^2)A_n \end{aligned} \right\} \quad (4-17)$$

这样就可以对 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ 求解,若式(4-17)左边系数行列式值为零,则要另选其他 A_i 项移置右端。显然,求得的各 A_i 值($i=1, 2, \cdots, n-1$)都与 A_n 成正比,这样我们就可求得对应于固有频率 ω_{nj} 的 n 个振幅值 $A_1^{(j)}, A_2^{(j)}, \cdots, A_n^{(j)}$ 间的比例关系,称为振幅比。这说明当系统按第 j 阶固有频率 ω_{nj} 做简谐振动时,各质点振幅值 $A_1^{(j)}, A_2^{(j)}, \cdots, A_n^{(j)}$ 间具有确定的相对比值,或者说系统有一定的形态。对应每一个特征值的振幅向量称之为特征向量。由于特征向量各元素比值完全确定了系统振动的形态,所以又称为主振型。

将求得的固有频率 ω_{nj} 及振幅 $A_i^{(j)}$ ($i, j=1, 2, \cdots, n$) 代回(4-11)式,就得 n 组特解,将这 n 组特解叠加,就得到系统自由振动的一般解,即

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1^{(1)} \sin(\omega_{n1}t + \varphi_1) + A_1^{(2)} \sin(\omega_{n2}t + \varphi_2) + \cdots + A_1^{(n)} \sin(\omega_{nn}t + \varphi_n) \\ x_2 &= A_2^{(1)} \sin(\omega_{n1}t + \varphi_1) + A_2^{(2)} \sin(\omega_{n2}t + \varphi_2) + \cdots + A_2^{(n)} \sin(\omega_{nn}t + \varphi_n) \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= A_n^{(1)} \sin(\omega_{n1}t + \varphi_1) + A_n^{(2)} \sin(\omega_{n2}t + \varphi_2) + \cdots + A_n^{(n)} \sin(\omega_{nn}t + \varphi_n) \end{aligned} \right\} \quad (4-18)$$

由于对于同一阶固有频率 ω_{nj} , 各 $A_1^{(j)}, A_2^{(j)}, \cdots, A_n^{(j)}$ 之间有确定的相对比值,只要其中某一值

已确定,则其他幅值也随之确定,故有 n 个确定振幅的待定常数,另外还有 n 个待定常数 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \cdots \varphi_n$, 故其有 $2n$ 个待定常数,而 n 个二阶常微分方程组刚好有 $2n$ 个初始条件,可以唯一地确定一般解中的 $2n$ 个待定常数。

3) 主振动

如果系统在某一特殊的初始条件下,使得待定常数中只有 $A_i^{(1)} \neq 0$, 而其他 $A_n^{(2)} = A_n^{(3)} = \cdots = A_n^{(n)} = 0$ 则由式(4-18)所表示的系统自由振动的一般解仅保留第一项,成为下列特殊形式

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1^{(1)} \sin(\omega_{n1}t + \varphi_1) \\ x_2 &= A_2^{(1)} \sin(\omega_{n1}t + \varphi_1) \\ &\cdots \\ x_n &= A_n^{(1)} \sin(\omega_{n1}t + \varphi_1) \end{aligned} \right\} \quad (4-19)$$

这时每一坐标均以第一阶固有频率 ω_{n1} 及同一相位角 φ_1 作简谐振动,在振动过程中各振体同时经过平衡位置,也同时达到最大的偏离值,各坐标值在任何瞬间都保持固定不变的比值,即恒有

$$\frac{x_1}{A_1^{(1)}} = \frac{x_2}{A_2^{(1)}} = \cdots = \frac{x_n}{A_n^{(1)}} \quad (4-20)$$

因此列阵 $\{A^{(1)}\}$ 各振幅元素比值完全确定了系统振动的形态,称为第一主振型,由(4-19)式描述的系统的运动,称为系统的第一阶主振动。第一阶主振型列阵表示为

$$\{A^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ \vdots \\ A_n^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (4-21)$$

类似地,当系统在某些特殊的初始条件下,还可产生第二阶,第三阶……直到第 n 阶的主振型和主振动。其相应的主振型列阵为

$$\{A^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \\ \vdots \\ A_n^{(2)} \end{Bmatrix}, \quad \{A^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} A_1^{(3)} \\ A_2^{(3)} \\ \vdots \\ A_n^{(3)} \end{Bmatrix} \cdots \{A^{(n)}\} = \begin{Bmatrix} A_1^{(n)} \\ A_2^{(n)} \\ \vdots \\ A_n^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (4-22)$$

当系统作某一阶主振动时,各坐标振幅的绝对值大小由系统的初始条件决定,但各坐标间振幅的相对比值只决定于系统的物理性质,即由系统的质量矩阵 $[M]$ 和刚度矩阵 $[K]$ 中各元素的值所决定。因此我们不必求出具体初始条件下系统作某一阶主振动时各坐标幅值组成的主振型的具体数值,而可以任意规定其中某一坐标的幅值,例如,对第一阶主振型来说,如 $A_n^{(1)} \neq 0$, 可规定 $A_n^{(1)} = 1$, 这样其他各 $A_1^{(1)}, A_2^{(1)} \cdots A_{n-1}^{(1)}$ 的值也就由(4-17)式确定了。

如果系统的运动方程是通过柔度系统来建立的,则与(4-6)式相似,系统的自由振动微分方程具有下列形式

$$\{x\} + [\delta][M]\{\ddot{x}\} = \{0\} \quad (4-23)$$

展开得

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & & & \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & & & \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (4-24)$$

设其解仍为(4-20)式的形式,将其代入(4-23)式并将全式除以 ω_n^2 ($\omega_n^2 \neq 0$) 可得

$$\frac{1}{\omega_n^2} \{A\} - [\delta][M]\{A\} = \{0\} \quad (4-25)$$

特征方程为

$$\left| \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_n^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_n^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\omega_n^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & & & \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & & & \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (4-26)$$

展开后可得 $\frac{1}{\omega_n^2}$ 的 n 个代数方程,由此可求得 $\frac{1}{\omega_n^2}$ 的 n 个值,取其倒数即可得到 ω_n^2 的 n 个特征值,将 $\frac{1}{\omega_n^2}$ 的 n 个根代回(4-25)式,可求得 n 个特征矢量。由于振动方程(4-23)式与(4-10)式是可以互换的,因此,对于相同的广义坐标,不论采用哪种形式的振动方程,求得系统的固有频率和主振动总是相同的。

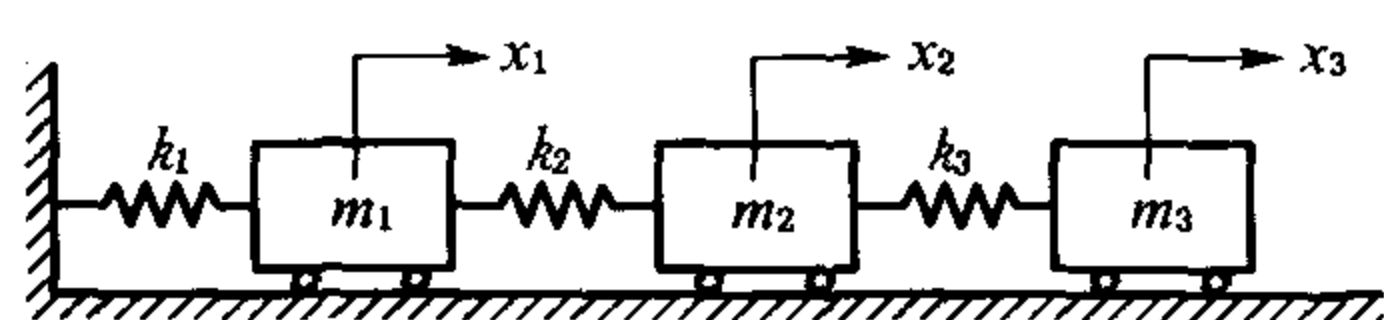
对于一个多自由度系统,如果选择了两种不同的广义坐标,则特征方程的形式也各不相同,但其展开后的代数方程都是相同的,因而求得的固有频率值是相同的。因为一个系统的固有频率完全由系统的固有物理性质(惯性、弹性)所决定,绝不会因广义坐标的选择不同而改变。而与各阶固有频率对应的主振型值,随广义坐标选择的不同而不同,这种差异就是同一种运动形式从不同的广义坐标来观察所产生的。一个系统的固有频率和主振型完全决定于系统本身固有的物理性质。

【例 4-4】 在图 4-5(a)所示弹簧质量系统中, $k_1 = 3k$, $k_2 = 2k$, $k_3 = k$; $m_1 = 2m$, $m_2 = 1.5m$, $m_3 = m$, 求系统的固有频率和主振型。

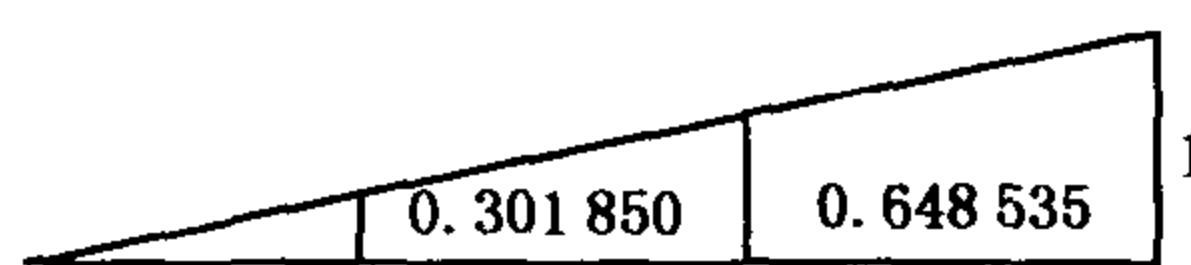
解: 取三质量各自偏离平衡位置的位移 x_1, x_2, x_3 为广义坐标,则系统的质量矩阵 $[M]$ 和刚度矩阵 $[K]$ 可由(4-1)式中质量矩阵和刚度矩阵求得

$$[M] = \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 1.5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

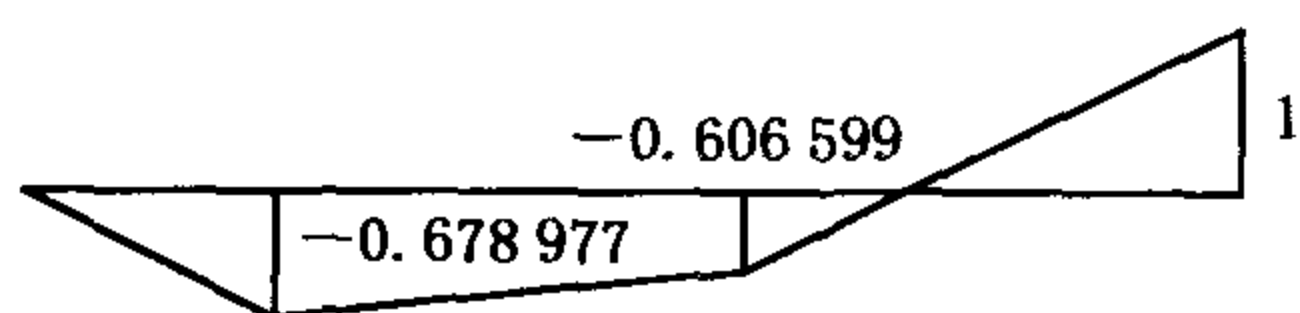
$$[K] = \begin{bmatrix} 3k+2k & -2k & 0 \\ -2k & 2k+k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$$



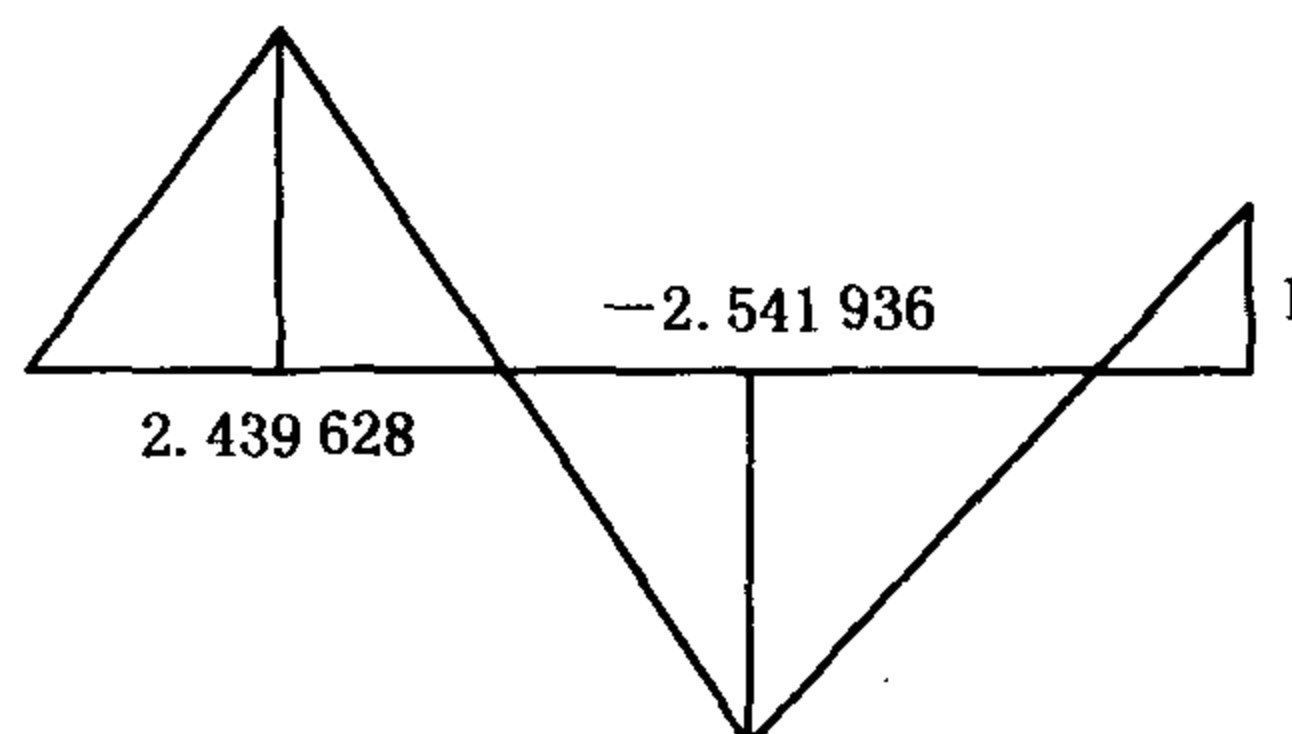
(a) 三自由度弹簧质量系统



(b) 第一阶振型



(c) 第二阶振型



(d) 第三阶振型

图 4-5 三质量弹簧系统振型示意

则自由振动微分方程为

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 1.5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

设其解为

$$x_i = A_i \sin(\omega_n t + \varphi) \quad (i = 1, 2, 3)$$

代入微分方程式得

$$\left. \begin{aligned} (5k - 2m\omega_n^2)A_1 - 2kA_2 &= 0 \\ -2kA_1 + (3k - 1.5m\omega_n^2)A_2 - kA_3 &= 0 \\ -kA_2 + (k - m\omega_n^2)A_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

其特征方程为

$$\begin{vmatrix} 5k - 2m\omega_n^2 & -2k & 0 \\ -2k & 3k - 1.5m\omega_n^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega_n^2 \end{vmatrix} = 0$$

展开并化简后得

$$(\omega_n^2)^3 - 5.5 \frac{k}{m} (\omega_n^2)^2 + 7.5 \left(\frac{k}{m}\right)^2 \omega_n^2 - 2 \left(\frac{k}{m}\right)^3 = 0$$

用数值解法求得 3 个根为

$$\omega_{n1}^2 = 0.351465 \frac{k}{m}, \quad \omega_{n2}^2 = 1.606599 \frac{k}{m}, \quad \omega_{n3}^2 = 3.541936 \frac{k}{m}$$

$$\omega_{n1} = 0.592845 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_{n2} = 1.267517 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_{n3} = 1.882003 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

划去(a)式第三式,并将 A_3 项移至等式右边,得

$$\left. \begin{aligned} (5k - 2m\omega_n^2)A_1 - 2kA_2 &= 0 \\ -2kA_1 + (3k - 1.5m\omega_n^2)A_2 &= kA_3 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

将 $\omega_{n1}^2 = 0.351\,465 \frac{k}{m}$ 代入, 并令 $A_3^{(1)} = 1$, 得

$$\begin{aligned} 4.297\,07A_1^{(1)} - 2A_2^{(1)} &= 0 \\ -2A_1^{(1)} + 2.472\,803A_2^{(1)} &= 1 \end{aligned}$$

解得

$$A_1^{(1)} = 0.301\,850, \quad A_2^{(1)} = 0.648\,535$$

同理将 $\omega_{n2}^2, \omega_{n3}^2$ 值代入(b)式, 并令 $A_3^{(2)} = 1, A_3^{(3)} = 1$, 分别可解得

$$\begin{aligned} A_1^{(2)} &= -0.678\,977, \quad A_2^{(2)} = -0.606\,599 \\ A_1^{(3)} &= 2.439\,628, \quad A_2^{(3)} = -2.541\,936 \end{aligned}$$

对应于 3 个固有频率 $\omega_{n1}, \omega_{n2}, \omega_{n3}$ 的主振型为

$$\{A^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 0.301\,850 \\ 0.648\,535 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{A^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} -0.678\,977 \\ -0.606\,599 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{A^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} 2.439\,628 \\ -2.541\,936 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

各阶振型值用折线示于图 4-5(b), (c), (d) 中, 这种图形称为振型图, 表示各坐标间的相对位移。

前面已指出, 正定系统的各固有频率值均不为零, 并且已讨论了各固有频率值互不相等的情况。有些正定系统的固有频率值中会发生其中两个或几个彼此相等的情况, 即系统的特征方程(4-15)具有 ω_n^2 的重根。另外, 半正定系统, 即有刚体位移的系统, 各固有频率值中一定会出现零值, 即特征方程具有零根。

正定系统的各阶固有频率恒取正值, 绝不可能取零值。固有频率取零值的情况只能在半正定系统中出现, 反之, 半正定系统一定会出现零值的固有频率。

任何盘轴扭振系统如支承允许轴自由转动都是半正定系统。从物理意义上说, 这个零值的固有频率对应的系统运动, 是系统没有弹性变形的, 是离开原来平衡位置的整体的刚体运动, 而不是围绕平衡位置的简谐运动。为了进一步加深理解, 下面举一个三圆盘的扭振系统例子加以说明。

【例 4-5】 图 4-6(a) 所示系统, 三圆盘转动惯量均为 J , 其间两段轴的扭转刚度为 k , 求系统的固有频率和主振型, 并对所求结果进行讨论。

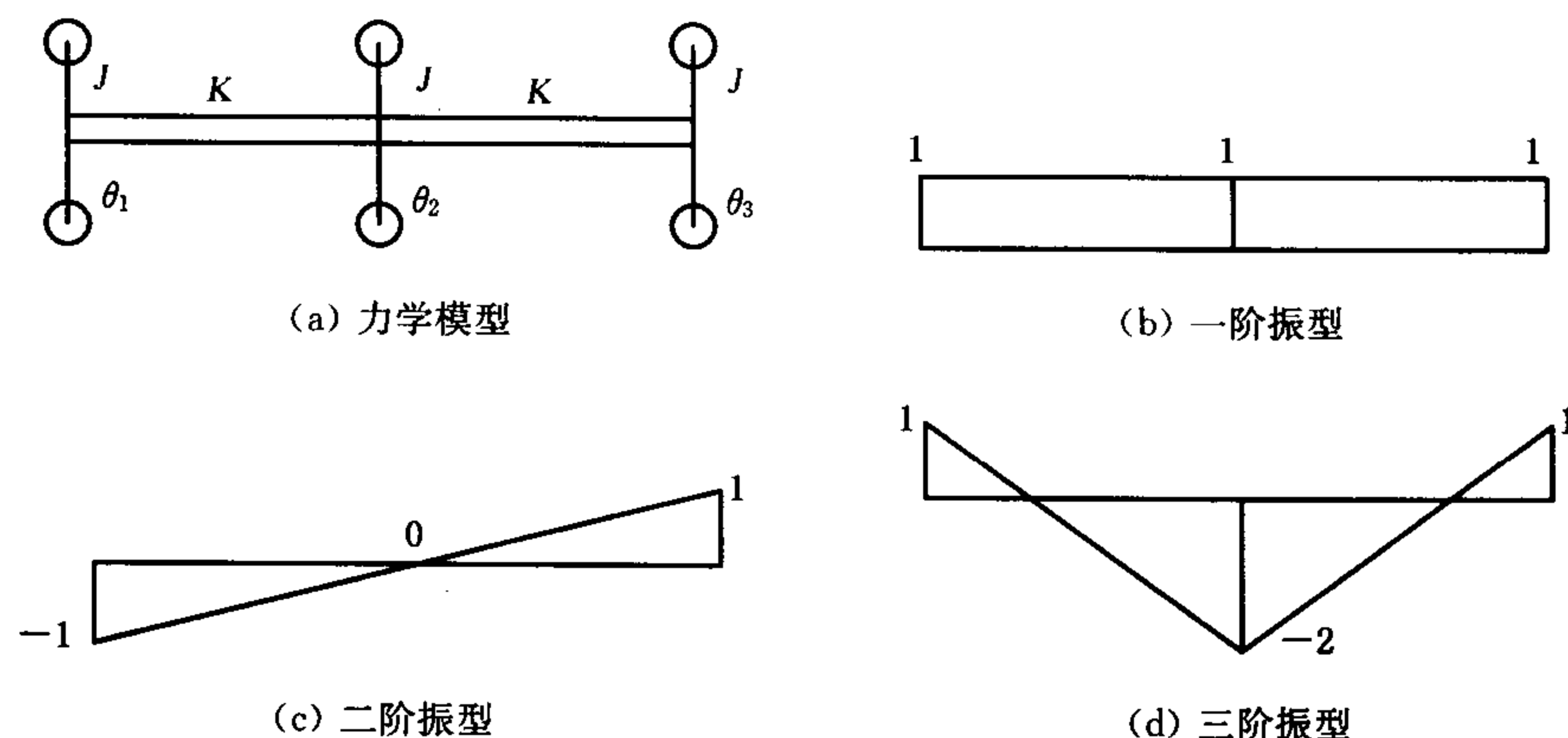


图 4-6 三圆盘半正定系统

解: 采用能量法建立运动方程, 系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} (J\dot{\theta}_1^2 + J\dot{\theta}_2^2 + J\dot{\theta}_3^2) \quad (a)$$

势能为

$$U = \frac{1}{2} k [(\theta_1 - \theta_2)^2 + (\theta_2 - \theta_3)^2]$$

代入拉格朗日方程后可得自由振动方程

$$\left. \begin{aligned} J\ddot{\theta}_1 + k\theta_1 - k\theta_2 &= 0 \\ J\ddot{\theta}_2 - k\theta_1 + 2k\theta_2 - k\theta_3 &= 0 \\ J\ddot{\theta}_3 - k\theta_2 + k\theta_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

设其解为

$$\theta_i = A_i \sin(\omega_n t + \varphi) \quad (i = 1, 2, 3)$$

将所设解代入(a)式后得

$$\left. \begin{aligned} (k - J\omega_n^2)A_1 - kA_2 &= 0 \\ -kA_1 + (2k - J\omega_n^2)A_2 - kA_3 &= 0 \\ -kA_2 + (k - J\omega_n^2)A_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

其特征方程展开并简化后得

$$\omega_n^2 \left(\omega_n^2 - \frac{k}{J} \right) \left(\omega_n^2 - \frac{3k}{J} \right) = 0$$

故

$$\omega_{n1}^2 = 0, \omega_{n2}^2 = \frac{k}{J}, \omega_{n3}^2 = \frac{3k}{J}$$

$$\omega_{n1} = 0, \omega_{n2} = \sqrt{\frac{k}{J}}, \omega_{n3} = \sqrt{\frac{3k}{J}}$$

将 $\omega_{n1} = 0$ 代入(c)式,得

$$\left. \begin{aligned} kA_1^{(1)} - kA_2^{(1)} &= 0 \\ -kA_1^{(1)} + 2kA_2^{(1)} - kA_3^{(1)} &= 0 \\ -kA_2^{(1)} + kA_3^{(1)} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

令 $A_3^{(1)} = 1$, 则通过(c)式,可求得

$$A_1^{(1)} = A_2^{(1)} = A_3^{(1)} = 1$$

把 ω_{n2} 和 ω_{n3} 分别代入(b)式,并依次令 $A_3^{(2)} = 1$, $A_3^{(3)} = 1$, 可分别解得

$$A_1^{(2)} = -1, A_2^{(2)} = 0$$

$$A_1^{(3)} = 1, A_2^{(3)} = -2$$

因此对应于 3 个固有频率 ω_{n1} , ω_{n2} 和 ω_{n3} 的三阶主振型分别为

$$\{A^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{A^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{A^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

其振型图分别以图 4-6(b)、(c)、(d)表示。对应两个非零值的固有频率 ω_{n2} 和 ω_{n3} , 系统的主振动为

$$\begin{aligned} \theta_i &= A_i^{(2)} \sin(\omega_{n2} t + \varphi_2) \\ \theta_i &= A_i^{(3)} \sin(\omega_{n3} t + \varphi_3) \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (d)$$

对于 $\omega_{n1} = 0$ 的情况, 系统不再在平衡位置附近作简谐振动形式的主振动, 而是按

$$\theta_i = A_i^{(1)}(t + \tau_1) \quad (i = 1, 2, 3)$$

这种可以无限远离平衡位置 $\theta_i = 0$ 的刚体转动的运动规律(其中 $A_i^{(1)}$ 及 τ_1 为待定常数)。(d) 式的解即两个简谐振动的主振动的解叠加, 一共有 6 个待定常数, 仍然是这个系统自由振动的一般解, 根据初始条件可以求得这些常数。

从物理意义上来说, 在半正定系统某一点上施加以作用力后, 通常系统将无法维持平衡而产生刚体运动, 因此柔度影响系数及柔度矩阵 $[\delta]$ 没有意义。所以, 半正定系统只能用刚度矩阵 $[K]$ 建立运动方程。用柔度矩阵 $[\delta]$ 建立运动方程的方法, 只适合于正定系统。

4.2 主坐标与正则坐标

4.2.1 主振型的正交性

一个 n 自由度系统具有 n 个固有频率 ω_{ni} 和 n 组主振型 $\{A^{(i)}\}$ ($i = 1, 2 \cdots n$)。现在来分析两组主振型之间的关系。已知对应于固有频率 ω_{ni} 和 ω_{nj} 的主振型 $\{A^{(i)}\}$ 及 $\{A^{(j)}\}$ 根据 (4-13) 式应分别满足下列两个方程

$$[K]\{A^{(i)}\} = \omega_{ni}^2 [M]\{A^{(i)}\} \quad (4-27)$$

$$[K]\{A^{(j)}\} = \omega_{nj}^2 [M]\{A^{(j)}\} \quad (4-28)$$

将 (4-27) 式等式两边前乘 $\{A^{(j)}\}$ 的转置矩阵 $\{A^{(j)}\}^T$, 得

$$\{A^{(j)}\}^T [K] \{A^{(i)}\} = \omega_{ni}^2 \{A^{(j)}\}^T [M] \{A^{(i)}\} \quad (4-29)$$

将 (4-28) 式等式两边前乘 $\{A^{(i)}\}$ 的转置矩阵 $\{A^{(i)}\}^T$, 得

$$\{A^{(i)}\}^T [K] \{A^{(j)}\} = \omega_{nj}^2 \{A^{(i)}\}^T [M] \{A^{(j)}\} \quad (4-30)$$

由于 $[M]$ 和 $[K]$ 都是对称矩阵, 故

$$\{A^{(j)}\}^T [K] \{A^{(i)}\} = \{A^{(i)}\}^T [K] \{A^{(j)}\} \quad (4-31)$$

$$\{A^{(j)}\}^T [M] \{A^{(i)}\} = \{A^{(i)}\}^T [M] \{A^{(j)}\} \quad (4-32)$$

因此将 (4-29) 式减 (4-30) 式后得

$$(\omega_{ni}^2 - \omega_{nj}^2) \{A^{(i)}\}^T [K] \{A^{(j)}\} = 0$$

在 $\omega_{ni}^2 \neq \omega_{nj}^2$ 的情况下, 必然有

$$\{A^{(i)}\}^T [M] \{A^{(j)}\} = 0 \quad (4-33)$$

代入 (4-30) 式, 得

$$\{A^{(i)}\}^T [K] \{A^{(j)}\} = 0 \quad (4-34)$$

(4-33) 式和 (4-34) 式表示不相等的两个固有频率对应的两个主振型之间, 既存在着对质量矩阵 $[M]$ 的正交性, 又存在着对刚度矩阵 $[K]$ 的正交性, 统称主振型的正交性。

若 $i = j$, 则 (4-33) 式为

$$\{A^{(i)}\}^T [M] \{A^{(i)}\} = M_i \quad (i = 1, 2 \cdots n) \quad (4-35)$$

M_i 称为第 i 阶主质量(模态质量), (4-34) 式成为

$$\{A^{(i)}\}^T [K] \{A^{(i)}\} = K_i \quad (i = 1, 2 \cdots n) \quad (4-36)$$

K_i 称为第 i 阶主刚度(模态刚度)。

在 $i = j$ 的情况下, 根据(4-29)式可得

$$\omega_{ni}^2 = \frac{\{A^{(i)}\}^T [K] \{A^{(i)}\}}{\{A^{(i)}\}^T [M] \{A^{(i)}\}} = \frac{K_i}{M_i} \quad (4-37)$$

由(4-37)式可以看出系统的固有频率随刚度与质量的变化趋势。当系统的刚度增加, K_i 值也增加, ω_{ni}^2 增加, 固有频率值提高; 反之, 固有频率值降低。当系统质量增加, M_i 值也增加, ω_{ni}^2 减小, 固有频率值降低; 反之, 固有频率值提高。这种固有频率随刚度与质量的变化趋势, 不论系统的自由度多少, 总是存在的。

如果一个正定系统的特征方程(4-15)求得 n 个 ω_n^2 的根中, 有两个或几个彼此相等, 则对应这两个或几个固有频率, 它们的主振型是不确定的。对于这种情况可以根据如下两个特点构造振型向量。

(1) 对应于两个或几个彼此相等固有频率的特征矢量与相应于非重根的特征矢量是相互正交的。

(2) 若系统的质量矩阵 $[M]$ 和刚度矩阵 $[K]$ 是对称的, 则这些与重根相对应的特征矢量间也是相互正交的。

当正交系统具有 $r(>2)$ 个相等的固有频率时, 我们可以以上两个特点求得任意 r 个独立的主振型, 对它们再进行一定的线形组合, 总可以选出 r 个彼此独立又正交的主振型。

对应于正定系统的 r 个相等的固有频率及选取的 r 个独立又正交的主振型, 存在着系统的 r 个主振型, 其形式都是如(4-19)式所表示的简谐振动, 它们之间虽然频率相同, 但振幅和相位角却是相互独立的。每个主振动具有两个待定常数, 因此前述正定系统自由振动的一般解的形式(4-18)式仍然有效。

4.2.2 振型矩阵与正则振型矩阵

将相互间存在正交性的各阶主振型列阵依次排成各列, 构成一个 $n \times n$ 阶的振型矩阵, 即

$$[A_p] = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & \cdots & A_1^{(n)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} & \cdots & A_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n^{(1)} & A_n^{(2)} & \cdots & A_n^{(n)} \end{bmatrix} \quad (4-38)$$

$[A_p]$ 的每一列是一个主振型列阵 $\{A^{(i)}\}$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 。这样我们就可以把式(4-33)和(4-35)式合并成一个式子, 即

$$[A_p]^T [M] [A_p] = [M_p] \quad (4-39)$$

式中 $[M_p]$ 是一个对角阵, 称为主质量矩阵。

$$[M_p] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_n \end{bmatrix} \quad (4-40)$$

同理, 将(4-34)式(4-36)合并成一式, 得

$$[A_p]^T [K] [A_p] = [K_p] \quad (4-41)$$

$[K_p]$ 也是一个对角阵,称为主刚度矩阵。

$$[K_p] = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & K_n \end{bmatrix} \quad (4-42)$$

由于主振型列阵只表示系统作主振动时各坐标间幅值的相对大小,只要选定该列阵中的任一个元素值,其余各元素值就相应地确定了。因此,如果我们适当地选取这个元素,使之满足 $\{A^{(i)}\}^T [M] \{A^{(i)}\} = 1$ 。则给计算带来很大的方便,这组特定的主振型称为正则振型,记为 $\{A_N^{(i)}\}$,则上式可写成

$$\{A_N^{(i)}\}^T [M] \{A_N^{(i)}\} = 1 \quad (4-43)$$

正则振型 $\{A_N^{(i)}\}$ 可以用任意主振型 $\{A^{(i)}\}$ 求出,令 $\{A_N^{(i)}\} = \frac{1}{c_i} \{A^{(i)}\}$ 代入式(4-43)可得

$$c_i = \pm \sqrt{M_i} \quad (\text{取正负号均可}) \quad (4-44)$$

$$\text{则} \quad \{A_N^{(i)}\} = \frac{1}{\pm \sqrt{M_i}} \{A^{(i)}\} \quad (4-45)$$

同理可求得 n 个正则振型列阵 $\{A_N^{(i)}\} (i = 1, 2 \cdots n)$ 。

将所有 n 个正则振型列阵 $\{A_N^{(1)}\}, \{A_N^{(2)}\} \cdots \{A_N^{(n)}\}$ 依次排列在一起,就构成了一个 $n \times n$ 阶的正则振型矩阵 $[A_N]$

$$[A_N] = \begin{bmatrix} A_N^{(1)} & A_N^{(2)} & \cdots & A_N^{(n)} \\ A_{N2}^{(1)} & A_{N2}^{(2)} & \cdots & A_{N2}^{(n)} \\ \vdots & & & \\ A_{Nn}^{(1)} & A_{Nn}^{(2)} & \cdots & A_{Nn}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (4-46)$$

由于正则振型只是主振型中特定的一组,因此,它也满足正交性关系,即满足(4-33)、(4-34)式,根据式(4-43)的条件,可知用正则振型矩阵 $[A_N]$ 按照(4-39)式计算得到的正则质量矩阵 $[I]$,即 $[M_N]$ 是一个单位矩阵 $[I]$,即

$$[A_N]^T [M] [A_N] = [M_N] = [I] \quad (4-47)$$

式中,

$$[M_N] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (4-48)$$

用正则振型列阵 $\{A_N^{(i)}\}$ 代入(4-37)式,再根据(4-43)式可得

$$\omega_{ni}^2 = \frac{\{A_N^{(i)}\}^T [K] \{A_N^{(i)}\}}{\{A_N^{(i)}\}^T [M] \{A_N^{(i)}\}} = \frac{K_{Ni}}{1} = K_{Ni} \quad (i = 1, 2 \cdots n) \quad (4-49)$$

正则刚度 K_{Ni} 等于固有频率平方值 ω_{ni}^2 ,因此,用正则振型矩阵按(4-42)式计算的正则刚度矩阵 $[K_N]$ 其对角线元素分别是各阶固有频率平方值,即

$$[A_N]^T [K] [A_N] = [K_N] \quad (4-50)$$

$$[K_N] = \begin{bmatrix} K_{N1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{N2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_{Nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{n1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_{n2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_m^2 \end{bmatrix} \quad (4-51)$$

【例 4-6】用例 4-4 的结果,求振型矩阵 $[A_p]$ 及与它对应的主质量矩阵 $[M_p]$ 、主刚度矩阵 $[K_p]$,再进而求正则振型矩阵 $[A_N]$ 及正则刚度矩阵 $[K_N]$ 。

解:利用例 4-4 中求得的 $\{A^{(1)}\}$ 、 $\{A^{(2)}\}$ 、 $\{A^{(3)}\}$ 按定义可得振型矩阵 $[A_p]$ 为

$$[A_p] = \begin{bmatrix} 0.301\,850 & -0.678\,977 & 2.439\,268 \\ 0.648\,535 & -0.606\,599 & -2.541\,936 \\ 1.000\,000 & 1.000\,000 & 1.000\,000 \end{bmatrix}$$

主质量矩阵

$$\begin{aligned} [M_p] &= [A_p]^T [M] [A_p] = \begin{bmatrix} 0.301\,850 & 0.648\,535 & 1.000\,000 \\ -0.678\,977 & -0.606\,599 & 1.000\,000 \\ 2.439\,268 & -2.541\,936 & 1.000\,000 \end{bmatrix} \cdot \\ &\begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 1.5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.301\,850 & -0.678\,977 & 2.439\,268 \\ 0.648\,535 & -0.606\,599 & -2.541\,936 \\ 1.000\,000 & 1.000\,000 & 1.000\,000 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.813\,124m & 0 & 0 \\ 0 & 2.473\,965m & 0 \\ 0 & 0 & 22.595\,720m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

主刚度矩阵

$$\begin{aligned} [K_p] &= [A_p]^T [K] [A_p] = \begin{bmatrix} 0.301\,850 & 0.648\,535 & 1.000\,000 \\ -0.678\,977 & -0.606\,599 & 1.000\,000 \\ 2.439\,268 & -2.541\,936 & 1.000\,000 \end{bmatrix} \cdot \\ &\begin{bmatrix} 5k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.301\,850 & -0.678\,977 & 2.439\,268 \\ 0.648\,535 & -0.606\,599 & -2.541\,936 \\ 1.000\,000 & 1.000\,000 & 1.000\,000 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.637\,249k & & \\ & 3.974\,669k & \\ & & 80.032\,610k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

按(4-45)式可求得

$$c_1 = \sqrt{M_1} = \sqrt{1.813\,124m} = 1.346\,523 \sqrt{m}$$

$$c_2 = \sqrt{M_2} = \sqrt{2.473\,965m} = 1.572\,884 \sqrt{m}$$

$$c_3 = \sqrt{M_3} = \sqrt{22.595\,720m} = 4.753\,496 \sqrt{m}$$

按(4-46)式求出各阶正则振型列阵,然后它们依次排列可得正则振型矩阵 $[A_N]$ 为

$$[A_N] = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.224\,170 & -0.431\,677 & 0.513\,228 \\ 0.481\,637 & -0.385\,660 & -0.534\,751 \\ 0.742\,654 & 0.635\,775 & 0.210\,371 \end{bmatrix}$$

正则刚度矩阵 $[K_N]$ 为

$$[K_N] = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.224\ 170 & 0.481\ 637 & 0.742\ 654 \\ -0.431\ 677 & -0.385\ 666 & 0.635\ 775 \\ 0.513\ 228 & -0.534\ 751 & 0.210\ 371 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \cdot$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.224\ 170 & -0.431\ 677 & 0.513\ 228 \\ 0.481\ 637 & -0.385\ 660 & -0.534\ 751 \\ 0.742\ 654 & 0.635\ 775 & 0.210\ 371 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.351\ 465 \frac{k}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 1.606\ 599 \frac{k}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 3.541\ 936 \frac{k}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{n1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{n2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{n3}^2 \end{bmatrix}$$

4.2.3 主坐标与正则坐标

由上可知,利用振型矩阵 $[A_p]$ 可以使质量矩阵和刚度矩阵变换成对角矩阵形式,因此也可以通过主振型与振型矩阵,简化系统运动方程的形式。

已知系统自由振动微分方程的一般形式为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$$

由于 $[M]$ 和 $[K]$ 一般不是对角矩阵,因此上式是一组相互耦合的微分方程组。

如事先已求出系统的固有频率和主振型,利用振型矩阵 $[A_p]$,可将系统原有坐标 $\{x\}$ 变换成一组新的坐标 $\{x_p\}$,即定义

$$\{x\} = [A_p] \{x_p\} \quad (4-52)$$

相应地将

$$\{\ddot{x}\} = [A_p] \{\ddot{x}_p\} \quad (4-53)$$

(4-54)式写成展开形式为

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & \cdots & A_1^{(n)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} & \cdots & A_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n^{(1)} & A_n^{(2)} & \cdots & A_n^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{p1} \\ x_{p2} \\ \vdots \\ x_{pn} \end{Bmatrix} = x_{p1} \begin{Bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ \vdots \\ A_n^{(1)} \end{Bmatrix} + x_{p2} \begin{Bmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \\ \vdots \\ A_n^{(2)} \end{Bmatrix} + \cdots + x_{pn} \begin{Bmatrix} A_1^{(n)} \\ A_2^{(n)} \\ \vdots \\ A_n^{(n)} \end{Bmatrix}$$

即

$$\{x\} = x_{p1} \{A^{(1)}\} + x_{p2} \{A^{(2)}\} + \cdots + x_{pn} \{A^{(n)}\} \quad (4-54)$$

可以看出,原先各坐标 x_1, x_2, \cdots, x_n 任意一组位移,都可以看成是由 n 组主振动按一定比例组合而成的,这 n 个比例因子就是 n 个新坐标 $x_{p1}, x_{p2}, \cdots, x_{pn}$ 的值。这组新坐标 $\{x_p\}$ 称为主坐标。如果 $x_{p1}=1$ 而其他 x_{pi} 各值都为零,则由(4-54)式得

$$\{x\} = 1 \cdot \{A^{(1)}\} + 0 \cdot \{A^{(2)}\} + \cdots + 0 \cdot \{A^{(n)}\} = \{A^{(1)}\} \quad (4-55)$$

说明此时系统的各坐标值 $\{x\}$ 正好为第一主振型 $\{A^{(1)}\}$,这就是第一主坐标取单位值的几何意义。其他各主坐标值的意义也类似。总之,每一主坐标的值等于各阶主振型分量在系统原先坐标值中占有成分的大小。

将(4-52)、(4-53)式代入(4-51)式,得

$$[M][A_p]\{\ddot{x}_p\} + [K][A_p]\{x_p\} = \{0\}$$

将此矩阵前乘 $[A_p]^T$, 得

$$\begin{aligned} [A_p]^T[M][A_p]\{\ddot{x}_p\} + [A_p]^T[K][A_p]\{x_p\} &= \{0\} \\ [M_p]\{\ddot{x}_p\} + [K_p]\{x_p\} &= \{0\} \end{aligned} \quad (4-56)$$

由于主质量矩阵 $[M_p]$ 和主刚度矩阵 $[K_p]$ 都是对角矩阵, 因此用主坐标描述的系统的运动方程式(4-56)中, 各方程之间已互不耦合, 其展开形式为

$$\left. \begin{aligned} M_1 \ddot{x}_{p1} + K_1 x_{p1} &= 0 \\ M_2 \ddot{x}_{p2} + K_2 x_{p2} &= 0 \\ &\vdots \\ M_n \ddot{x}_{pn} + K_n x_{pn} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-57)$$

上述方程可如单自由度那样来求解, 因此, 使用主坐标来描述系统的运动是十分方便的。

如将(4-52)式两边前乘 $[A_p]^T[M]$ 后得

$$[A_p]^T[M]\{x\} = [A_p]^T[M][A_p]\{x_p\} = [M_p]\{x_p\}$$

故有

$$\{x_p\} = [M_p]^{-1}[A_p]^T[M]\{x\} \quad (4-58)$$

根据此式很容易由原先坐标 $\{x\}$ 求得 $\{x_p\}$, 因其中 $[M_p]^{-1}$ 只要将 $[M_p]$ 对角线元素取倒数后即可求得。从(4-58)式与(4-52)式比较可得

$$[A_p]^{-1} = [M_p]^{-1}[A_p]^T[M] \quad (4-59)$$

由于正则振型也是一组(特定的)主振型, 因此也可以用正则振型矩阵 $[A_N]$, 将系统原有坐标 $\{x_N\}$ 变换成一组新的坐标 $\{x_N\}$ 。 $\{x_N\}$ 称为正则坐标, 按(4-52)式的定义有

$$\{x\} = [A_N]\{x_N\} \quad (4-60)$$

则运动方程(4-51)可写成

$$[M][A_N]\{\ddot{x}_N\} + [K][A_N]\{x_N\} = \{0\}$$

将此式前乘以矩阵 $[A_N]^T$ 得

$$\begin{aligned} [A_N]^T[M][A_N]\{\ddot{x}_N\} + [A_N]^T[K][A_N]\{x_N\} &= \{0\} \\ [\{\ddot{x}_N\} + [K_N]]\{x_N\} &= \{0\} \end{aligned}$$

系统的运动方程呈如下形式

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_{N1} + \omega_{n1}^2 x_{N1} &= 0 \\ \ddot{x}_{N2} + \omega_{n2}^2 x_{N2} &= 0 \\ &\vdots \\ \ddot{x}_{Nm} + \omega_{nm}^2 x_{Nm} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-61)$$

采用正则坐标来描述系统的自由振动, 可以得到最简单的运动方程的形式。另外, 由于与正则振型对应的正则质量矩阵 $[M_N] = [I]$, 故 $[M_N]^{-1} = [I]^{-1} = [I]$, 利用(4-60)式, 可以得到由原来坐标 $\{x\}$ 求得正则坐标的表达式为

$$\{x_N\} = \{M_N\}^{-1}[A_N]^T[M]\{x\} = [I][A_N]^T[M]\{x\} = [A_N]^T[M]\{x\} \quad (4-62)$$

此式可看成是(4-62)式的求逆, 故有

$$[A_N]^{-1} = [A_N]^T[M] \quad (4-63)$$

4.3 多自由度系统对初始条件的响应

4.3.1 无阻尼系统对初始条件的响应

对于多自由度系统,其自由振动微分方程是 n 个二阶常微分方程组成的方程组。给定了 $2n$ 个初始条件,就完全确定了方程的一组特解,这组特解就是系统在此初始条件下的响应。我们前面所讨论的方法是先求出运动方程的一般解,然后用 $2n$ 个初始条件确定一般解中 $2n$ 个待定常数值,从而求得这组特解。根据系统自由振动微分方程,我们已经求得正定系统的自由振动的一般形式,即如(4-19)式所示的由 n 组简谐振动成分的主振动叠加而成的一般自由振动形式,其中固有频率和主振型由系统的惯性及弹性性质所确定,与系统各坐标特定的初始值无关。为了确定系统自由振动一般解中 $2n$ 个特定常数,可根据给定的 $2n$ 个初始条件 $x_{10}, x_{20} \cdots x_{n0}$ 及 $\dot{x}_{10}, \dot{x}_{20} \cdots \dot{x}_{n0}$, 求解联立方程。这种联立方程的求解并没有原则上的困难,但有一定的计算工作量。如利用主振型或正则振型,并通过系统原坐标与主坐标或正则坐标的坐标变换,就可以避免求解联立方程,充分体现了振型叠加法的长处。这种求解过程常称之为振型分析或模态分析。

为此,在求出系统的固有频率及主振型、正则振型后,利用(4-60)式建立系统原有坐标与正则坐标之间的坐标变换,用正则坐标 $x_{N1}, x_{N2} \cdots x_{Nn}$ 表示系统自由振动微分方程为(4-61)式,对于正定系统,由(4-63)式很容易求出各正则坐标的一般解为

$$x_{Ni} = A_i \cos \omega_{ni} t + B_i \sin \omega_{ni} t \quad (i = 1, 2 \cdots n) \quad (4-64)$$

待定常数 A_i, B_i 可以由初始时刻 $t = 0$ 时,各正则坐标及其速度的初始值 x_{Ni0}, \dot{x}_{Ni0} 表示,这与单自由度系统中由初始条件决定待定常数的方法是一样的,利用上述初始条件求出待定常数后,(4-62)式可表示为

$$x_{Ni} = x_{Ni0} \cos \omega_{ni} t + \frac{\dot{x}_{Ni0}}{\omega_{ni}} \sin \omega_{ni} t \quad (i = 1, 2 \cdots n) \quad (4-65)$$

这样,剩下的问题是如何由原坐标的初始条件求出各正则坐标的初始条件了。利用(4-64)式,可求得正则坐标的初始值为

$$\{x_N\}_{t=0} = [A_N]^T [M] \{x\}_{t=0} \quad (4-66)$$

即

$$\begin{Bmatrix} x_{N10} \\ x_{N20} \\ \vdots \\ x_{Nn0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{N1}^{(1)} & A_{N2}^{(1)} & \cdots & A_{Nn}^{(1)} \\ A_{N1}^{(2)} & A_{N2}^{(2)} & \cdots & A_{Nn}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1}^{(n)} & A_{N2}^{(n)} & \cdots & A_{Nn}^{(n)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{Bmatrix} \quad (4-67)$$

将(4-62)式两边求导数,得

$$\{\dot{x}_N\} = [A_N]^T [M] \{\dot{x}\} \quad (4-68)$$

在初始时刻 $t = 0$ 时,有

$$\{\dot{x}_N\}_{t=0} = [A_N]^T [M] \{\dot{x}\}_{t=0} \quad (4-69)$$

即

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_{N10} \\ \dot{x}_{N20} \\ \vdots \\ \dot{x}_{Nm0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{N1}^{(1)} & A_{N2}^{(1)} & \cdots & A_{Nm}^{(1)} \\ A_{N1}^{(2)} & A_{N2}^{(2)} & \cdots & A_{Nm}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1}^{(n)} & A_{N2}^{(n)} & \cdots & A_{Nm}^{(n)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \\ \vdots \\ \dot{x}_{n0} \end{Bmatrix} \quad (4-70)$$

将(4-67)式,(4-70)式的计算结果代入(4-65)式,再利用下式可求得系统用原先坐标 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 表示的响应,即

$$\{x\} = [A_N]\{x_N\}$$

或

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{N1}^{(1)} & A_{N1}^{(2)} & A_{N1}^{(n)} \\ A_{N2}^{(1)} & A_{N2}^{(2)} & A_{N2}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{Nm}^{(1)} & A_{Nm}^{(2)} & A_{Nm}^{(n)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{N10} \cos \omega_{n1} t + \frac{1}{\omega_{n1}} \dot{x}_{N10} \sin \omega_{n1} t \\ x_{N20} \cos \omega_{n2} t + \frac{1}{\omega_{n2}} \dot{x}_{N20} \sin \omega_{n2} t \\ \vdots \\ x_{Nm0} \cos \omega_{nm} t + \frac{1}{\omega_{nm}} \dot{x}_{Nm0} \sin \omega_{nm} t \end{Bmatrix} \quad (4-71)$$

【例 4-7】 求例 4-4 所示系统对初始条件:在 $t=0$ 时, $x_{10}=1, x_{20}=x_{30}=0, \dot{x}_{10}=\dot{x}_{20}=0, \dot{x}_{30}=1$ 的响应。

解:由例 4-4 已求得系统的固有频率为

$$\omega_{n1} = 0.592845\sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_{n2} = 1.267517\sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_{n3} = 1.882003\sqrt{\frac{k}{m}}$$

由例 4-6 求得的正则振型矩阵 $[A_N]$ 为

$$[A_N] = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.224170 & -0.431677 & 0.513228 \\ 0.481637 & -0.384660 & -0.534751 \\ 0.742654 & 0.635775 & 0.210371 \end{bmatrix}$$

已知

$$[M] = \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 1.5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

由(4-67)式求得各正则坐标及速度的初始值为

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x_{N10} \\ x_{N20} \\ x_{N30} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.224170 & 0.481637 & 0.742654 \\ -0.431677 & -0.385660 & 0.635775 \\ 0.513228 & -0.534751 & 0.210371 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 1.5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \sqrt{m} \begin{bmatrix} 0.448340 \\ -0.863353 \\ 1.026456 \end{bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \dot{x}_{N10} \\ \dot{x}_{N20} \\ \dot{x}_{N30} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.224170 & 0.481637 & 0.742654 \\ -0.431677 & -0.385660 & 0.635775 \\ 0.513228 & -0.534751 & 0.210371 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 1.5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{m} \begin{bmatrix} 0.742\ 654 \\ 0.635\ 775 \\ 0.210\ 371 \end{bmatrix}$$

将求得的正则坐标的初始值代入(4-71)式,得

$$\begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{cases} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.224\ 170 & 0.341\ 677 & 0.513\ 228 \\ 0.481\ 637 & -0.385\ 660 & -0.534\ 751 \\ 0.742\ 654 & 0.635\ 775 & 0.210\ 371 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.448\ 340 \sqrt{m} \cos \omega_{n1} t + \frac{0.742\ 654 \sqrt{m}}{\omega_{n1}} \sin \omega_{n1} t \\ -0.863\ 353 \sqrt{m} \cos \omega_{n2} t + \frac{0.635\ 776 \sqrt{m}}{\omega_{n2}} \sin \omega_{n2} t \\ 1.026\ 456 \sqrt{m} \cos \omega_{n3} t + \frac{0.210\ 371 \sqrt{m}}{\omega_{n3}} \sin \omega_{n3} t \end{bmatrix}$$

展开得

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.100\ 504 \cos \omega_{n1} t + \frac{0.166\ 481}{\omega_{n1}} \sin \omega_{n1} t + 0.372\ 69 \cos \omega_{n2} t \\ &\quad - \frac{0.274\ 449}{\omega_{n2}} \sin \omega_{n2} t + 0.526\ 806 \cos \omega_{n3} t + \frac{0.107\ 969}{\omega_{n3}} \sin \omega_{n3} t \\ x_2 &= 0.215\ 937 \cos \omega_{n1} t + \frac{0.357\ 689}{\omega_{n1}} \sin \omega_{n1} t + 0.332\ 961 \cos \omega_{n2} t \\ &\quad - \frac{0.245\ 193}{\omega_{n2}} \sin \omega_{n2} t - 0.548\ 898 \cos \omega_{n3} t - \frac{0.112\ 496}{\omega_{n3}} \sin \omega_{n3} t \\ x_3 &= 0.332\ 961 \cos \omega_{n1} t + \frac{0.551\ 534}{\omega_{n1}} \sin \omega_{n1} t - 0.548\ 890 \cos \omega_{n2} t \\ &\quad + \frac{0.404\ 210}{\omega_{n2}} \sin \omega_{n2} t + 0.215\ 937 \cos \omega_{n3} t + \frac{0.044\ 256}{\omega_{n3}} \sin \omega_{n3} t \end{aligned}$$

计算结果表明,对于本例中给出的初始条件,系统的自由振动同时包含有3种主振动的分量。

【例4-8】 求例4-4所示系统对于初始条件:在 $t=0$ 时, $x_{10}=2.158\ 38$, $x_{20}=1.928\ 30$, $x_{30}=-3.178\ 87$, $\dot{x}_{10}=\dot{x}_{20}=\dot{x}_{30}=0$ 的响应。

解:与上例相似,先求出各正则坐标及速度的初始值为

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_{N10} \\ x_{N20} \\ x_{N30} \end{cases} &= \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.224\ 170 & 0.481\ 637 & 0.742\ 654 \\ -0.431\ 677 & -0.385\ 660 & 0.635\ 775 \\ 0.513\ 228 & -0.534\ 751 & 0.210\ 371 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 1.5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2.158\ 38 \\ 1.928\ 30 \\ -3.178\ 87 \end{Bmatrix} \\ &= \sqrt{m} \begin{bmatrix} 0 \\ -5.000\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \\ \dot{x}_{30} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.224\,170 & 0.481\,637 & 0.742\,654 \\ -0.431\,677 & -0.385\,660 & 0.635\,775 \\ 0.513\,228 & -0.534\,751 & 0.210\,371 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 1.5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

将求得的正则坐标的初始值代入(4-73)式,得

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.224\,170 & -0.431\,677 & 0.531\,228 \\ 0.481\,637 & -0.385\,660 & -0.534\,751 \\ 0.742\,654 & 0.635\,775 & 0.210\,371 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -5.000\,00\sqrt{m}\cos\omega_{n2}t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

展开后得

$$x_1 = 2.158\,38\cos\omega_{n2}t, \quad x_2 = 1.928\,30\cos\omega_{n2}t, \quad x_3 = -3.178\,87\cos\omega_{n2}t$$

这个结果表明,由于初始速度均为零,故响应只有余弦项,又由于初始值给得比较特殊,使系统产生的自由振动只有第二阶主振动的成分。

对于半正定系统,由于它的固有频率中至少有一个或有 r 个为零,对应于零固有频率的正则坐标 x_{Ni} ($i=1, 2 \cdots r$) 的运动方程为

$$\ddot{x}_{Ni} + \omega_{Ni}^2 x_{Ni} = \ddot{x}_{Ni} + 0 \cdot x_{Ni} = \ddot{x}_{Ni} = 0 \quad (4-72)$$

故

$$x_{Ni} = A_i + B_i t \quad (4-73)$$

或以其初始值 x_{Ni0} 及 \dot{x}_{Ni0} 表示为

$$x_{Ni} = x_{Ni0} + \dot{x}_{Ni0} t \quad (4-74)$$

利用下式可求得系统原有坐标 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 的响应

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{N1}^{(1)} & A_{N1}^{(2)} & \cdots & A_{N1}^{(n)} \\ A_{N2}^{(1)} & A_{N2}^{(2)} & \cdots & A_{N2}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{Nr}^{(1)} & A_{Nr}^{(2)} & \cdots & A_{Nr}^{(n)} \\ A_{N(r+1)}^{(1)} & A_{N(r+1)}^{(2)} & \cdots & A_{N(r+1)}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{Nn}^{(1)} & A_{Nn}^{(2)} & \cdots & A_{Nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{N10} + \dot{x}_{N10} t \\ x_{N20} + \dot{x}_{N20} t \\ \vdots \\ x_{Nr0} + \dot{x}_{Nr0} t \\ x_{N(r+1)0} \cos \omega_{n(r+1)} t + \frac{\dot{x}_{N(r+1)0}}{\omega_{N(r+1)}} \sin \omega_{n(r+1)} t \\ \vdots \\ x_{Nn0} \cos \omega_{nn0} t + \frac{\dot{x}_{Nn0}}{\omega_{Nn0}} \sin \omega_{nn0} t \end{Bmatrix} \quad (4-75)$$

【例 4-9】 对于例 4-5 所示的半正定系统,如各圆盘 J 在初始时刻 $t=0$ 时, $\theta_{10} = \theta_{20} = \theta_{30} = 0$, $\dot{\theta}_{10} = \omega$, $\dot{\theta}_{20} = \dot{\theta}_{30} = 0$, 求系统在上述初始条件下的振动响应。

解:在例 4-5 中已求得此系统的固有频率为 $\omega_{n1} = 0$, $\omega_{n2} = \sqrt{\frac{k}{J}}$, $\omega_{n3} = \sqrt{\frac{3k}{J}}$, 振型矩阵为

$$[A_P] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

由振型矩阵 $[A_P]$ 可求得正则振型矩阵 $[A_N]$ 为

$$[A_N] = \frac{1}{\sqrt{6J}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

系统的质量矩阵 $[M]$ 为

$$[M] = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可求出正则坐标及速度的初始值为

$$\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{N10} \\ \dot{\theta}_{N20} \\ \dot{\theta}_{N30} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6J}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{J}{6}} \omega \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

故

$$\theta_{N1} = \sqrt{\frac{J}{6}} \omega \cdot \sqrt{2} t$$

$$\theta_{N2} = -\sqrt{\frac{J}{6}} \omega \cdot \sqrt{3} \frac{\sin \omega_{n2} t}{\omega_{n2}}$$

$$\theta_{N3} = \sqrt{\frac{J}{6}} \omega \frac{1}{\omega_{n3}} \sin \omega_{n3} t$$

由正则坐标的响应变换成原坐标的响应

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6J}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \sqrt{\frac{J}{6}} \omega \begin{Bmatrix} \sqrt{2} t \\ -\sqrt{3} \frac{1}{\omega_{n2}} \sin \omega_{n2} t \\ \frac{1}{\omega_{n3}} \sin \omega_{n3} t \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{\omega}{6} \begin{Bmatrix} 2t + \frac{3}{\omega_{n2}} \sin \omega_{n2} t + \frac{1}{\omega_{n3}} \sin \omega_{n3} t \\ 2t - \frac{2}{\omega_{n3}} \sin \omega_{n3} t \\ 2t - \frac{3}{\omega_{n2}} \sin \omega_{n2} t + \frac{1}{\omega_{n3}} \sin \omega_{n3} t \end{Bmatrix}$$

计算结果表明,对于半正定系统,在上述初始条件下,系统各圆盘的响应是整个系统的刚体转动和简谐振动形式的主振动的叠加。

4.3.2 多自由度系统的阻尼

工程上的实际机械系统,总是受到各种阻尼力的作用的,如介质黏性阻尼、结构阻尼、材料阻尼等。如果没有外力作用,则带有黏性阻尼的多自由度系统的自由振动微分方程为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (4-76)$$

式中: $[C]$ ——阻尼矩阵,它一般也是正定或半正定的对称矩阵。

下面介绍用振型叠加法解有阻尼多自由度系统的振动问题。

按(4-60)式引进正则坐标 $\{x_N\}$,并将(4-60)式代入(4-76)式,得

$$[M][A_N]\{\ddot{x}_N\} + [C][A_N]\{\dot{x}_N\} + [K][A_N]\{x_N\} = \{0\} \quad (4-77)$$

将此式两边乘以 $[A_N]^T$,可得

$$[I]\{\ddot{x}_N\} + [C_n]\{\dot{x}_N\} + [K_N]\{x_N\} = \{0\} \quad (4-78)$$

式中 $[C_n]$ 是正则坐标中的阻尼矩阵,是由原先坐标中的阻尼矩阵 $[C]$ 转换来的

$$[C_n] = [A_N]^T[C][A_N] \quad (4-79)$$

由于 $[C_n]$ 一般不是对角矩阵,所以(4-78)式是一组速度项相互耦合的微分方程。如果 $[C_n]$ 是一个对角矩阵,则将使(4-78)式求解极为方便。为使 $[C_n]$ 对角化,有这样一些方法。

1) 比例阻尼

如果原坐标的阻尼矩阵 $[C]$ 恰好与质量矩阵 $[M]$ 或刚度矩阵 $[K]$ 成正比,或者 $[C]$ 是 $[M]$ 与 $[K]$ 的某种线性组合,即

$$[C] = a[M] + b[K] \quad (4-80)$$

其中 a 、 b 均为常数(其中之一可为零),我们称这种阻尼为比例矩阵,对这种比例阻尼来说,当坐标换成正则坐标时,在正则坐标中的阻尼矩阵 $[C_N]$ 将是一个对角矩阵,即有

$$\begin{aligned} [C_N] &= [A_N]^T[C][A_N] \\ &= [A_N]^T(a[M] + b[K])[A_N] \\ &= a[A_N]^T[M][A_N] + b[A_N]^T[K][A_N] \\ &= a[I] + b[K_N] = \begin{bmatrix} a + b\omega_{n1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a + b\omega_{n2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a + b\omega_{nm}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-81)$$

比例阻尼只是使 $[C_N]$ 成为对角矩阵的一组特殊情况,还可以找到其他一些条件,只要当 $[C]$ 满足这些条件时,同样可以得到 $[C_n]$ 为对角矩阵。但是工程上绝大多数实际阻尼的情况若要满足上述一些条件是很困难的,因此一般 $[C_n]$ 总不是对角矩阵。

2) 近似替代法

由于阻尼一般都比较小,且阻尼的机理还未完全搞清楚,精确测定阻尼也存在困难,故以近似的阻尼代替以简化计算求解是可行的方法。即用一个对角矩阵形式的阻尼矩阵近似的替代 $[C_n]$,其中最简单的一种方案就是根据(4-79)式由 $[C]$ 算出 $[C_n]$ 后,将 $[C_n]$ 中所有非对角矩阵的值改为零,保留 $[C_n]$ 中对角元素的原有数值,用这样一个经过上述处理的对角矩阵 $[C_N]$ 近似的代替 $[C_n]$,即

$$[C_N] = \begin{bmatrix} C_{N11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_{N22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_{Nnn} \end{bmatrix}$$

工程分析表示,这样假设带来的误差一般不大。这种阻尼称为模态阻尼。

4.3.3 有阻尼系统对初始条件的响应

用 $[C_N]$ 代替 $[C_n]$ 后,使(4-78)式改为下述形式

$$[I]\{\ddot{x}_N\} + [C_N]\{\dot{x}_N\} + [K_N]\{x_N\} = \{0\} \quad (4-82)$$

其展开形式为

$$\ddot{x}_{Ni} + C_{Nii}\dot{x}_{Ni} + \omega_{ni}^2 x_{Ni} = 0 \quad (i = 1, 2 \cdots n)$$

令

$$C_{Nii} = 2\xi_i \omega_{ni}$$

则上式改写为

$$\ddot{x}_{Ni} + 2\xi_i \omega_{ni} \dot{x}_{Ni} + \omega_{ni}^2 x_{Ni} = 0 \quad (i = 1, 2 \cdots n) \quad (7-83)$$

这是一组独立的有阻尼单自由度系统振动方程,可求出各正则坐标的运动规律为

$$x_{Ni} = \exp(-\xi_i \omega_{ni} t) (C_{i1} \cos \omega_{di} t + C_{i2} \sin \omega_{di} t) \quad (4-84)$$

式中 $\omega_{di} = \omega_{ni} \sqrt{1 - \xi_i^2}$, C_{i1} 、 C_{i2} 是待定常数,由初始时刻 $t = 0$ 时 x_{Ni} 及 \dot{x}_{Ni} 的初始值 x_{Ni0} 和 \dot{x}_{Ni0} 所确定。

$$C_{i1} = x_{Ni0}$$

$$C_{i2} = \frac{1}{\omega_{di}} (\dot{x}_{Ni0} + \xi_i \omega_{ni} x_{Ni0}) \quad (4-85)$$

已知原先坐标 $\{x\}$ 与正则坐标 $\{x_N\}$ 之间的转换关系为

$$\{x\} = [A_N]\{x_N\} \quad (4-86)$$

$$\{x_N\} = [A_N]^T [M]\{x\} \quad (4-87)$$

如已知系统原先坐标的 $\{x\}$ 及 $\{\dot{x}\}$ 在 $t = 0$ 时的值为 $\{x\}_{t=0}$ 及 $\{\dot{x}\}_{t=0}$, 则可由(4-87)式求出

$$\{x_N\}_{t=0} = [A_N]^T [M]\{x\}_{t=0} \quad (4-88)$$

$$\{\dot{x}_N\}_{t=0} = [A_N]^T [M]\{\dot{x}\}_{t=0} \quad (4-89)$$

则系统原先坐标 $\{x\}$ 的自由振动解为

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{N1}^{(1)} & A_{N1}^{(2)} & \cdots & A_{N1}^{(n)} \\ A_{N2}^{(1)} & A_{N2}^{(2)} & \cdots & A_{N2}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{Nn}^{(1)} & A_{Nn}^{(2)} & \cdots & A_{Nn}^{(n)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \exp(-\xi_1 \omega_{n1} t) \left[x_{N10} \cos \omega_{d1} t + \frac{1}{\omega_{d1}} (x_{N10} + \xi_1 \omega_{n1} x_{N10}) \sin \omega_{d1} t \right] \\ \exp(-\xi_2 \omega_{n2} t) \left[x_{N20} \cos \omega_{d2} t + \frac{1}{\omega_{d2}} (x_{N20} + \xi_2 \omega_{n2} x_{N20}) \sin \omega_{d2} t \right] \\ \exp(-\xi_n \omega_{nn} t) \left[x_{Nn0} \cos \omega_{dn} t + \frac{1}{\omega_{dn}} (x_{Nn0} + \xi_n \omega_{nn} x_{Nn0}) \sin \omega_{dn} t \right] \end{Bmatrix} \quad (4-90)$$

4.4 多自由度系统的对激振的响应

4.4.1 无阻尼系统对简谐激振的响应

对于无阻尼多自由度系统的强迫振动,可列出矩阵形式的作用力方程(4-2)

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\}$$

当激振力是同频率、同相位的简谐力时,方程(4-2)写为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \sin \omega t \quad (4-91)$$

式中 $\{F\}$ 为激振力幅值列阵 $\{F_1, F_2 \cdots F_n\}^T$ 。

式(4-76)为 n 个方程的方程组,而且是互相耦联的方程组。为了便于求解,需解除方程组的耦联,利用振型矩阵 $[A_p]$,将方程(4-76)变换为主坐标

$$[A_p]^T [M] [A_p] \{\ddot{x}_p\} + [A_p]^T [K] [A_p] \{x_p\} = [A_p]^T \{F\} \sin \omega t$$

$$\text{或写成} \quad [M_p] \{\ddot{x}_p\} + [K_p] \{x_p\} = \{F_p\} \sin \omega t \quad (4-92)$$

式中 $[M_p]$, $[K_p]$ 分别为主质量矩阵和主刚度矩阵,而 $\{F_p\}$ 是用主坐标表示的激振力幅值列阵

$$\{F_p\} = [A_p]^T \{F\} \quad (4-93)$$

写成展开的形式

$$\{F_p\} = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & \cdots & A_1^{(n)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} & \cdots & A_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n^{(1)} & A_n^{(2)} & \cdots & A_n^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (4-94)$$

如果进一步以正则振型矩阵 $[A_N]$ 代替 $[A_p]$,则方程(4-93)变为

$$\{F_N\} = [A_N]^T \{F\} \quad (4-95)$$

进而按正则坐标,方程(4-92)可写为

$$[I] \{\ddot{x}_N\} + [K_N] \{x_N\} = \{F_N\} \sin \omega t \quad (4-96)$$

式(4-96)可以展开写成

$$\ddot{x}_{Ni} + \omega_{ni}^2 x_{Ni} = f_{Ni} \sin \omega t \quad (i = 1, 2 \cdots n) \quad (4-97)$$

式中: f_{Ni} ($i = 1, 2 \cdots n$), 由式(4-95)确定。

式(4-97)表示 n 个独立方程,具有与单自由度相同的形式,因而可以用单自由度系统强迫振动的结果求出每个正则坐标的振幅

$$B_{Ni} = \frac{f_{Ni}}{\omega_{ni}^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{ni}}\right)^2} \quad (i = 1, 2 \cdots n) \quad (4-98)$$

系统各坐标对简谐激振的响应

$$\{x_N\} = \begin{Bmatrix} B_{N1} \\ B_{N2} \\ \vdots \\ B_{Nn} \end{Bmatrix} \sin \omega t \quad (4-99)$$

求出 $\{x_N\}$ 后,按关系式 $\{x\} = [A_N] \{x_N\}$ 进行坐标变换,求出原坐标的响应。这种求系统响应的方法称为振型叠加法。由式(4-98)可知,当激振频率 ω 与系统的第 i 阶固有频率 ω_{ni} 接近时,第 i 阶正则坐标 x_{Ni} 的稳态受迫振动的振幅值变得很大。与单自由度系统的共振现象类似,对于 n 个自由度系统的 n 个不同的固有频率,可以出现 n 个频率不同的共振现象。

【例 4-10】 求例 4-4 所示系统,对质量 m_2 作用简谐激振力 $F_2 \sin \omega t$, 试计算其响应。

解: 已知固有频率和正则矩阵分别为

$$\omega_{n1} = 0.592\,845 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_{n2} = 1.267\,517 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_{n3} = 1.882\,003 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$[A_N] = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.224\,17 & -0.431\,677 & 0.513\,228 \\ 0.481\,637 & -0.385\,66 & -0.534\,751 \\ 0.742\,654 & 0.635\,775 & 0.210\,371 \end{bmatrix}$$

$$\{F_N\} = [A_N]^T \{F\} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.224\,17 & 0.481\,637 & 0.742\,654 \\ -0.431\,677 & -0.385\,66 & 0.635\,775 \\ 0.513\,228 & -0.534\,751 & 0.210\,371 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \sin \omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

得

$$\{F_N\} = \frac{F_2}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 0.481\,637 \\ -0.385\,66 \\ 0.534\,751 \end{Bmatrix}$$

正则坐标的响应

$$\begin{Bmatrix} x_{N10} \\ x_{N20} \\ x_{N30} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_{N1} \\ B_{N2} \\ B_{N3} \end{Bmatrix} \sin \omega t = \frac{F_2}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} \frac{0.481\,637}{\omega_{n1}^2 - \omega^2} \\ -\frac{0.385\,66}{\omega_{n2}^2 - \omega^2} \\ \frac{0.534\,751}{\omega_{n3}^2 - \omega^2} \end{Bmatrix} \sin \omega t$$

坐标变换, 求出原坐标的响应

$$\{x\} = [A_N] \{x_N\} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.224\,17 & -0.431\,677 & -0.513\,228 \\ -0.481\,637 & -0.385\,66 & 0.534\,751 \\ 0.742\,654 & 0.635\,775 & -0.210\,371 \end{bmatrix} \times$$

$$\frac{F_2}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} \frac{0.481\,637}{\omega_{n1}^2 - \omega^2} \\ -\frac{0.385\,66}{\omega_{n2}^2 - \omega^2} \\ \frac{0.534\,751}{\omega_{n3}^2 - \omega^2} \end{Bmatrix} \sin \omega t$$

$$= \frac{F_2}{m} \begin{Bmatrix} \frac{0.481\,637}{\omega_{n1}^2 - \omega^2} + \frac{-0.385\,66}{\omega_{n2}^2 - \omega^2} + \frac{0.534\,751}{\omega_{n3}^2 - \omega^2} \\ \frac{0.481\,637}{\omega_{n1}^2 - \omega^2} + \frac{-0.385\,66}{\omega_{n2}^2 - \omega^2} + \frac{0.534\,751}{\omega_{n3}^2 - \omega^2} \\ \frac{0.481\,637}{\omega_{n1}^2 - \omega^2} + \frac{-0.385\,66}{\omega_{n2}^2 - \omega^2} + \frac{0.534\,751}{\omega_{n3}^2 - \omega^2} \end{Bmatrix} \sin \omega t$$

若激振力为非简谐周期性变化的激振函数, 可将展开成傅立叶级数, 之后仍按振型叠加法如同上述步骤进行求解。

4.4.2 系统对一般激振的响应

当激振力为随时间非周期性变化时, 运动方程为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \quad (4-100)$$

用正则坐标表示

$$[I]\{\ddot{x}_N\} + [K_N]\{x_N\} = \{F_N(t)\} \quad (4-101)$$

式中 $\{F_N(t)\} = [A_N]^T \{F(t)\}$ 为对应于正则坐标的非周期激振力列阵。

$$\ddot{x}_{Ni} + \omega_n^2 x_{Ni} = f_{Ni}(t) \quad (i = 1, 2 \cdots n) \quad (4-102)$$

方程(4-102)表示 n 个独立的方程, 具有与单自由度相同的形式, 因此可以采用杜哈梅积分式, 对于第 i 个正则坐标的响应, 则为

$$x_{Ni}(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t f_{Ni}(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \quad (i = 1, 2 \cdots n) \quad (4-103)$$

式(4-103)表示一个初始处于静止状态的无阻尼单自由度系统的位移响应。重复使用该式, 即可算出正则坐标中的位移响应 $\{x_N\}$ 。然后再根据 $\{x\} = [A_N]\{x_N\}$ 关系, 变换为原坐标。

【例 4-11】 求例 4-4 所示系统, 对质量 m_1 作用有激振力 F_1 时, 试计算其响应。

解: 已知固有频率和正则矩阵分别为

$$\omega_{n1} = 0.592845\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_{n2} = 1.267517\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_{n3} = 1.882003\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$[A_N] = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.22417 & -0.431677 & 0.513228 \\ 0.481637 & -0.38566 & -0.534751 \\ 0.742654 & 0.635775 & 0.210371 \end{bmatrix}$$

正则坐标下激振力列阵

$$\begin{aligned} \{F_N\} &= [A_N]^T \{F\} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.22417 & 0.481637 & 0.742654 \\ -0.431677 & -0.38566 & 0.635775 \\ 0.513228 & -0.534751 & 0.210371 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{F_1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 0.22417 \\ -0.431677 \\ 0.513228 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_{N1} \\ q_{N2} \\ q_{N3} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

由例 2-6 已求得阶跃函数的响应为

$$x_{Ni} = \frac{q_{Ni}}{\omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t)$$

所以正则坐标的响应列阵为

$$\{x_N\} = \begin{Bmatrix} x_{N1} \\ x_{N2} \\ x_{N3} \end{Bmatrix} = \frac{F_1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} \frac{0.22417(1 - \cos \omega_{n1} t)}{\omega_{n1}^2} \\ -0.431677(1 - \cos \omega_{n2} t) \\ \frac{0.513228(1 - \cos \omega_{n3} t)}{\omega_{n3}^2} \end{Bmatrix}$$

将 $\omega_{n1} = 0.592845\sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_{n2} = 1.267517\sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_{n3} = 1.882003\sqrt{\frac{k}{m}}$ 代入上式得

$$\{x_N\} = \frac{F_1 \sqrt{m}}{k} \begin{Bmatrix} 0.6378(1 - \cos \omega_{n1} t) \\ -0.2687(1 - \cos \omega_{n2} t) \\ 0.1449(1 - \cos \omega_{n3} t) \end{Bmatrix}$$

将正则坐标变换回原坐标, 得所求的响应

$$\{x\} = [A_N]\{x_N\} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.224\,17 & -0.431\,677 & 0.513\,228 \\ 0.481\,637 & -0.385\,66 & -0.534\,751 \\ 0.742\,654 & 0.635\,775 & 0.210\,371 \end{bmatrix} \times$$

$$\frac{F_1 \sqrt{m}}{k} \begin{Bmatrix} 0.637\,8(1 - \cos \omega_{n1} t) \\ -0.268\,7(1 - \cos \omega_{n2} t) \\ 0.144\,9(1 - \cos \omega_{n3} t) \end{Bmatrix}$$

$$\{x_N\} = \frac{F_1}{k} \begin{Bmatrix} 0.333\,4 - 0.143\,0 \cos \omega_{n1} t - 0.116\,0 \cos \omega_{n2} t - 0.074\,4 \cos \omega_{n3} t \\ 0.333\,3 - 0.307\,2 \cos \omega_{n1} t - 0.103\,6 \cos \omega_{n2} t + 0.077\,5 \cos \omega_{n3} t \\ 0.333\,3 - 0.473\,7 \cos \omega_{n1} t + 0.170\,8 \cos \omega_{n2} t - 0.030\,5 \cos \omega_{n3} t \end{Bmatrix}$$

4.4.3 有阻尼系统对激振的响应

1) 对简谐激振的响应

多自由度系统在外加简谐激振力作用下的强迫振动微分方程为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \sin \omega t \quad (4-104)$$

在各阶振型阻尼系数值 ξ 较小的情况下,总可以采用前述的方法,采用正则坐标 $\{x_N\}$ 代替原有坐标 $\{x\}$,变换成下述互不耦合的正则坐标的强迫振动微分方程

$$[I]\{\ddot{x}_N\} + [C_N]\{\dot{x}_N\} + [K_N]\{x_N\} = \{F_N\} \sin \omega t \quad (4-105)$$

其展开式为

$$\ddot{x}_{Ni} + C_{Nii} \dot{x}_{Ni} + \omega_{ni}^2 x_{Ni} = q_{Ni} \sin \omega t \quad (i = 1, 2 \cdots n) \quad (4-106)$$

式中 $\{x_N\}$ 、 $\{F_N\}$ 与 $\{x\}$ 、 $\{F\}$ 的关系

$$\{x\} = [A_N]\{x_N\}$$

$$\{x_N\} = [A_N]^T [M]\{x\}$$

$$\{F_N\} = [A_N]^T \{F\}$$

而 C_{Nii} 为第 i 阶主振动的振型阻尼系数, $C_{Nii} = 2n_i = 2\xi_i \omega_{ni}$, (4-106) 式也可改写为

$$\ddot{x}_{Ni} + 2n_i \dot{x}_{Ni} + \omega_{ni}^2 x_{Ni} = q_{Ni} \sin \omega t \quad (i = 1, 2 \cdots n) \quad (4-107)$$

或

$$\ddot{x}_{Ni} + 2\xi_i \omega_{ni} \dot{x}_{Ni} + \omega_{ni}^2 x_{Ni} = q_{Ni} \sin \omega t$$

这是以正则坐标描述的 n 个独立的单自由度有阻尼系统强迫振动的微分方程,所以可以利用单自由度系统强迫振动的结果,得到每个正则坐标的响应

$$x_{Ni} = B_{Ni} \sin(\omega t - \phi_i) \quad (i = 1, 2 \cdots n) \quad (4-108)$$

式中:

$$B_{Ni} = \frac{\frac{q_{Ni}}{\omega_{ni}^2}}{\sqrt{(1 - r_i^2)^2 + (2\xi_i r_i)^2}}, \quad \phi_i = \arctan \frac{2\xi_i r_i}{1 - r_i^2} \quad (4-109)$$

r_i 为激振频率与第 i 阶固有频率的比值, $r_i = \frac{\omega}{\omega_{ni}}$ 。

然后通过坐标变换,将正则坐标的位移向量变换为原坐标的位移向量,从而求得对原坐标的位移响应。

【例 4-12】 图 4-7 所示有阻尼的弹簧质量系统,如 $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $k_1 = k_2 = k_3 = k$ 各质量上作用的激振力为, $F_1 = F_2 = F_3 = F \sin \omega t$ (其中 $\omega = 1.25 \sqrt{\frac{k}{m}}$), 各阶正则

振型的相对阻尼系数 $\xi_{N1} = \xi_{N2} = \xi_{N3} = \xi = 0.01$, 试用振型叠加法求出各质量的强迫振动稳态响应。

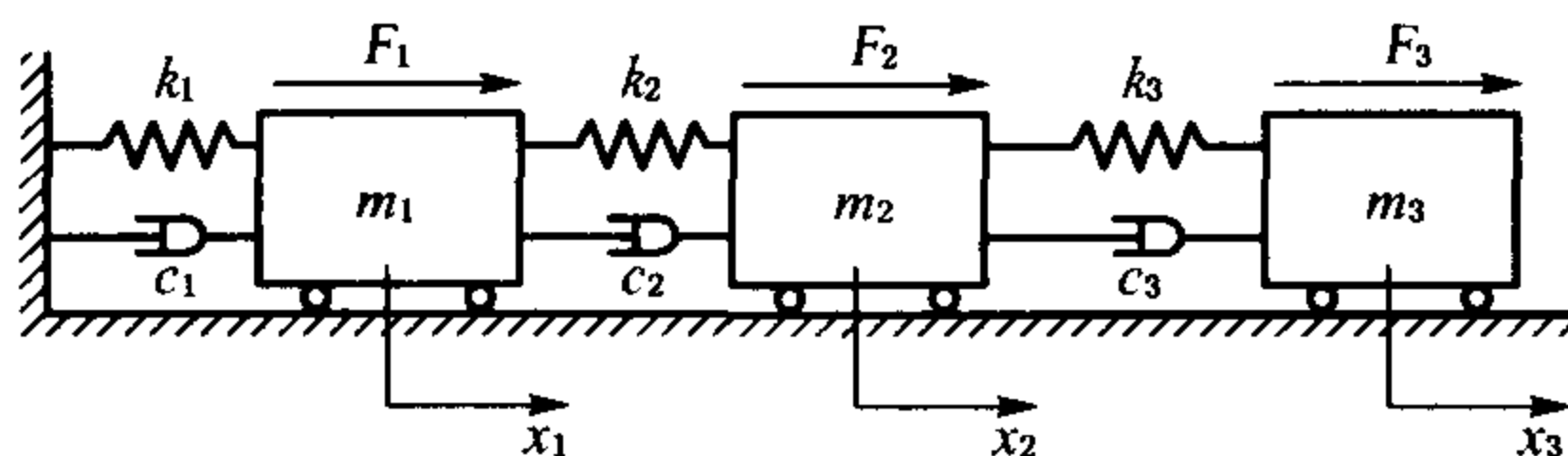


图 4-7 多自由度强迫振动系统

解: 其振动方程为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \sin \omega t$$

其展开式为

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \sin \omega t \\ F_2 \sin \omega t \\ F_3 \sin \omega t \end{Bmatrix}$$

利用例 4-4 的方法, 求得系统的固有频率和振型矩阵分别为

$$\omega_{n1} = 0.445 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_{n2} = 1.247 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_{n3} = 1.802 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$[A_P] = \begin{bmatrix} 0.445 & -1.247 & 1.802 \\ 0.802 & -0.555 & -2.247 \\ 1.000 & 1.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

由 $\{A_N^{(i)}\} = \frac{1}{c_i} \{A^{(i)}\}$ 求各阶正则振型

其中 $c_i = \sqrt{\{A^{(i)}\}^T [M] \{A^{(i)}\}}$, $c_1 = 3.049 \sqrt{m}$, $c_2 = 1.357 \sqrt{m}$, $c_3 = 1.692 \sqrt{m}$

故正则振型矩阵为

$$[A_N] = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.328 & -0.737 & 0.591 \\ 0.591 & -0.328 & -0.737 \\ 0.737 & 0.591 & 0.328 \end{bmatrix}$$

设 $\{x\} = [A_N]\{x_N\}$, 则得方程为

$$\{\ddot{x}_N\} + 2\xi \begin{bmatrix} \omega_{n1} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{n2} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{n3} \end{bmatrix} \{\dot{x}_N\} + \begin{bmatrix} \omega_{n1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{n2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{n3}^2 \end{bmatrix} \{x_N\} = [A_N]^T F \sin \omega t = \frac{F}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 1.656 \\ -0.474 \\ 0.182 \end{Bmatrix} \sin \omega t = \begin{Bmatrix} q_{N1} \\ q_{N2} \\ q_{N3} \end{Bmatrix} \sin \omega t$$

上式为 3 个互相独立的微分方程, 各正则坐标的振幅式和相位由公式

$$B_{N_i} = \frac{\frac{q_{Ni}}{\omega_m^2}}{\sqrt{(1-r_i^2)^2 + (2\xi_i r_i)^2}}, \quad \phi_i = \tan^{-1} \frac{2\xi_i r_i}{1-r_i^2}$$

计算, 激振频率与各阶固有频率的频率比为

$$r_1 = 2.8090, \quad r_2 = 1.0024, \quad r_3 = 0.6937$$

$$r_1^2 = 7.8905, \quad r_2^2 = 1.0048, \quad r_3^2 = 0.4812$$

算得

$$\phi_1 = \arctan \frac{0.02 \times 2.8090}{-6.8905} = 179^\circ 32'$$

$$\phi_2 = \arctan \frac{0.02 \times 1.0024}{-0.0048} = 103^\circ 30'$$

$$\phi_3 = \arctan \frac{0.02 \times 0.6937}{0.5188} = 1^\circ 32'$$

$$B_{N1} = 1.2136 \frac{\sqrt{mF}}{k}, \quad B_{N2} = -14.784 \frac{\sqrt{mF}}{k}, \quad B_{N3} = 0.10799 \frac{\sqrt{mF}}{k}$$

$$\{x_N\} = \frac{\sqrt{mF}}{k} \begin{Bmatrix} 1.2136 \sin(\omega t - \phi_1) \\ -14.784 \sin(\omega t - \phi_2) \\ 0.10799 \sin(\omega t - \phi_3) \end{Bmatrix}$$

将正则坐标变换到原坐标

$$\begin{aligned} \{x\} &= [A_N] \{x_N\} = \frac{F}{k} \begin{bmatrix} 0.328 & -0.737 & 0.591 \\ 0.591 & -0.328 & -0.737 \\ 0.737 & 0.591 & 0.328 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.2136 \sin(\omega t - \phi_1) \\ -14.784 \sin(\omega t - \phi_2) \\ 0.10799 \sin(\omega t - \phi_3) \end{Bmatrix} \\ &= \frac{F}{k} \begin{Bmatrix} 0.398 \sin(\omega t - \phi_1) + 10.896 \sin(\omega t - \phi_2) + 0.064 \sin(\omega t - \phi_3) \\ 0.717 \sin(\omega t - \phi_1) + 4.849 \sin(\omega t - \phi_2) - 0.080 \sin(\omega t - \phi_3) \\ 0.894 \sin(\omega t - \phi_1) - 8.737 \sin(\omega t - \phi_2) + 0.035 \sin(\omega t - \phi_3) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

由以上计算详细过程比较清楚地看出振型叠加法的步骤: ①把原坐标变换成正则坐标, 使方程组解耦; ②应用单自由度系统对外激振的响应计算方法, 求出各正则坐标对外激振的响应; ③将正则坐标对外激振的响应叠加起来; ④将正则坐标变换到原坐标, 求得系统原坐标 $\{x\}$ 对外激振的响应。

2) 一般周期激振的响应

当系统各坐标上作用有与一般周期函数 $f(t)$ 成比例的激振时, 激振力向量可以写成

$$\{F(t)\} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_N \end{Bmatrix} f(t)$$

周期函数 $f(t)$ 可展成傅立叶级数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos j\omega_0 t + b_j \sin j\omega_0 t) \quad (4-110)$$

式中系数 a_0, a_n, b_n 可按第1章中给出的方法求出, 在一般周期激振力下的振动方程, 变换

成正则坐标后,可得出与式(4-107)类似的 n 个独立方程

$$\ddot{x}_{Ni} + 2\xi_i \omega_{ni} \dot{x}_{Ni} + \omega_{ni}^2 x_{Ni} = q_{Ni} f(t) \quad (i = 1, 2 \cdots n) \quad (4-111)$$

按正则坐标,第 i 阶的有阻尼稳态响应为

$$x_{Ni} = \frac{q_{Ni}}{\omega_{ni}^2} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{ij} [a_j \cos(j\omega_0 t - \phi_{ij}) + b_j \sin(j\omega_0 t - \phi_{ij})] \quad (i = 1, 2 \cdots n; j = 1, 2 \cdots n) \quad (4-112)$$

$$\text{式中: } \beta_{ij} \text{——放大因子, } \beta_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{j^2 \omega_0^2}{\omega_{ni}^2}\right)^2 + \left(2\xi_i \frac{j\omega_0}{\omega_{ni}}\right)^2}} \quad (4-113)$$

$$\text{相位角} \quad \phi_{ij} = \arctan \frac{2\xi_i \frac{j\omega_0}{\omega_{ni}}}{1 - \left(\frac{j\omega_0}{\omega_{ni}}\right)^2} \quad (4-114)$$

注意以上对于任意阶正则坐标的响应,是多个具有不同频率的激振力引起的响应的叠加。因此对一般周期振动而言,产生共振的可能性要大得多。

当激振力是非周期函数时,可用杜哈梅积分求出正则坐标下的响应,然后再通过坐标变换,求出原坐标下的响应。

4.5 多自由度系统固有频率及主振型的计算

由前述可知系统的固有频率及主振型的计算随着系统的自由度的增加而变得极为烦琐,工作量很大。所以在电子计算机未被用于工程计算之前,多自由度一般理论尚无法在工程实践中应用。目前求解多自由度系统的固有频率及主振型的计算方法很多,有的已有标准的计算程序可供选用。常用的方法有矩阵迭代法、邓柯莱法、瑞利法、李兹法、子空间迭代法等。下面介绍常用的矩阵迭代法、邓柯莱法和瑞利法。

4.5.1 矩阵迭代法

对于无阻尼多自由度系统,由刚度法(4-13)式可得

$$[K]\{A\} = \omega_n^2 [M]\{A\}$$

该式可变换为

$$\omega_n^2 \{A\} = [M]^{-1} [K] \{A\} \quad (4-115)$$

对于正定系统,无阻尼多自由度系统还可用柔度矩阵表示为

$$\frac{1}{\omega_n^2} \{A\} = [\delta] [M] \{A\} \quad (4-116)$$

现将(4-115)式和(4-116)式合并为如下形式

$$\lambda \{A\} = [D] \{A\} \quad (4-117)$$

式中方阵 $[D]$ 称为动力矩阵,当用刚度矩阵形成时, $[D] = [M]^{-1} [K]$; 当用柔度矩阵形成时, $[D] = [\delta] [M]$ 。式中 λ 当 $[D]$ 为前者时, $\lambda = \omega_n^2$; 当 $[D]$ 为后者时, $\lambda = \frac{1}{\omega_n^2}$ 。

所谓矩阵迭代法就是:首先假定任意一个主振型向量 $\{A\}_1$, 然后按(4-117)式计算

$[D]\{A\}_1 = \{B\}_1 = \lambda_1\{A\}_2$, 若此时 $\{A\}_2$ 恰好等于 $\{A\}_1$, 则 $\{A\}_2$ 即为主振型, 若 $\{A\}_2$ 并不等于 $\{A\}_1$, 则以 $\{A\}_2$ 代替 $\{A\}_1$ 作为主振型向量, 继续按(4-117)式计算 $[D]\{A\}_2 = \{B\}_2 = \lambda_2\{A\}_3$, 若 $\{A\}_3$ 不等于 $\{A\}_2$ 则继续上述迭代过程, 总可以在 m 次以后得到 $[D]\{A\}_m = \{B\}_m = \lambda_m\{A\}_{m+1}$, 满足 $\{A\}_m = \{A\}_{m+1}$ 的条件, 则迭代结束, $\{A\}_{m+1}$ 或 $\{A\}_m$ 即为主振型, 并由 λ_m 可求出固有频率。当按(4-115)式, 即刚度法进行迭代时, 迭代结果是最高阶的固有频率及其主振形; 当按(4-116)式, 即柔度法进行迭代时, 迭代结果是最低阶(第一阶)的固有频率及其主振型。由于一般首先希望得到的都是最低阶的固有频率及主振型。所以都是用柔度法进行计算, 先要求出柔度矩阵。

【例 4-13】 用矩阵迭代法求例 4-4 中弹簧质量系统最低阶固有频率及其主振型。

解: 已知系统的质量矩阵为

$$[M] = \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 1.5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

柔度矩阵为

$$[\delta] = [K]^{-1} \begin{bmatrix} 5K & -2K & 0 \\ -2K & 3K & -K \\ 0 & -K & K \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6K} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

动力矩阵为

$$[D] = [\delta][M] = \frac{m}{6K} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{m}{6K} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & 7.5 & 5 \\ 4 & 7.5 & 11 \end{bmatrix}$$

若设原始主振型向量为

$$\{A\}_2 = \begin{Bmatrix} A_{1,1} \\ A_{2,1} \\ A_{3,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

求 $\{B\}_1$, 并向 $A_{3,1}$ 归一化, 得

$$\{B\}_1 = [D]\{A\}_1 = \frac{m}{6K} \begin{Bmatrix} 9 \\ 16.5 \\ 22.5 \end{Bmatrix} = \frac{22.5m}{K} \begin{Bmatrix} 0.400\ 000 \\ 0.733\ 333 \\ 1.000\ 00 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{22.5m}{6K}, \quad \{A\}_2 = \begin{Bmatrix} 0.400\ 000 \\ 0.733\ 333 \\ 1.000\ 000 \end{Bmatrix}$$

进行第二次迭代后

$$\begin{aligned} \{B\}_2 &= [D]\{A\}_2 = \frac{m}{6K} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & 7.5 & 5 \\ 4 & 7.5 & 11 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.400\ 000 \\ 0.733\ 333 \\ 1.000\ 000 \end{Bmatrix} = \frac{m}{6K} \begin{bmatrix} 5.800\ 000 \\ 12.100\ 00 \\ 18.100\ 00 \end{bmatrix} \\ &= \frac{18.1m}{6K} \begin{Bmatrix} 0.320\ 442 \\ 0.668\ 508 \\ 1.000\ 000 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\lambda_2 = \frac{18.1m}{6K}, \quad \{A\}_3 = \begin{Bmatrix} 0.320\,442 \\ 0.668\,508 \\ 1.000\,00 \end{Bmatrix}$$

如此反复进行迭代,当第 10 次迭代时与第 11 次迭代的振型向量已相同,即

$$\begin{aligned} \{A\}_{10} &= \begin{Bmatrix} 0.301\,850 \\ 0.648\,535 \\ 1.000\,000 \end{Bmatrix} \\ \{B\}_{10} &= [D]\{A\}_{10} = \frac{m}{6K} \begin{Bmatrix} 5.153\,01 \\ 11.071\,4 \\ 17.071\,4 \end{Bmatrix} = \frac{17.071\,4m}{6K} \begin{Bmatrix} 0.301\,850 \\ 0.648\,535 \\ 1.000\,000 \end{Bmatrix} \\ \{A\}_{11} &= \begin{Bmatrix} 0.301\,850 \\ 0.648\,535 \\ 1.000\,000 \end{Bmatrix} = \{A\}_{10} = \{A^{(1)}\} \\ \lambda_{10} &= \frac{1}{\omega_{n1}^2} = \frac{17.071\,41m}{6K} = \frac{2.845\,235m}{K} \end{aligned}$$

所以

$$\omega_{n1}^2 = 0.351\,465 \frac{K}{m}$$

此结果与例 4-4 完全相同。

当一阶振型求出后,仍可以用矩阵迭选法逐个求出二阶及二阶以上各阶固有频率及主振型。这只需将原始主振型向量 $\{A\}_1$ 中不包含第一阶主振型的成分,则依次迭代后将收敛于第二阶主振型,并可求出二阶固有频率。同理,若原始主振型向量中不包括第一、第二两阶主振型,则迭代后求出第三阶主振型及固有频率,依此类推可求得各阶主振型及固有频率。

其关键是如何使所给原始主振型向量中不包含低阶主振型的成分,根据主振型对质量矩阵 $[M]$ 的正交性,可得

$$\{A^{(1)}\}^T [M] \{A\}_1 = c_1 \{A^{(1)}\}^T [M] \{A^{(1)}\} = c_1 M_1$$

$$\text{所以} \quad c_1 = \frac{1}{M_1} \{A^{(1)}\}^T [M] \{A\}_1 \quad (4-118)$$

任选一组元素组成原始主振型向量 $\{A\}_1$,它都可以表达为各主振型之和的形式,即

$$\{A\}_1 = c_1 \{A^{(1)}\} + c_2 \{A^{(2)}\} + \cdots + c_n \{A^{(n)}\} \quad (4-119)$$

任选的原始主振向量 $\{A\}_1$ 先乘以动力矩阵 $[D]$,即

$$\begin{aligned} \{B\}_1 &= [D]\{A\}_1 = [D](c_1 \{A^{(1)}\} + c_2 \{A^{(2)}\} + \cdots + c_n \{A^{(n)}\}) \\ &= \frac{c_1}{\omega_{n1}^2} \{A^{(1)}\} + \frac{c_2}{\omega_{n2}^2} \{A^{(2)}\} + \cdots + \frac{c_n}{\omega_{nn}^2} \{A^{(n)}\} \end{aligned} \quad (4-120)$$

为使新的原始主振向量不包括第一阶主振形,将式 $\{B\}_1 - \frac{c_1}{\omega_{n1}^2} \{A^{(1)}\}$ 作为新的原始主振

向量。代入式(4-118)得 $c = \frac{1}{M_1} \{A^{(1)}\}^T [M] \{A\}_1$ 得新的原始主振向量

$$\{B\}_1 - \frac{c_1}{\omega_{n1}^2} \{A^{(1)}\} = [D]\{A\}_1 - \frac{\{A^{(1)}\}}{\omega_{n1}^2} \cdot \frac{\{A^{(1)}\}^T [M] \{A\}_1}{M_1}$$

$$= \left([D] - \frac{1}{M_1 \omega_{n1}^2} \{A^{(1)}\} \{A^{(1)}\}^T [M] \right) \{A\}_1 \quad (4-121)$$

令 $[D]^* = [D] - \frac{1}{M_1 \omega_{n1}^2} \{A^{(1)}\} \{A^{(1)}\}^T [M]$, 可先将 $[D]^*$ 计算出来, 然后乘以任选的原始主振型向量作为新的原始主振型向量, 并在进行迭代过程中不再使用动力矩阵 $[D]$, 而是始终以 $[D]^*$ 矩阵依下列次序进行迭代计算, 并归一化

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 \{A\}_2 &= \{B\}_1 = [D]^* \{A\}_1 \\ \lambda_2 \{A\}_3 &= \{B\}_2 = [D]^* \{A\}_2 \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (4-122)$$

直至满足 $\{A\}_m = \{A\}_{m+1}$ 的条件。同样, 在求出一、二阶主振型及固有频率后要计算第三阶时, 也要先计算矩阵 $[D]^*$, 此时

$$[D]^* = [D] - \frac{1}{M_1 \omega_{n1}^2} \{A^{(1)}\} \{A^{(1)}\}^T [M] - \frac{1}{M_2 \omega_{n2}^2} \{A^{(2)}\} \{A^{(2)}\}^T [M]$$

然后以 $[D]^* \{A\}_1$ 作为新的原始主振型向量, 且用 $[D]^*$ 矩阵进行迭代计算。

在求出第 $i-1$ 阶振型及固有频率后要计算第 i 阶时, 矩阵 $[D]^*$ 的一般表达式为

$$\begin{aligned} [D]^* &= [D] - \frac{1}{M_1 \omega_{n1}^2} \{A^{(1)}\} \{A^{(1)}\}^T [M] - \frac{1}{M_2 \omega_{n2}^2} \{A^{(2)}\} \{A^{(2)}\}^T [M] \\ &\quad - \dots - \frac{1}{M_{i-1} \omega_{ni-1}^2} \{A^{(i-1)}\} \{A^{(i-1)}\}^T [M] \end{aligned} \quad (4-123)$$

【例 4-14】 在例 4-11 计算的基础上, 继续求出系统第二阶、第三阶固有频率及主振型。

解: 先求矩阵 $[D]^*$, 按上题中的结果可求出 M_1

$$\begin{aligned} M_1 &= \{A^{(1)}\}^T [M] \{A^{(1)}\} \\ &= \{0.30185, 0.648535, 1.0\} \begin{bmatrix} 2m & & \\ & 1.5m & \\ & & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.30185 \\ 0.648535 \\ 1.0 \end{Bmatrix} \\ &= 1.81312m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{A^{(1)}\} \{A^{(1)}\}^T [M] &= \begin{Bmatrix} 0.30185 \\ 0.648535 \\ 1.0 \end{Bmatrix} \{0.30185, 0.648535, 1.0\} \begin{bmatrix} 2m & & \\ & 1.5m & \\ & & m \end{bmatrix} \\ &= m \begin{bmatrix} 0.182227 & 0.293641 & 0.30185 \\ 0.391521 & 0.630897 & 0.648535 \\ 0.6037 & 0.972803 & 1.0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [D]^* &= [D] - \frac{1}{M_1 \omega_{n1}^2} \{A^{(1)}\} \{A^{(1)}\}^T [M] \\ &= \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 0.380708 & 0.039206 & -0.140343 \\ 0.052275 & 0.259968 & -0.184378 \\ -0.280686 & -0.276566 & 0.264088 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{仍选 } \{A\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

新的原始主振型向量为

$$\lambda_1 \{A\}_2 = \{B\}_1 = [D]^* \{A\}_1 = \frac{m}{k} \begin{Bmatrix} 0.279\,571 \\ 0.127\,865 \\ -0.293\,165 \end{Bmatrix} = \frac{-0.293\,165m}{k} \begin{Bmatrix} -0.953\,63 \\ -0.436\,155 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

依次进行 19 次迭代后,得

$$\lambda_{19} \{A\}_{20} = \{B\}_{19} = \frac{m}{k} \begin{Bmatrix} -0.422\,618 \\ -0.377\,567 \\ 0.622\,433 \end{Bmatrix} = \frac{-0.622\,433m}{k} \begin{Bmatrix} -0.678\,977 \\ -0.605\,599 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\{A\}_{20} = \begin{Bmatrix} -0.678\,977 \\ -0.605\,599 \\ 1 \end{Bmatrix} = \{A\}_{19} = \{A^{(2)}\}$$

$$\lambda_{19} = \frac{0.622\,433m}{k} = \frac{1}{\tilde{\omega}_{n2}^2}$$

所以

$$\tilde{\omega}_{n2}^2 = 1.606\,599 \frac{k}{m}$$

再求第三阶固有主振型

$$M_2 = \{A^{(2)}\}^T [M] \{A^{(2)}\} = 2.473\,96m$$

$$\begin{aligned} [D^*] &= [D] - \frac{1}{m_1 \tilde{\omega}_{n1}^2} \{A^{(1)}\} \{A^{(1)}\}^T [M] - \frac{1}{M_2 \tilde{\omega}_{n2}^2} \{A^{(2)}\} \{A^{(2)}\}^T [M] \\ &= \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 0.148\,734 & -0.116\,228 & 0.030\,483 \\ -0.154\,971 & 0.121\,103 & -0.031\,761 \\ 0.060\,966 & 0.047\,642 & 0.012\,492 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

如仍选原始主振型向量 $\{A\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

则新的原始主振型向量为

$$\{A\}_2 = \frac{1}{\lambda_1} [D]^* \{A\}_1 = \begin{Bmatrix} 2.439\,628 \\ -2.541\,936 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

进行第二次迭代计算得

$$\lambda_2 \{A\}_3 = [D]^* \{A\}_2 = \frac{m}{k} \begin{Bmatrix} 0.688\,784 \\ -0.717\,669 \\ 0.282\,331 \end{Bmatrix} = \frac{0.282\,331m}{k} \begin{Bmatrix} 2.439\,628 \\ -2.541\,936 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\text{故 } \{A\}_3 = \begin{Bmatrix} 2.439\,628 \\ -2.541\,936 \\ 1 \end{Bmatrix} = \{A\}_2 = \{A^{(3)}\}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\tilde{\omega}_{n3}^2} = \frac{0.282\,331m}{k}$$

所以

$$\tilde{\omega}_{n3}^2 = 3.541\,936 \frac{k}{m}$$

上述结果与例 4-4 完全相同。

4.5.2 邓柯莱法

在工程振动问题的分析中,很多场合下只需求出最低阶或最低几阶固有频率,这时可用近似方法直接求出系统的固有频率,邓柯莱法和瑞利法是两种常用的近似方法。首先介绍邓柯莱法。

对于二自由度系统,其特征方程可写成

$$\begin{bmatrix} \delta_{11}m_1 - \frac{1}{\omega_n^2} & \delta_{12}m_2 \\ \delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_2 - \frac{1}{\omega_n^2} \end{bmatrix} = 0$$

将行列式展开,得

$$\frac{1}{\omega_n^4} - \frac{\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2}{\omega_n^2} + m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}) = 0 \quad (4-124)$$

设 $\omega_{n1}^2, \omega_{n2}^2$ 是上述方程的两个根,则可写成

$$\left(\frac{1}{\omega_n^2} - \frac{1}{\omega_{n1}^2}\right) \left(\frac{1}{\omega_n^2} - \frac{1}{\omega_{n2}^2}\right) = 0$$

其展开式为

$$\frac{1}{\omega_n^4} - \left(\frac{1}{\omega_{n1}^2} + \frac{1}{\omega_{n2}^2}\right) \frac{1}{\omega_n^2} + \frac{1}{\omega_{n1}^2\omega_{n2}^2} = 0 \quad (4-125)$$

比较(4-124)式和(4-125)式的系数,可得

$$\frac{1}{\omega_{n1}^2} + \frac{1}{\omega_{n2}^2} = \delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2$$

一般 $\omega_{n2}^2 \gg \omega_{n1}^2$, 故 $\frac{1}{\omega_{n1}^2} \ll \frac{1}{\omega_{n2}^2}$, 因此得

$$\frac{1}{\omega_{n1}^2} \approx \delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2$$

将该结果推广到多自由度系统,得

$$\frac{1}{\omega_{n1}^2} = \delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2 + \cdots + \delta_{nn}m_n = \sum_{i=1}^n \delta_{ii}m_i \quad (4-126)$$

(4-126)式就是邓柯莱公式。式中 $\delta_{ii}m_i = \frac{1}{\omega_{mi}^2}$, ω_{mi} 是系统在质量 m_i 单独存在下(其他质量为零)系统的固有频率。因此上式也可写成

$$\frac{1}{\omega_{n1}^2} = \frac{1}{\omega_{n11}^2} + \frac{1}{\omega_{n22}^2} + \cdots + \frac{1}{\omega_{nnn}^2} \quad (4-127)$$

它说明系统最低阶固有频率平方 ω_{n1}^2 的倒数,近似等于各质量 $m_i (i=1, 2 \cdots n)$ 单独存在时所得的各固有频率平方 ω_{mi}^2 的倒数之和。

用邓柯莱公式可以近似地求系统的最低阶固有频率,但由这个公式算出 ω_{n1} 的值恒低于 ω_{n1} 的精确值。

【例 4-15】 用邓柯莱公式计算例 4-1 所示系统的一阶固有频率,并令 $m_1 = m_2 = m_3 = m$ 。

解:由例 4-1 求得

$$\delta_{11} = \frac{3L}{4T}, \quad \delta_{22} = \frac{L}{T}, \quad \delta_{33} = \frac{3L}{4T}$$

$$\frac{1}{\omega_{n1}^2} = \frac{3L}{4T}m + \frac{L}{T}m + \frac{3L}{4T}m = \frac{5L}{2T}m$$

故

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{2T}{5Lm}} = 0.6325\sqrt{\frac{T}{Lm}}$$

4.5.3 瑞利法

在第2章中已知,利用瑞利法可求单自由度系统的固有频率。我们还可以用瑞利法求多自由度系统的最低阶固有频率。

在多自由度系统中,动能 T 与势能 U 的一般表达式为

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T [M] \{\dot{x}\}$$

$$U = \frac{1}{2} \{x\}^T [K] \{x\}$$

设系统作简谐振动,则各坐标的位移和速度为

$$\{x\} = \{A\} \sin(\omega_n t + \varphi)$$

$$\{\dot{x}\} = \omega_n \{A\} \cos(\omega_n t + \varphi)$$

系统的最大动能和最大势能为

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \omega_n^2 \{A\}^T [M] \{A\}$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \{A\}^T [K] \{A\}$$

根据机械能守恒定律, $T_{\max} = U_{\max}$, 即

$$\omega_n^2 = \frac{\{A\}^T [K] \{A\}}{\{A\}^T [M] \{A\}} \quad (4-128)$$

(4-128)式就是用于估算系统固有频率的瑞利商。固有频率的计算结果与实际值接近的程度与振型向量假设的准确度有关。若按系统的静变形作为假设的第一阶振型向量,然后再用(4-128)式计算,得到的系统一阶固有频率具有较高的精度。由于假设的振型形状并不等于实际振动的一阶振型的形状,这等于对系统附加了约束,因此用瑞利法计算的固有频率总是偏高。

【例 4-16】 用瑞利法计算例 4-4 中系统的第一阶固有频率值。

【解】 由例 4-5 求得该系统的质量矩阵 $[M]$ 和刚度矩阵 $[K]$ 分别为

$$[M] = m \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [K] = k \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

并已求得 ω_{n1} 的精确值为

$$\omega_{n1} = 0.592844\sqrt{\frac{k}{m}}$$

现假设第一阶振型向量为

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

可算出

$$\{A\}^T[M]\{A\} = [1 \quad 1.5 \quad 2] m \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 2 \end{Bmatrix} = 9.375m$$

$$\{A\}^T[K]\{A\} = [1 \quad 1.5 \quad 2] k \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 2 \end{Bmatrix} = 3.750k$$

由(4-114)式可求得

$$\omega_{n1} = 0.6325 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

与精确解的相对误差为

$$\delta = \frac{0.6325 - 0.5928}{0.6325} \approx 6.3\%$$

如果假设振型向量 $\{A\}$ 为

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

则可算出 $\{A\}^T[M]\{A\} = 4.5m$, $\{A\}^T[K]\{A\} = 3k$ 。

利用(4-114)式可求得

$$\omega_{n1} = 0.8165 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ω_n 与 ω_{n1} 精确解的相对误差为 $\delta = 27\%$ 。

在例 4-12 中,我们曾用这里的 $\{A\}$ 作为 $\{A\}_1$,进行过矩阵迭代计算,得到 $\{A\}_2$ 为

$$\{A\}_2 = \begin{Bmatrix} 0.4000 \\ 0.7333 \\ 1.0000 \end{Bmatrix}$$

如果选取 $\{A\}_2$ 作为 $\{A\}$,然后用(4-114)式进行计算,就能得到

$$\omega_n = 0.6030 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

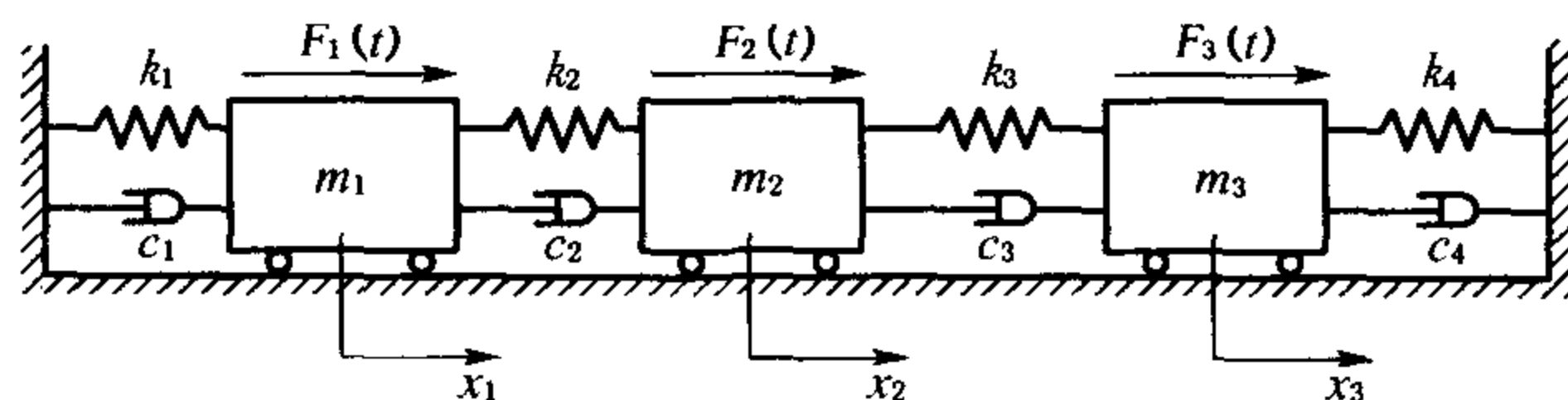
此 ω_n 作为 ω_{n1} 的近似值,相对误差为 1.7%。这说明所选的振型向量与实际的振型向量越接近,则计算出的固有频率与精确解的相对误差就越小。

习题与思考题

- 4.1 什么叫多自由度系统的主振型? 在何种特定载荷作用下,多自由度系统按某个主振型做单一振动?
- 4.2 简述多自由度系统主坐标 $\{x_p\}$ 的含义及其与原坐标 $\{x\}$ 的关系。
- 4.3 主振型正交性所表示的意义是什么?
- 4.4 什么叫模态阻尼? 简述得到它的最简单办法?

4.5 简述求多自由度系统响应的振型叠加法的原理及步骤。

4.6 习题图 4-1 为弹簧质量系统。已知 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$, $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c$ 。试写出该系统的 ① 质量矩阵; ② 刚度矩阵; ③ 特征方程; ④ 该系统的固有频率, 并画出相应的主振型图。



习题图 4-1

4.7 习题图 4-1 所示系统, 当各阶振型相对阻尼系数 $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0.01$, $F_1(t) = F_2(t) = F_3(t) = F \sin \omega t$, 试求出系统的稳态响应。

4.8 试用矩阵迭代法求习题图 4-1 所示系统的固有频率及主振型。

4.9 试用邓柯莱法求习题图 4-1 所示系统的第一阶固有频率, 并将结果与精确解进行比较。

第5章 实验振动分析基础

5.1 概述

1) 实验振动分析的意义

在研究机械振动问题时,常需要在产生振动的现场测定机械结构物的各项振动参数,以了解结构的动态特性,判断产生振动的原因及其对周围环境的影响等。振动实验就是通过测试手段对振动进行分析研究,它是振动学科的一个重要组成部分。在实际工作状态或给定的试验条件下对实际的机械结构物进行实验测量,称为原型实验;而对不同尺度、不同特点的结构模型(满足相似条件)进行激振实验,然后,通过模型试验相似理论把结果换算到实际结构上去的方法,称为模型试验。

振动实验能配合理论分析对复杂的结构系统抽象出简化的计算模型,检验模型的正确性,同时为理论计算提供确切的数据;通过振动实验往往还能发现和修正某些理论上很难考虑到的因素;振动实验还能检验各种近似计算方法的正确性;有大量的实际结构系统需要通过实验来进行研究。

振动实验与测试的任务主要有以下5个方面:

- (1) 测定结构的动态特性参数,如系统的固有频率、振型、阻尼以及广义质量、刚度和材料的动力特性等。
- (2) 测定结构的动力响应,如振动位移(速度或加速度)和频响特性;以便进行结构强度、刚度、稳定以及优化分析;判断振源和制定减振措施。
- (3) 模拟振动条件,对结构进行耐振性能检测,为改进设计提供依据。
- (4) 标定试验,即对振动测试所用仪器设备进行参数标定,以确定仪器的使用范围及灵敏度等参数。
- (5) 对振动的结构进行识别,为建立和改进理论分析模式积累资料。

2) 振动测量方法

振动的基本参量,如位移、速度、加速度等,可通过不同的方法来测量,目前主要是采用电测法。

电测法是将振动参量转换成电信号,经电子系统放大后进行测量记录。它具有灵敏度高、放大倍数大、可以遥控及测试仪器携带方便等特点,在目前的振动测量中得到广泛使用。

振动测量仪器通常分为测振、处理放大和检测三部分。由测振传感器、信号放大变换电路、显示记录装置及分析设备几部分组成。

测振部分感受结构振动,称为传感器。因为传感器所接受到的振动信号往往很微弱,直接量测有困难,需要经过放大处理;检测部分将传感器所感受到的振动量进行量测。

测振传感器亦称拾振器。它的作用是感受振动信号,把振动量变换成电信号。

信号放大、变换电路包括前置放大器、微积分电路、滤波器等,可把已变换的电信号按需要进行放大处理,以便显示和记录。

记录分析设备是分别用来记录和分析信号的。随着电子技术的发展,计算机的普及应用,已实现由微机控制的实验数据自动采集和分析处理。

5.2 机械振动实验常用仪器设备

结构振动实验所需的设备取决于试验的目的及采用的实验方法。振动实验最基本的仪器设备大致可以分为:测振仪器、激振设备以及数据采集和分析设备。

5.2.1 测振传感器

测振仪器由测振传感器、信号放大器、显示记录装置及分析设备等几部分组成。

在测振仪器中,传感器十分关键。通过它将待分析的物理量(如压力、流量以及振动位移、速度、加速度等)转化为电信号(如电压、电流)。根据振动量测的不同要求,相应发展了多种测振传感器。

按被测振动参数,可分为位移式、速度式、加速度式或应变式以及测其他各种动力参数的传感器。按所采用的测量坐标系可分为相对式和绝对式传感器两大类:相对式传感器测定的是被测对象相对某一参考坐标系的振动;绝对式(也称惯性式)则是用来测定被测对象相对于大地的振动。绝对式振动传感器必须与被测振动体接触安装,而相对式传感器可以是接触式,亦可以是非接触式的。

振动测量中常用的传感器有如下几种:

1) 电动式速度传感器

电动式速度传感器是一种动圈式(磁电式)的传感器,当传感器与结构一起振动或传感器动圈上的顶杆与结构相连时,由于结构的振动,使传感器的动圈在磁场中产生运动,切割磁力线而产生感应电动势。感应电动势的大小与动圈运动速度成正比。因此,通过感应电动势的量测即可确定结构的振动速度。如图5-1所示为电动式速度传感器示意,其中图(a)为惯性式,传感器固定于振动体上,测得的结果为振动体的绝对速度;图(b)为相对式,传感器壳体固定于一个物体上,顶杆顶住另一个物体,测量所得为两物体的相对速度。

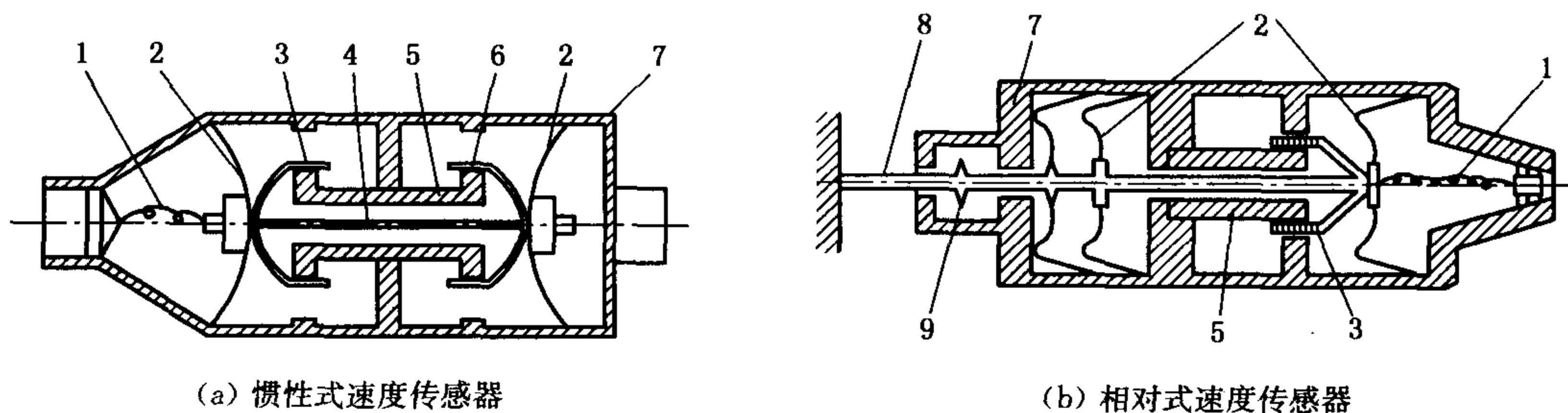


图5-1 电动式速度传感器

1. 输出线 2. 弹簧片 3. 线圈 4. 芯轴 5. 磁钢 6. 阻尼环 7. 壳体 8. 顶杆 9. 限幅器

与电动式速度传感器配套的二次仪表——电动式测振仪,主要是微积分放大器,滤波器和检测指示部分,用于对传感器输出的信号进行放大,可直接测量速度;并且经过积分电路可测量位移;经过微分电路可测量加速度。

2) 压电式加速度传感器

压电式加速度传感器简称压电加速度计,当它与结构一起振动时,传感器内质量块在加速度作用下将产生惯性力而使晶体片加压,由于晶体片的压电效应而产生电荷,在一定的压力范围内,输出电荷与加速度成正比。所以通过对压电加速度计输出电荷的量测即可确定加速度的大小。如图 5-2 所示为压电加速度计结构示意图。

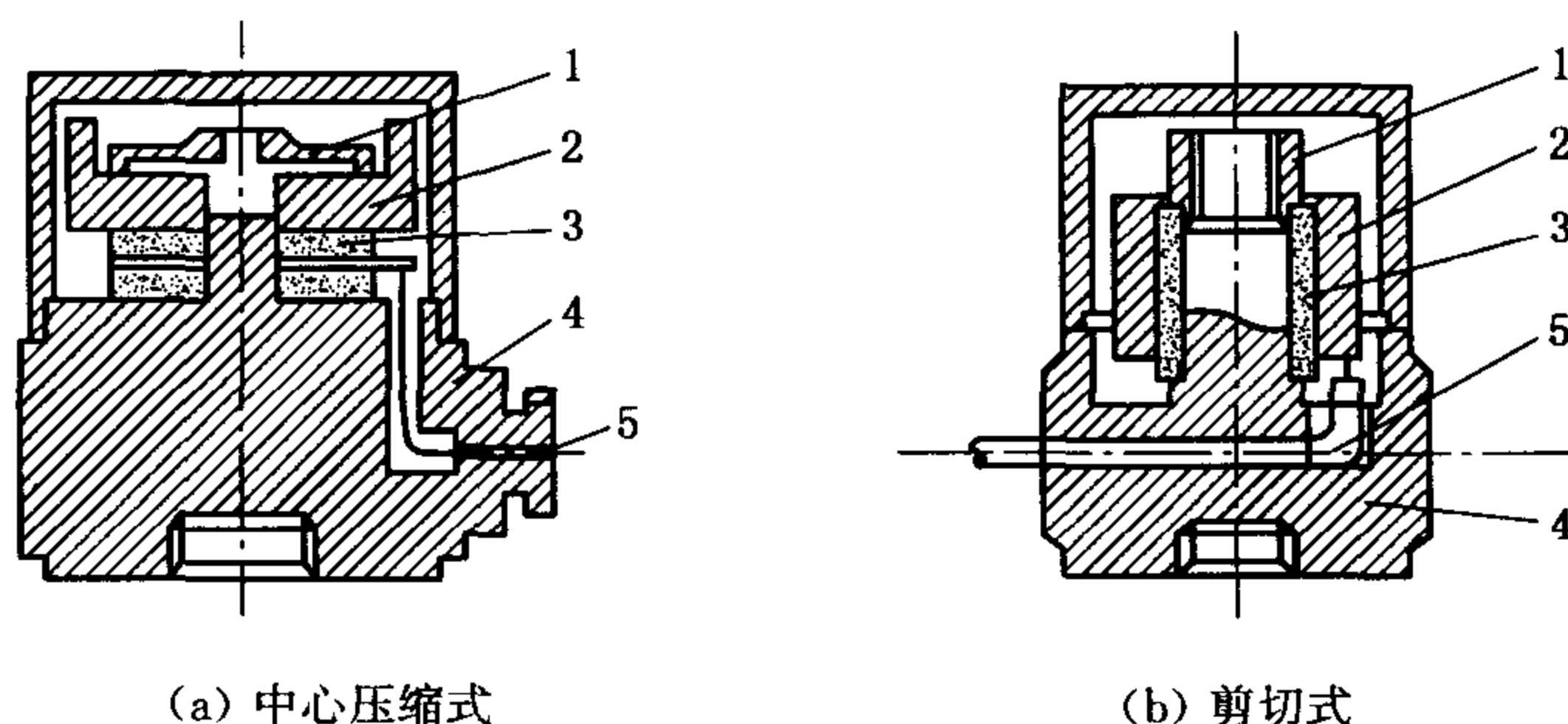


图 5-2 压电加速度计

1. 压缩弹簧 2. 质量块 3. 压电晶体 4. 基座 5. 引出线

压电加速度计配套的二次仪表常用电荷放大器,电荷放大器是一种高增益的带电容负反馈,并且输入阻抗极高的运算放大器。它的输出电压与压电加速度计发出的电荷成正比,与反馈电容成反比,它受电缆电容的影响很小,这是电荷放大器的一个主要优点。电荷放大器的输入端一定要很好地加以屏蔽。

3) 涡流式位移传感器

涡流式位移传感器是一种非接触式传感器,其头部有一线圈与谐振电容并联,构成并联谐振回路,当通有交变电流的传感器线圈靠近被测导体(振动体)表面时,在导体的表面产生感应电流——电涡流。导体与传感器之间间隙越小,导体产生的电涡流越大,传感器线圈的电感量就越小。它的输出电压是电感的函数,因此导体与传感器之间间隙变化时,测得输出电压值就可获得间隙值。

涡流式位移传感器的主要特点是它与被测点没有接触,因此它特别适用于旋转轴的振动量测。它的灵敏度高,结构尺寸小,对环境影响不敏感。如在同一铅垂平面内用两只相互垂直的涡流式传感器可测得转轴的轴心轨迹和轴心位置。

4) 应变片

应变片是一种电阻式传感器,既能作结构静态应变的测量,也能作结构动态应变的测

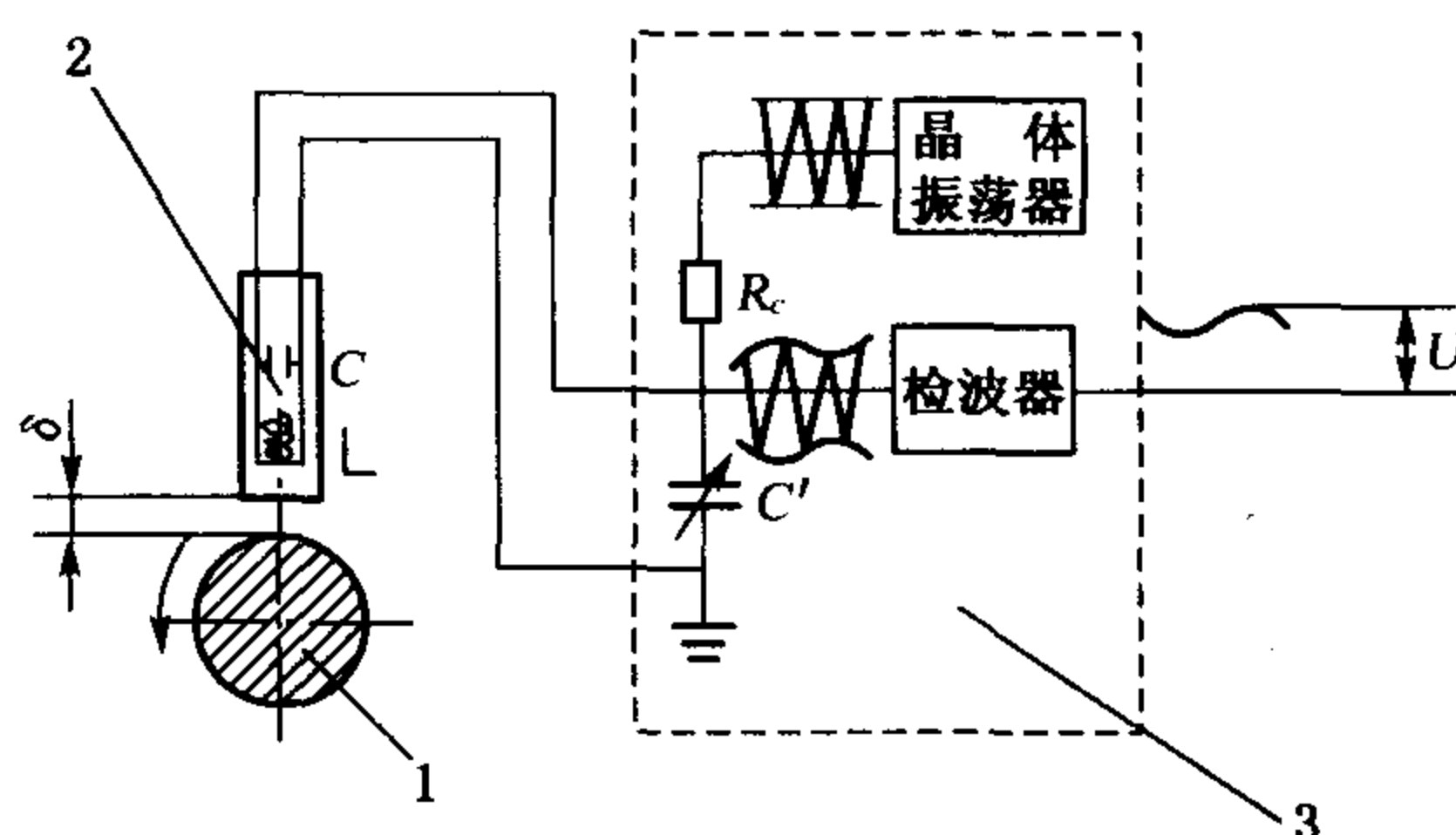


图 5-3 电涡流传感器测量系统

1. 转轴 2. 传感器 3. 前置器

量。应变片除了直接作为传感器进行振动应变测量外,还可以将它粘在弹性元件上,组成对应的位移、速度、加速度及力等传感器。

5) 力传感器

力传感器是用来量测激振力、压力、反力等的探头。力的测定是通过量测力的效应(如力所产生的应变、位移、加速度等)来进行的。因此,力传感器是通过应变、位移或加速度等的变化转换成电量的变化来设计的。

传感器的类型很多,每一类传感器都有它自己的特性,选择使用时根据具体对象要考虑传感器频响特性、灵敏度、信噪比等诸多因素,与后配的放大和量测仪器间的匹配等。

5.2.2 激振设备

激振设备使结构产生振动,以便进行振动测量。激振设备按其产生振动方式不同可分为:激振器、冲击锤及振动实验台等。

机器的振动实验装置如转子实验台就不需配激振器。转轴运转时,由于转子的不平衡等因素激起装置振动,其激振力大小随转速而改变。这类实验台一般不需再配激振设备。

1) 激振器

激振器是将激振力作用于被测结构上,使结构产生强迫振动的设备。它既可以对模型进行激振实验,又可用于实际结构物的激振实验。激振器一般是通过连接杆件对结构施加激振,根据其工作原理,通常分为机械式、电磁式和液压式3类。

机械式激振器通常是根据偏心质量惯性力、凸轮机构或曲柄连杆等原理设计成的。偏心式激振器是靠具有相同偏心质量的对称飞轮同步反向旋转而产生水平(垂直)向激振力。凸轮式靠飞轮偏心旋转推动激振连杆产生激振力。曲柄连杆式则是靠曲柄连杆机构实现将圆周运动转变为往复直线运动而产生激振力。机械式激振器的共同特点是激振力较大,可以从几百牛至几千牛;而激振形式均属谐波,但激振频率不高,多用于较大尺寸结构振动体,详见第2章。

电磁式激振器如图5-4所示,激振器连杆与动圈相连,并由弹簧支承在磁铁上。当动圈内通过交变电流时,由于在磁场中受磁力作用,动圈将在磁场内往复运动并切割磁力线而产生交变激振力。激振力的大小与动圈交变电流强度成正比。

若电流为正弦交变电流,则激振力为正弦激振力。如果电流为任意变化规律的交变电流,则也为任意变化的激振力。

所以,当磁场一定时,电磁式激振器的激振力 $F(t)$ 将取决于输入动圈中交变电流 $I(t)$,由于 $I(t)$ 的变化范围很宽,且可由计算机来控制,所以,电磁式激振器在激振力的大小、频率特性上都有较宽的变化范围,激振形式可以是谐波、任意波及随机波等多种。

液压式激振器是以液压泵产生的油压为激振力的设备。诸如油压千斤顶、脉冲千斤顶及由伺服机构控制的液压传递系统。由于采用液压传递,因此激振力可以很大,可达几千牛,但由于液体在频率较高时会产生自激使波形受到干扰。因此,液压式激振器低频性能很好,最低可达千分之一赫兹。液压式激振器通过计算机控制,可实现谐波、任意波及随机波

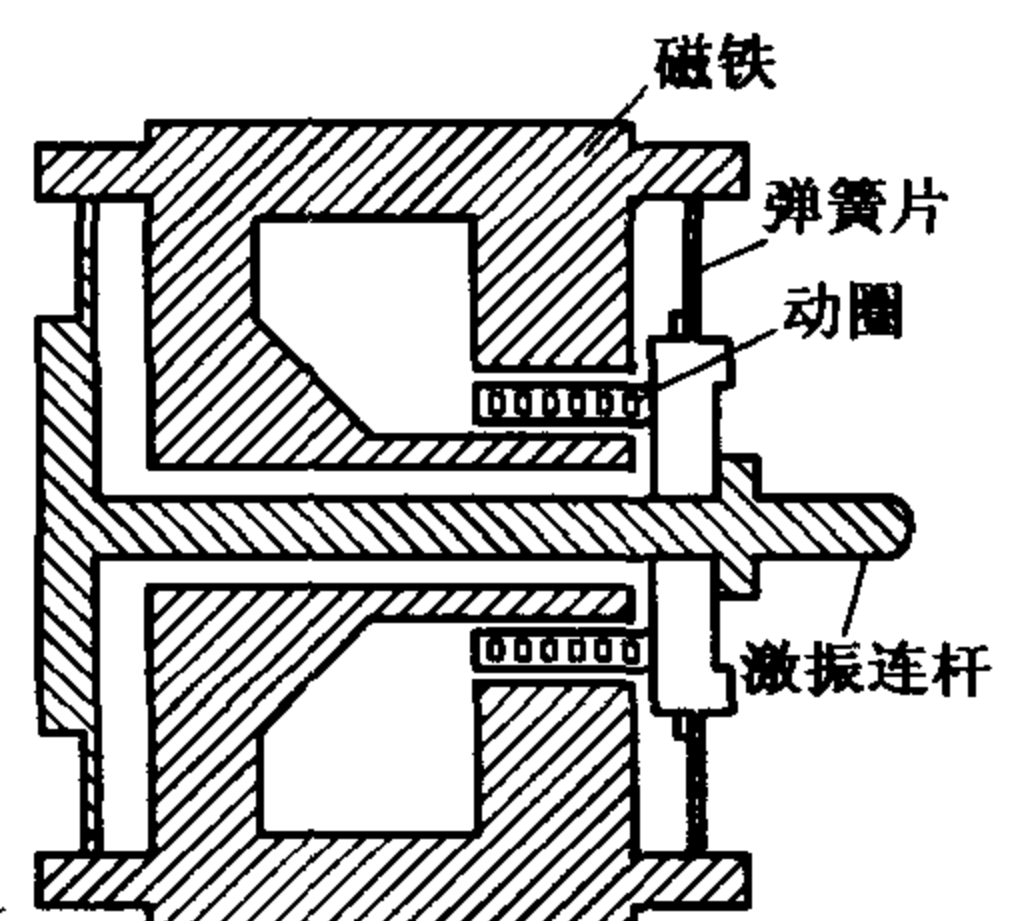


图 5-4 电磁式激振器示意图

等多种激振形式,所以在结构振动实验中得到广泛使用。

振动台是指由激振器激振的一个台面。由激振器激振产生振动的振动台根据激振器的种类可分为机构式、液压式和电磁式。振动台的台面支撑有弹簧(或连杆)、液压及气垫等方式。通常要求振动台面上各处的振动状态一致。这样,在对结构模型激振时,接触面上各点的受力状态也就完全一致,相当于结构坐落在刚性地基上,这样的振动台就是刚性振动台。激振器是对结构模型上某一点激振,且该点的运动状态将受激振器的控制;而振动台则对模型结构基础面所有点给予同步激振。

2) 冲击锤

图 5-5 所示为典型的冲击锤,它有一个力传感器,传感器前端装有冲击端。当结构受到锤激振时,在非常短的时间周期内,能量传给了结构,使之产生振动。在图 5-5 中给出了典型的冲击锤输入力信号。力信号的形状取决于锤的冲击端材料种类、冲击锤的质量以及受冲击结构的动态特性。因为冲击力谱的频宽是由冲击力信号长度决定的,锤的冲击端和结构越硬,力信号就越短,频率范围就越宽。附加质量(图 5-5 虚线)加在锤上,则力的信号将增宽,截至频率将降低。图 5-6 分别表示了某锤的冲击端为钢、塑料和橡皮时的功率谱曲线,以及锤上有附加质量时的功率谱。

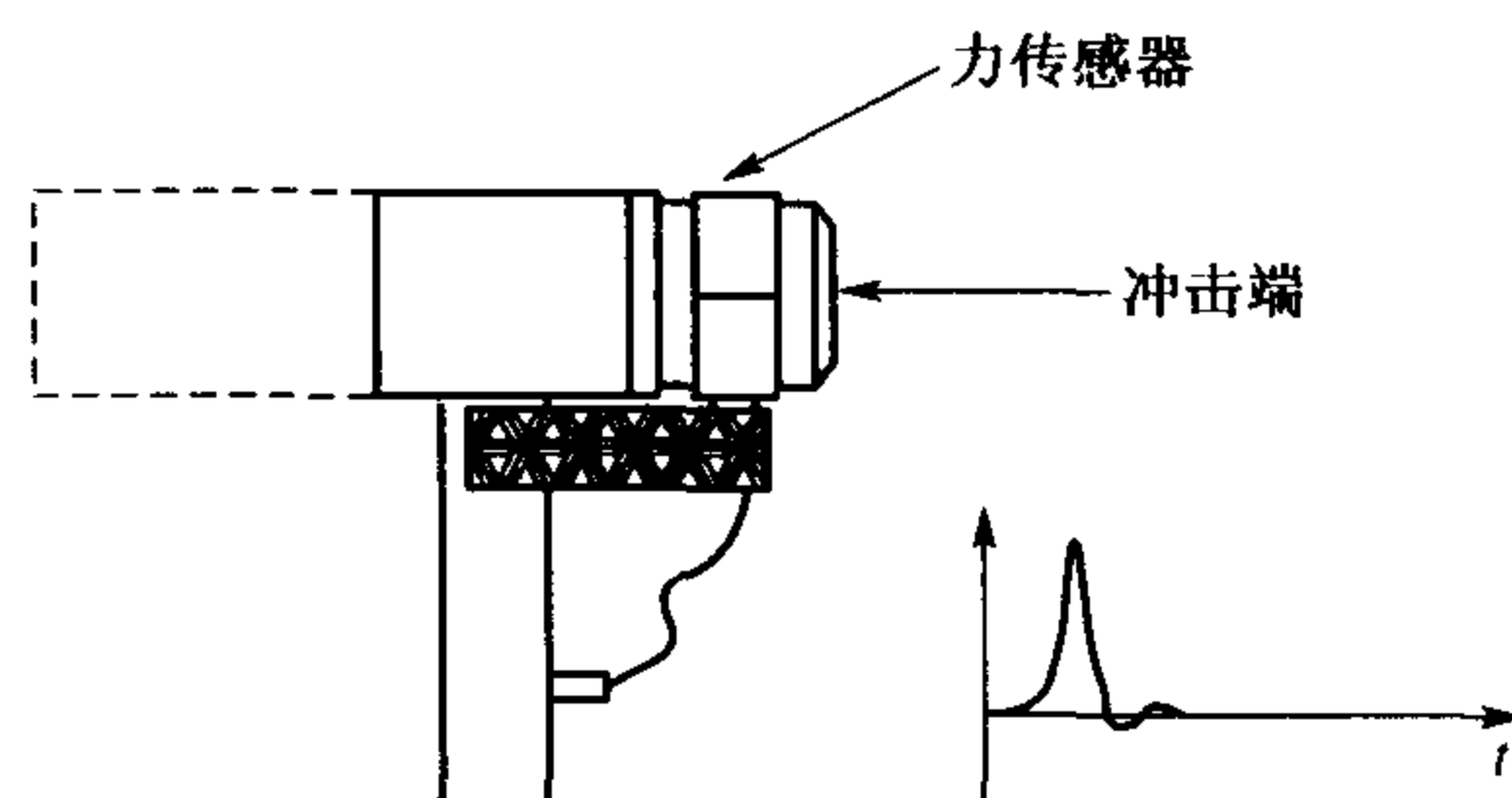


图 5-5 冲击锤和典型的输入力脉冲

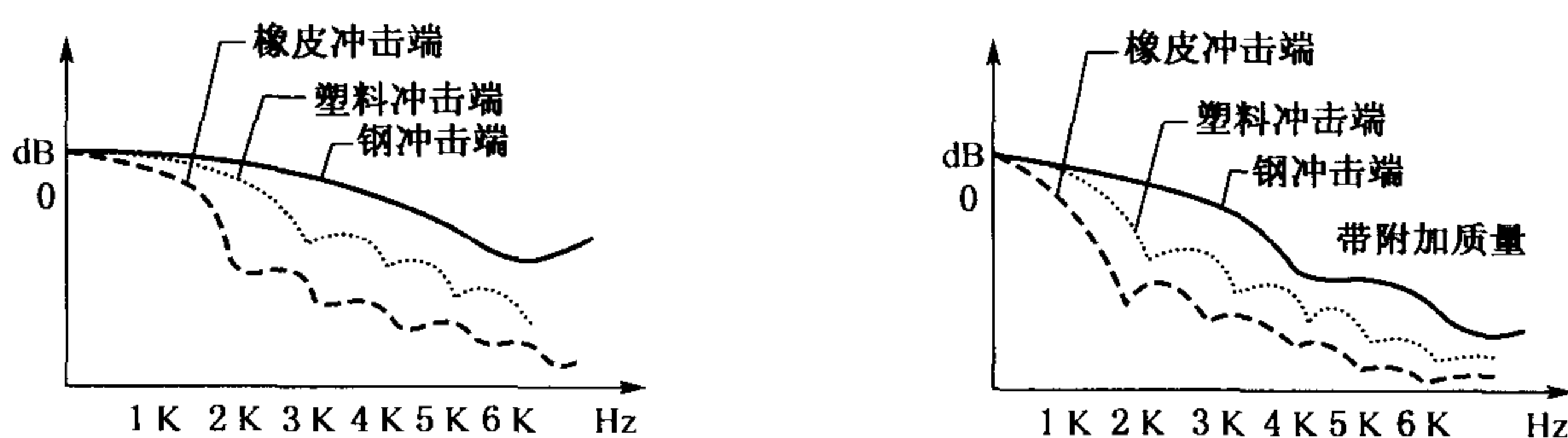


图 5-6 应用钢、塑料和橡皮的冲击端及有附加质量时，冲击锤脉冲的典型的自功率谱

应用冲击锤进行冲击测试具有设备简单、快速、方便等优点。但是,力信号具有高的波峰因数,使它不适宜用于非线性系统。有限的信号带宽的控制也是它的一个缺点。

5.2.3 数据采集和分析设备

传统的振动测量方法是将连续变化的振动量和力等物理量转变为连续电压信号,并进行显示、记录或进一步分析处理,如测振仪、光线示波器、磁带记录仪等。这些连续变化的物理量和信号称为模拟量。模拟量信号的缺点是显示、记录的精度低,抗干扰能力差,而且不便于进一步分析处理。动态数据采集的功能是将模拟信号转变为便于贮存、传输和分析处理的数字信号,它在现代化振动测试中起着关键作用。振动测试中的数据采集,面对的是动态信号,比起用于常规工业控制或静态信号的数据采集有着更高的要求。

模拟信号适调器(程控放大、抗混滤波器)加上采样保持器和模数转换器,组成了完整的数据采集系统。图 5-7 为动态数据采集框图,数据采集的目的是将连续变化的模拟信号转变为幅值域离散的数字信号,即模数转换(A/D)。模数转换是实现将模拟量转换为数字量(二进制数码)的量化过程的电子技术。实现这种转换技术的电路或器件称为模数转换器。模拟信号适调器的作用是为了减小量化误差,防止出现频率混迭现象。对时间连续的信号进行采样是通过周期脉冲序列的调制来完成的。实际的采样脉冲有一定的宽度 t_0 ,但通常远小于采样间隔 t_s 。实际采样时,是将采样所得到的离散的信号通过记忆装置——保持器保持起来,在信号处于保持期间进行模数转换。在动态测试中,经常需要同时对多个信号进行数据采集,由多通道数据采集系统来实现。

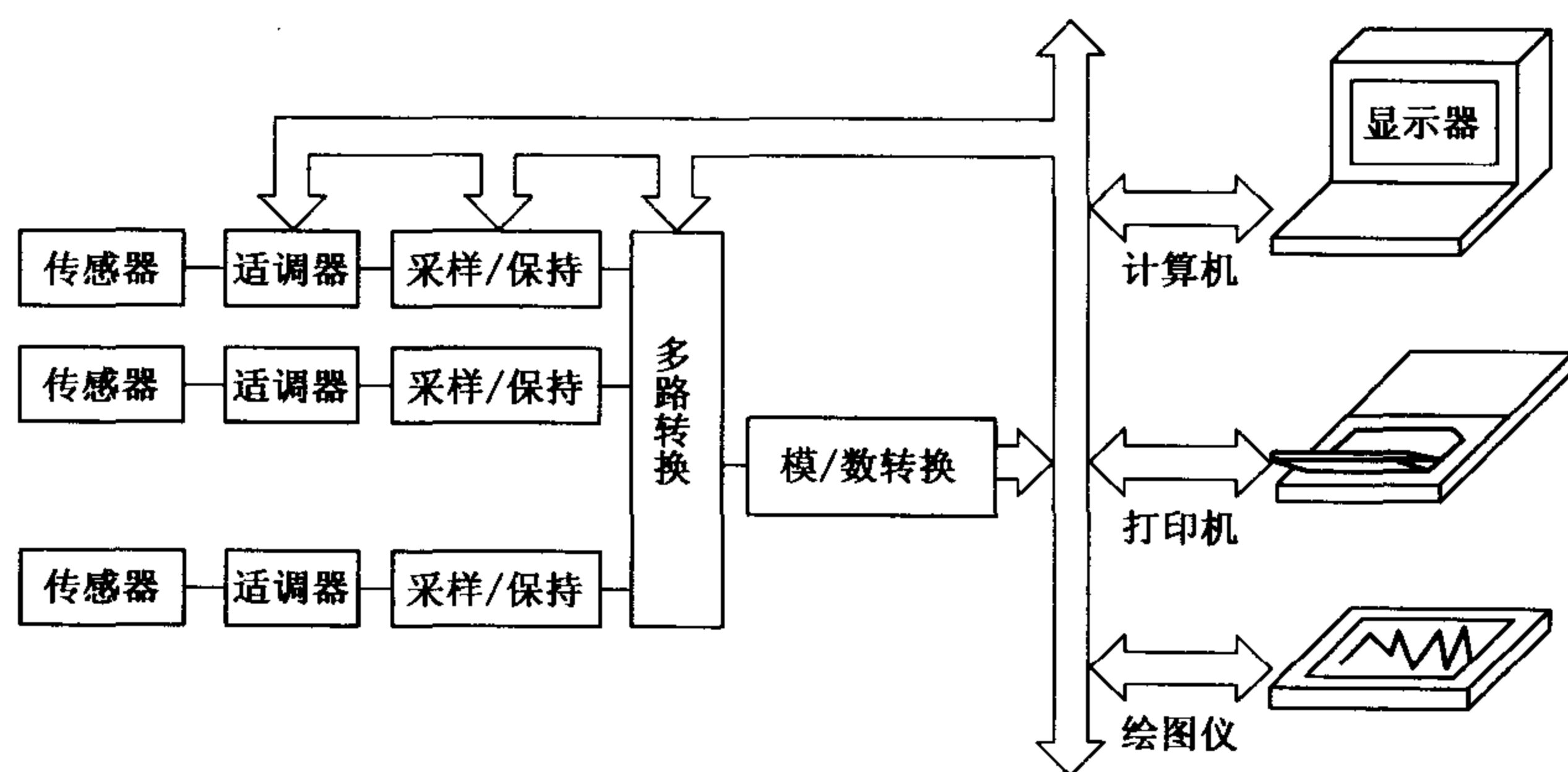


图 5-7 数据采集框图

现代动态信号分析主要采用数字方法,可以由软件在通用计算机上实现频谱分析,也可以用专用硬件设计成仪器完成,其核心是快速傅立叶变换(FFT)。振动信号分析除频谱分析之外,还有时域分析(相关函数)和幅域分析(如均值和均方根值的计算、概率密度和概率分布函数分析等)。

5.3 振动特性参数的测量

5.3.1 测量前应考虑的问题

在进行一项振动参数的测量时,首先应明确测量要求,把应测的量逐项开列清楚,弄清各量之间的关系,把分析计算公式事先写好。实验确定实验方法,根据实际条件,通过比较选定一个合理的方法。在实验方法确定之后,再制订具体的测量方案,这时有很多因素要综合考虑。以下若干问题,是制订实验方案时应该注意的:

- (1) 慎重确定测量点。要求事先对振动体的性质有一初步的了解。
- (2) 选择传感器及合适的配套仪器。应考虑到不同的传感器对配用电子仪器的特殊要求,如压电式加速度计对前置放大器的要求等。选用时要考虑测量仪器的频率、相位特性、动态范围、便于操作等因素。

(3) 画出仪器设备的连接方框图,在图上注明仪器的类型及型号。

(4) 根据振动动量级、频率范围、电气绝缘以及避免对地回路等方面的考虑,选择传感器的安装方法。

(5) 确切弄清各仪器的灵敏系数,必要时应做仪器标定。

5.3.2 振动基本参数的测量

利用仪器检测,可以获得机械振动的3种基本参数(振动三要素):振幅、频率和相位。

振动振幅指示出系统振动的强度和能量水平。振动频率是用于判别结构的自振特性和振动振源的十分重要的一项参数。相位指两个频率相同的波形之间的相位差值,例如激振与响应之间的相位,振动体中不同位置两点振动的相位等。

1) 振幅

振动的振幅通过数据采集可直接获得。振幅可以位移、速度或加速度幅值来表示,分别可用与之对应的传感器进行测量。

关于传感器的选择,除了要考虑它的尺寸大小、重量,性能,运行环境以及辅助设备的限制外,还要考虑被测振动体的振动特性。一般对于低频振动测量,优先采用位移传感器;对于中频振动,优先采用速度传感器;对于高频振动,优先采用加速度传感器。旋转机械转子系统的振动测试,主要采用非接触涡流式传感器。

对于低频振动,或在位移特别重要的地方或需要通过测量位移来确定应力的地方,应优先考虑采用位移测量。旋转机械转轴的振动测量,主要采用涡流式位移传感器。

由于振动的速度与振动的动能直接有关。一些规范是用速度量作为控制的参数,则必须进行速度测量。目前广泛采用速度的均方根值(振动烈度)来检测振动的严重程度及其损坏效应。

对于高频振动和冲击振动基本上进行加速度测量。当需要对结构所受力进行分析时,由于力与加速度成正比关系,所以也往往进行加速度测量。目前一般振动响应的测量中往往优先选用压电式加速度计,其原因一是压电式加速度计体积小、重量轻;二是它的频率范围与动态范围非常宽,很适于近代的振动测量;三是加速度计所配的积分电路比微分电路简单可靠,可在很宽的频率与动态范围内精确方便地从加速度信号得到速度与位移量。

2) 振动频率和相位

振动的频率和相位可通过对振动随时间变化的图形分析获得。

简谐振动的频率测试比较容易,常用方法有利萨如(lissajous)图形法、电子计数器测频法或振动波形与时标信号比较法等。

振动的相位可以用相位计直接读取;或用双踪示波器将被测信号与基准信号进行比较测定;也可以把振动信号与基准信号的时间历程记录下来,进行比较而测定。

一般的时域振动信号,可通过傅立叶变换法(DFT或FFT)得到其振动频率和相位。现代数据采集和分析设备均具备此功能。

5.3.3 结构的动力参数的测量

结构动力特性通常指结构的固有频率、振型、阻尼比等参数。虽然可以通过理论计算求

出结构的固有频率、振型,但是对复杂结构来说,理论计算往往会因简化而带来一定的偏差,通过测定则可较精确地获得这些参数。结构阻尼比到目前为止,只能通过实验获得。

测定结构动力特性的方法有自由振动法和强迫振动法。自由振动法指给予结构初始干扰,使其产生自由振动时测定其动力特性的方法,如对结构施加冲击荷载使其产生振动。强迫振动法可以用激振器等对结构施加频率变化的激振力,迫使结构产生强迫振动,从而测定结构的动力特性。而模态分析是一种研究结构动力特性的现代方法,是建立在实验(或实测)的基础上,采用实验与理论分析相结合的方法。

1) 固有频率

结构的固有频率是振动系统的一项主要参数,它决定于振动体本身的质量、刚度及其分布。研究振动问题,在很多情况下,首先就要求确定结构的固有频率。结构振动实验常根据结构强迫振动时共振原理来确定结构的动力特性,称为共振法。以一个单自由度系统为例,根据第2章的振动理论分析,可以分别求得强迫振动时位移共振频率、速度共振频率及加速度共振频率。表5-1列出了上述各种频率。在无阻尼时,上述各种共振频率相同,均等于无阻尼系统自由振动频率,即固有频率。在有阻尼的情况下,只有速度共振时测得的共振频率就是系统的固有频率。当阻尼很小时,位移共振频率和加速度共振频率也接近于固有频率。

2) 阻尼参数

在结构振动问题中,阻尼是影响振动响应力的重要因素。计算自由振动位移值时,需考虑阻尼的影响;在强迫振动时,特别是干扰力频率接近结构固有频率时,阻尼在位移中起了更重要的作用。因而阻尼理论的研究及阻尼参数的获得是很重要的。

表 5-1 单自由度系统各种共振频率

	无 阻 尼	有 阻 尼
自由振动频率	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega \sqrt{1-\zeta^2}$
位移共振频率	ω	$\omega \sqrt{1-2\zeta^2}$
速度共振频率	ω	ω
加速度共振频率	ω	$\frac{\omega}{\sqrt{1-2\zeta^2}}$

ω ——固有频率; ζ ——阻尼比; k ——刚度; m ——质量。

通常测定系统阻尼比的方法有:自由振动衰减法和半功率点法,在第2章中已经叙述。

3) 振型

由多自由度系统理论可知,结构在振动时,物体上各点的振幅不仅是时间的函数,而且是空间的函数。对于任一固有频率,结构物各点的振幅之间具有一定的比例关系,形成一个不变的振动形式,即对应于该频率的主振型。

测定结构的振型,需施加激振力使结构物在某一阶固有频率下振动,即激出单一的振型,此时测定结构物上各点的振幅值和相位,即可得到结构对应于该频率的主振型。测点布置视结构形式而定。可根据理论分析,估算结构在共振时的变形曲线形状,然后在变形较大的部位布点,要考虑到根据测定的振幅值,可以勾画出结构振型曲线,故在测定高阶振型时,需要较多的布设测点进行测量。如对一些弹性体来说,其振型曲线的节点(在振动过程中位

移为零)位移不变,节点两边的位移反相,两节点之间必然有波峰。所以,对一维的弹性体来说,找出了节点,就可以大致确定振型。对于一个二维的弹性体来说,其振型是二维函数,并且存在节线(在振动过程中位移为零的连线),同理,找到了节线,就可以大致确定振型。对于较小的模型或试件,测试时尤其要选用质量小的传感器,使它的附加质量不致影响模型原来的振型。

5.3.4 实验模态分析

模态分析的指导思想是对一个复杂结构的振动分析,它是解决工程中振动问题的重要手段。这里简要介绍实验模态分析系统的理论基础及正确使用所必需的基本知识。

模态是指机械结构(多自由度系统)的固有振动特性。每一个模态具有特定的固有频率、阻尼比和模态振型。这些模态参数(模态频率、阻尼比和振型)可以由计算和试验分析取得。基于线性叠加原理,一个复杂的振动系统可以分解为许多模态的叠加。这样一个分解过程称为模态分析。模态分析通常都是指实验模态分析。振动模态是弹性结构的固有的特性。如果通过模态分析方法搞清楚了结构物在某一感兴趣的频率范围内各阶主要模态的特性,就可以预测结构在此频率范围内在各种振源作用下的实际振动响应。因此,模态分析是结构动态设计、振动控制及故障诊断等的基础。

模态分析提供了研究各种实际结构振动的一条有效途径。首先将结构物在静止状态下进行激振,如使用激振器、振动台、瞬态锤击等激振方法,通过测量激振力与振动响应并通过双通道FFT分析,得到任意两点之间的机械导纳函数(传递函数)。用模态分析理论通过对试验传递函数的曲线拟合,识别出结构物的模态参数从而建立起结构物的模态模型。根据模态叠加原理,在已知各种荷载的时间历程的情况下,就可以预计结构物的实际振动响应历程和响应谱。

由于计算机技术、FFT分析仪,高速数据采集系统以及振动传感器、激振器等技术的发展,近十多年来试验模态分析得到了很快的发展,受到了机械、电力、建筑、水力、航空航天等许多部门的高度重视,已有多种档次、各种原理的模态分析硬件与软件问世。

模态分析大致可分为4个基本步骤:

1) 数据采集及响应分析

(1) 激振方法:试验模态分析是在实验室内人为地对结构施加一动态激振,采集各点的激振力信号与振动响应信号,根据力与响应信号用各种参数识别方法获取模态参数。激振方法不同,相应的识别方法也不同。目前主要有单输入单输出、单输入多输出、多输入多输出3种方法。以输入力的信号特征还可以分成正弦扫描、稳态随机(包括白噪声、宽带噪声或伪随机)、脉冲激振等。脉冲激振的数学原理是脉冲函数具有与白噪声相同的平直频谱,而它的近似实现比稳态随机简易得多,因此得到广泛应用。

(2) 数据采集:单输入单输出方法要求一次采集输入与输出两个点的信号,用不断移动激振点位置或响应点位置的办法取得振形数据。另外两种方法则要求大量通道数据的高速并行采集,因此要求有大量的振动测量传感器或激振器。

(3) 响应分析:如响应谱分析、传递函数估计、脉冲响应以及相关分析等。

2) 建立数学模型

根据已知条件,建立一种描述结构及特性的模型,作为计算机及识别参数的依据,目

前一般假设系统为线性的。根据采用的识别方法不同,分为频域建模和时域建模。根据系统阻尼特性及坐标耦合情况分为实模态(比例阻尼)和复模态(一般黏性阻尼)等。

3) 模态参数识别

参数按识别域的不同可分为频域法、时域法。激振方式不同,相应的模态参数识别方法也不尽相同。对于目前能够进行的大多数结构,只要取得了可靠的频响数据,使用较简单的识别方法也可能获得良好的模态参数。

参数识别通常采用频域方法,即由实测的传递函数,通过优化方法来确定模态参数。较多采用的优化算法是最小二乘法,优化的准则为使实测的传递函数与数学模型对应的值总均方误差极小。模态参数识别有时又称为曲线拟合(传递函数曲线拟合)。如利用实频曲线拟合、虚频曲线拟合、导纳圆拟合、多项式曲线拟合等。不管何种模态识别方法本质上都是利用大量的数据信息去拟合出模态参数。在小阻尼的情况下,其中只有共振附近的数据才是有效的。远离共振处的数据信噪比很低,相干函数很小。因此,只需在每阶模态频率附近取出传递函数的有限个数据。这样处理不仅大大提高了识别的速度,而且因为剔去了非共振区内信噪比差的数据,从而提高了识别精度。

4) 振型动画

参数识别的结果得到了结构的模态参数模型,即一组固有频率、阻尼比及相应各阶模态振型。由于结构复杂,由许多自由度组成的振型的数组难于引起对振动直接的想像。必须采用活动振型的方法,将放大振型叠加到原始的几何形状上,便于对振动的直观。

以上4个步骤是模态实验及分析的主要过程。而支持这个过程的除了激振拾振装置、双通道FFT分析仪、计算机等硬件外还要有一个完整的模态分析软件。通用的模态分析软件必须适合各种结构物的几何特征,设置多种坐标系、划分为多个子网结构,具有多种拟合方法并将结构的模态振型在屏幕上变为三维实时动画。

模态实验须对使用的传感器进行可靠的标定,并送入正确的工程单位以及合理地选择窗函数进行处理等,这些对试验的成功和获取准确的测量数据都十分重要。

5.4 信号分析技术基础

机械设备是由若干的机器零部件组成,而组成机器的零部件各有其质量、刚度和阻尼,当机器受到激振后,振动的特征将随振动频率或时间发生变化。另外,由于机械系统内各个元件的结构形式、连接方式和工作性能各不相同,在受到同一激振后各处的振动响应是各不相同的。实际测量到的机械振动信号,有周期性的信号(如转子的不平衡、联轴器的不对中等),冲击性的信号(如齿轮啮合、滚动轴承的表面缺陷),还有很多是属于随机性的信号(如滚动轴承的表面粗糙、涡轮机械中的流体冲击或扰动等)。在实际所测的信号中还往往混有很多随机噪声,有时候噪声很大,甚至把真正需要的机器振动信号淹没掉了。

解决上述问题,需要掌握进一步的信号分析技术;往往需要同时在两个通道上进行信号分析处理,用更为有效的手段分析一些振动问题。

5.4.1 振幅特征的描述

在简谐振动中,振动幅值指位移 $x(t)$ (或速度、加速度) 的最大值。一般情况下,机械振动振幅的特征可用峰值 x_p 、峰峰值 x_{pp} 、绝对平均值 x_{av} 和均方根值 x_{rms} 等来描述,它们均可表示振动的烈度和能量水平;它们的意义以及与简谐振动中振动幅值的比较见图 5-8 和表 5-2。振动峰值更能体现结构对冲击性激振的响应;而均方根值更能体现对随机性激振的响应。

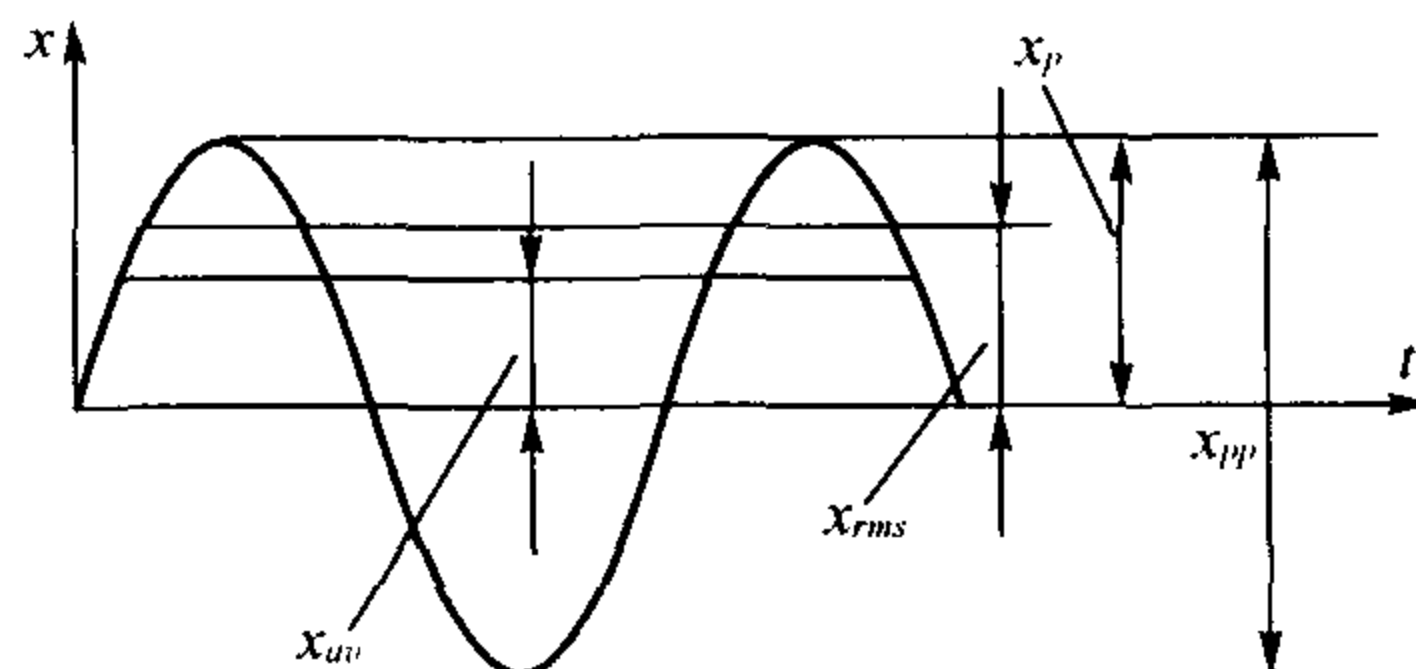


图 5-8 振幅特征的描述

峰值 x_p 表示 $x(t)$ 的最大值。

表 5-2 振动幅值的描述

名 称	幅 值	简谐振动的幅值比
峰值 x_p	$x(t)$ 的最大值	1
峰峰值 x_{pp}	$x(t)$ 的最大值与最小值之差	2
绝对平均值 x_{av}	$\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$	$\frac{2}{\pi}$ (0.637)
均方根值 x_{rms} (有效值)	$\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ (0.707)

T ——振动周期或采样时间。

此外,还有表示振动波形特征的波形因数和波峰因数也是一般振动幅值的重要特征。

波形因数 F_w 表示均方根值与平均值的比值

$$F_w = \frac{X_{rms}}{X_{av}} \quad (5-1)$$

波峰因数 F_p 为峰值与均方根值的比值

$$F_p = \frac{X_p}{X_{rms}} \quad (5-2)$$

5.4.2 相关函数分析

相关函数表示两个时域信号之间的相互关系(即相似性)。它包括自相关函数和互相关函数。

1) 自相关函数

自相关函数 $R_x(\tau)$ 描述随机信号 $x(t)$ 在不同时刻的状态之间的相互关系,或者说它是用来表述函数 $x(t)$ 在 t 时刻和 $(t+\tau)$ 时刻的相似性的。可把自相关函数 $R_x(\tau)$ 理解为曲线 $x(t)$ 在时间坐标轴上向右平移 τ 后所得的曲线 $x(t+\tau)$ 这两者之间的相似性描述,如图 5-9 所示。

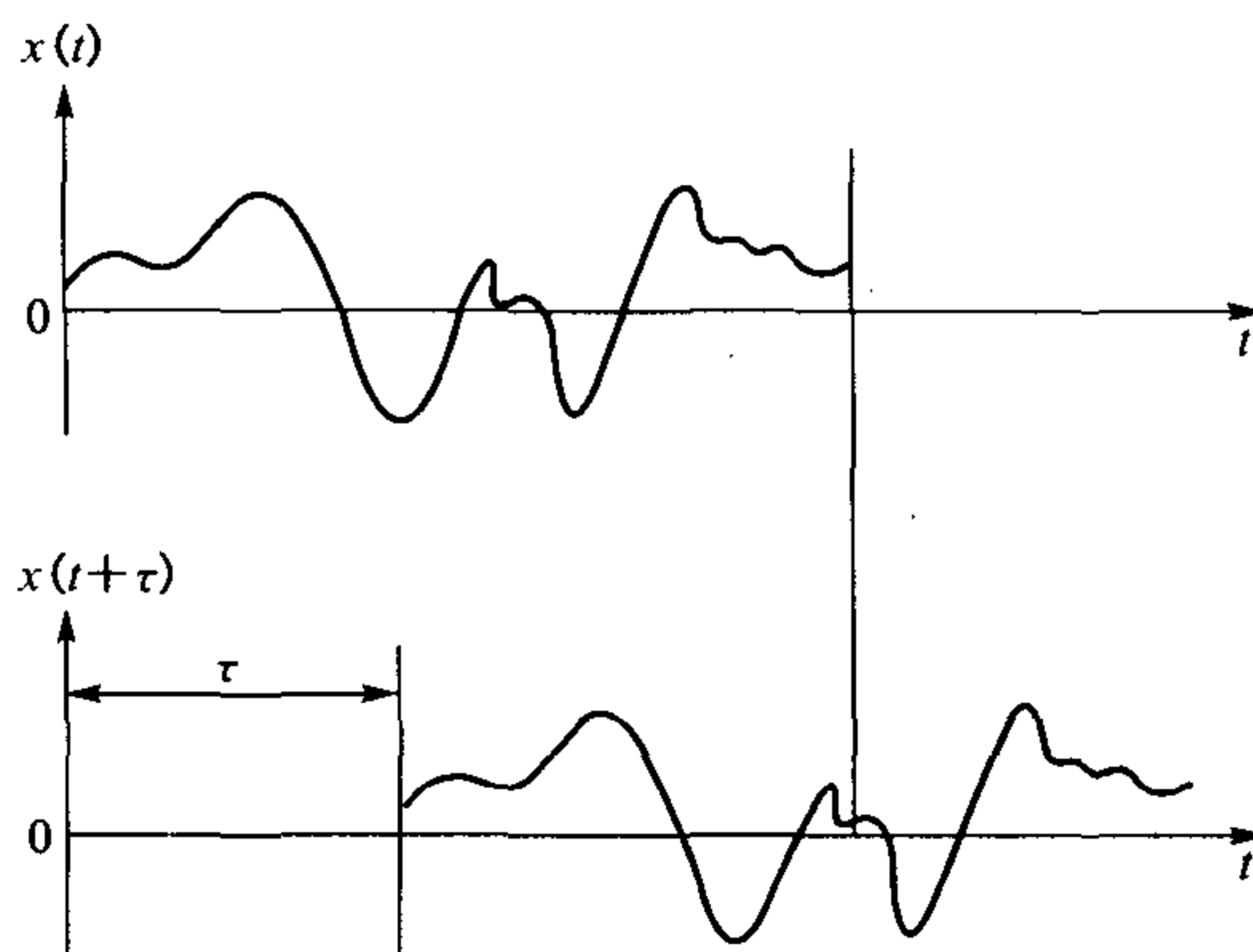


图 5-9 信号 $x_1(t)$ 与 $x_1(t+\tau)$ 之间的相似性

自相关函数是通过一个信号值 $x(t)$ 与该信号滞后一定时间 τ 的另一个 $x(t+\tau)$ 值之间的乘积在观测时间 T 内求其平均值得到的即

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \quad (5-3)$$

式中: $R_x(\tau)$ ——自相关函数。

τ ——信号 $x(t)$ 的滞后时间或时间坐标的移动值。

T ——所取波形的历程时间。

自相关函数是偶函数,当 $\tau=0$ 时,两条曲线完全相似,自相关函数值为最大,此即为均方值(有效值的平方)

$$R_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t)dt = x_{ms}^2 \quad (5-4)$$

当 τ 值变大时,随机振动信号 $x(t)$ 对 $x(t+\tau)$ 的相互关系逐渐减弱, $R_x(\tau)$ 变小,当 $\tau \rightarrow \infty$, 则 $R_x(\tau) \rightarrow 0$ 。但如果 $x(t)$ 是周期振动信号,则 $R_x(\tau)$ 不收敛,其 $R_x(\tau)$ 也是周期函数,且与 $x(t)$ 的周期相同。利用 $R_x(\tau)$ 的这个性质可从随机信号中检测出周期信号。

齿轮和滚动轴承在运行中带有大量的随机噪声,它们一般具有宽频带随机的特征。利用噪声诊断机器故障时,首先要从噪声中查出隐藏的周期信号成分,这种周期成分就代表着齿轮和轴承存在某种缺陷。在缺陷发生初期,因为周期信号不明显,直接测量结果难以发现问题,如果用自相关分析方法,根据 $R_x(\tau)$ 的幅值变化及其包含的频率可以早期查出机器的缺陷所在。

图 5-10 为某车床变速箱噪声的自相关函数图:图(a)中 $R_x(\tau)$ 曲线随着 τ 的增大很快衰减到零,这是一种宽带的随机噪声,表明机器运转正常;图(b)中的 $R_x(\tau)$ 值开始有所衰减,但以后就显现出其中的周期成分,说明变速箱中存在某种缺陷,转轴在旋转过程中缺陷处产生周期性冲击。将变速箱各根轴的转速频率和 $R_x(\tau)$ 和波动频率 f 作比较,就可确定缺陷产生在哪根转轴上。

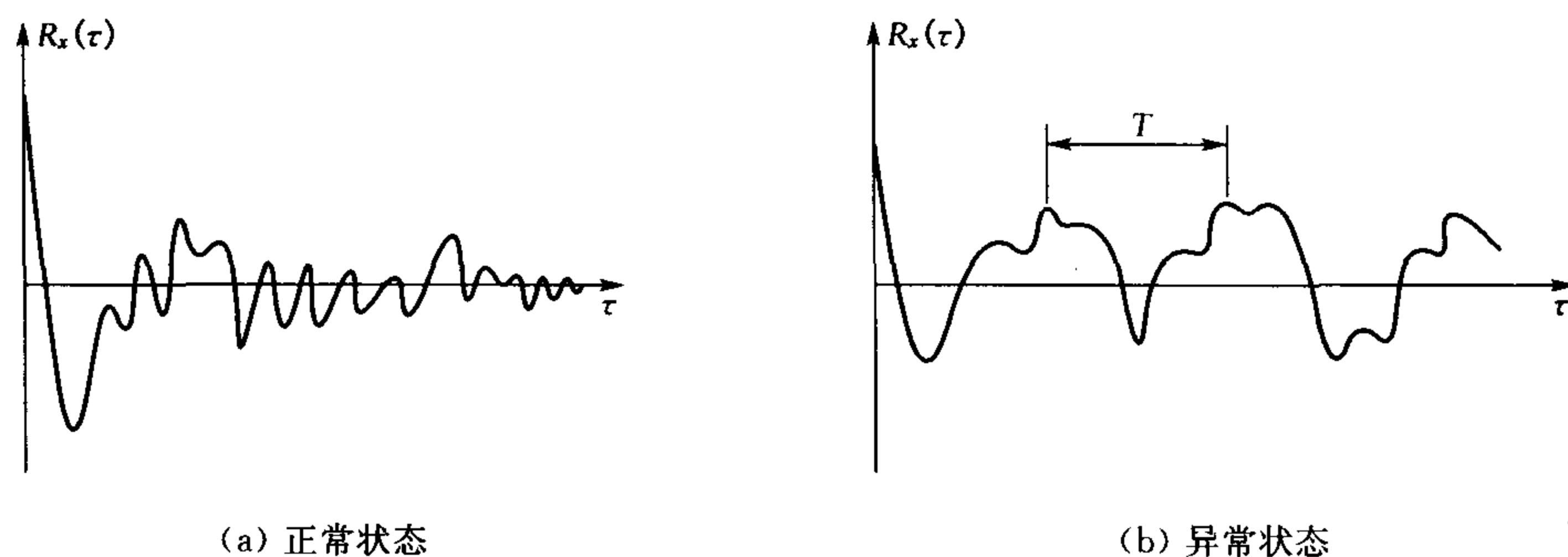


图 5-10 车床主轴箱噪声的自相关函数

2) 互相关函数

互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 用来确定两个信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的不同时刻的状态之间的相关性,亦即考察信号 $x(t)$ 在时刻 t 与信号 $y(t)$ 在时刻 $t+\tau$ 之间的状态有什么联系。互相关函数可表达为

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot y(t+\tau)dt \quad (5-5)$$

与自相关函数类似,也可以把互相关函数理解为信号图形 $x(t)$ 与另一信号图形 $y(t)$ 沿时间坐标轴向右平移 τ 后,与所得图形 $y(t+\tau)$ 之间的相似性描述。如图 5-11 所示,图(a)表示信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在时延 τ 时的关系;图(b)是它们的互相关函数。其中互相关函数很高的尖峰表示 $x(t)$ 与 $y(t)$ 在 $\tau=\tau_0$ 时存在相互联系,而在其他时间间隔没有联系。

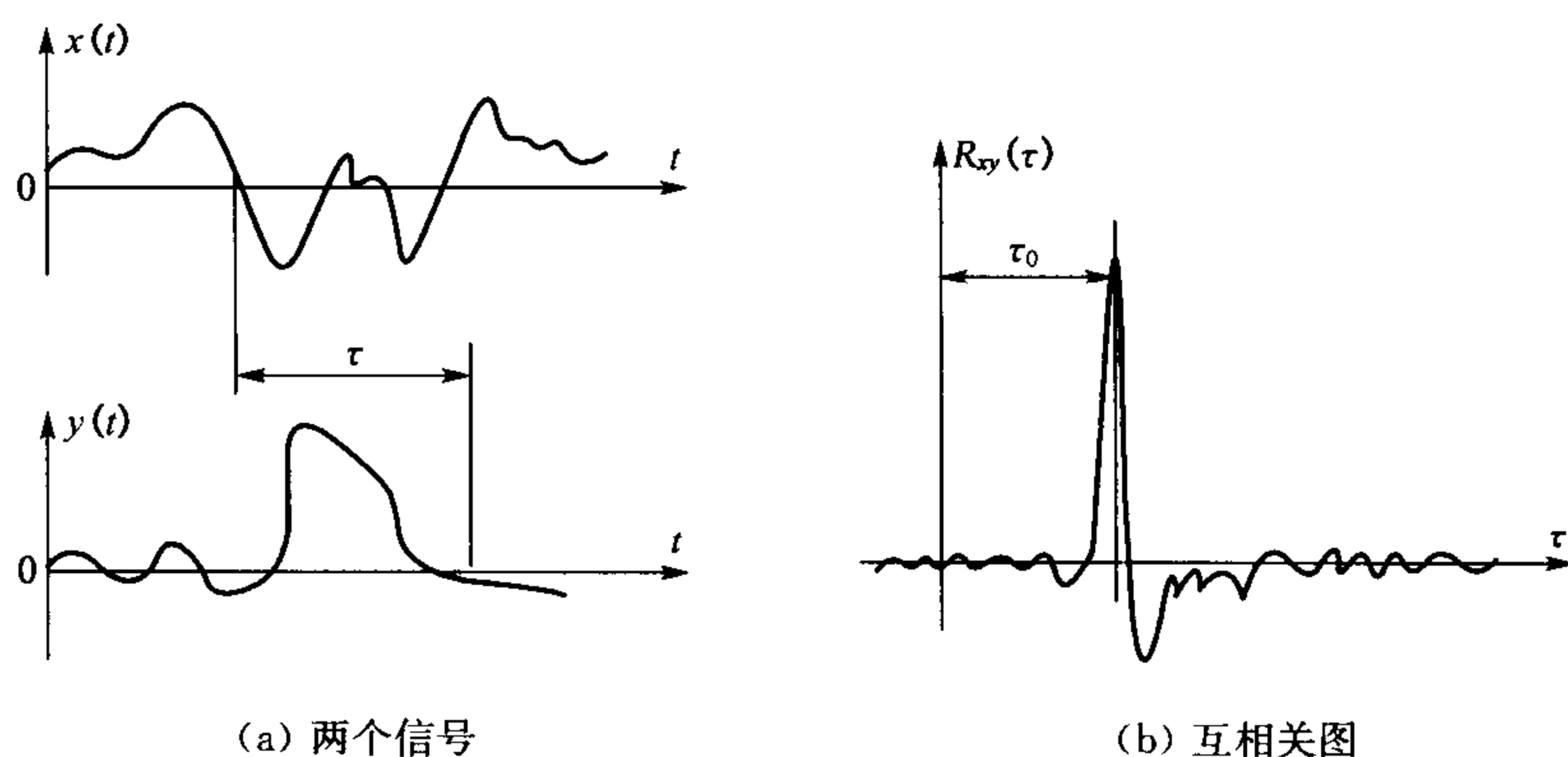


图 5-11 两个信号的互相关函数

互相关分析实际上反映两个信号之间有无因果关系。可以用来判别随机振动的振源。例如图 5-12 所示为一种检测汽车驾驶座振源的测试分析框图。

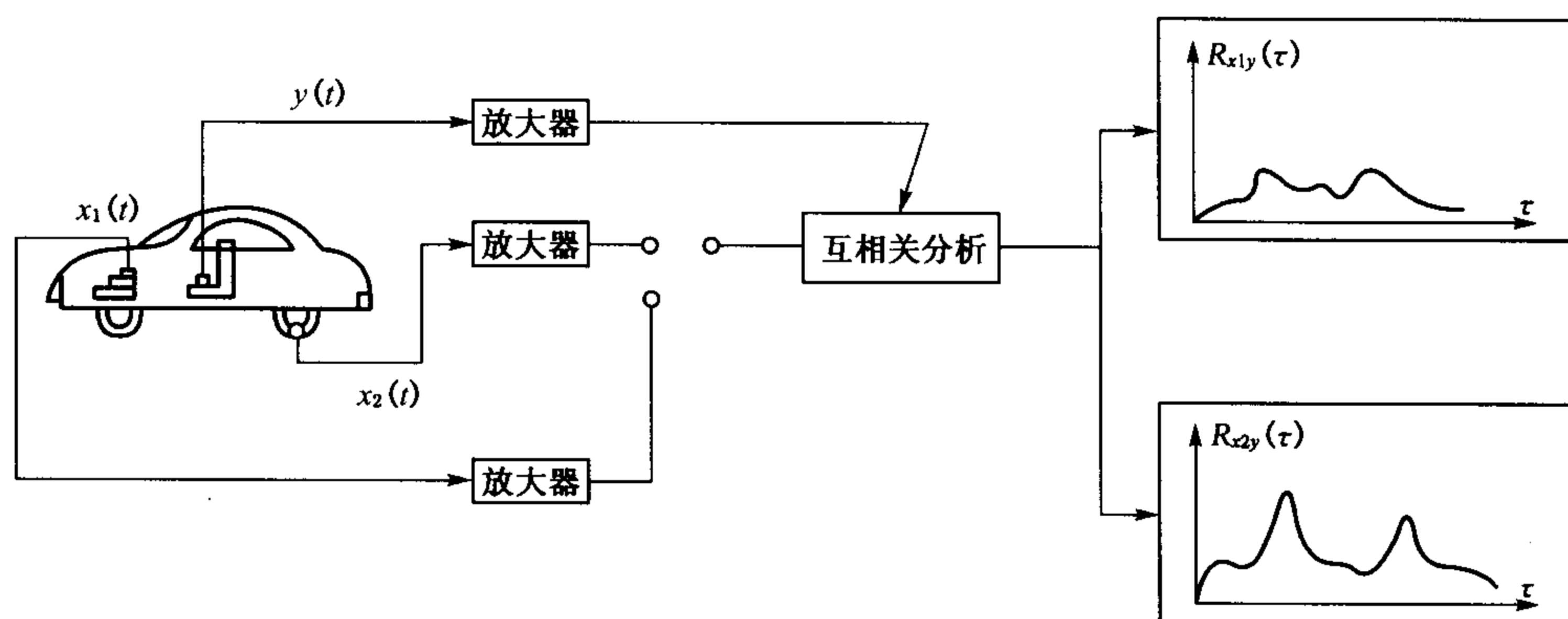


图 5-12 汽车振动振源的互相关分析

为了确定驾驶座的振动究竟是来自发动机还是车轮,在驾驶座、发动机和轮轴上分别安装加速度传感器,将发动机或轮轴上的振动信号作为输入 $x_1(t)$ 或 $x_2(t)$,驾驶座测取的信号作为输出 $y(t)$,分别送入双通道分析仪进行互相关分析。结果发现发动机与驾驶座的相关性差,而后轮与驾驶座之间出现明显的相关。因此,判别驾驶座的振动主要是后轮传递过来的,从互相关图尖峰的横坐标数值可以判断振动传播的时间。

互相关函数还可用来测量机械系统响应信号对于激振信号的滞后时间,只要对输入和输出信号进行互相关分析,互相关图上出现的峰值所对应 τ_0 的值就是它们的滞后时间。它表示在时延 τ_0 处信号 $y(t+\tau_0)$ 与 $x(t)$ 最为相似。也就是说,与激振信号 $x(t)$ 最相似的是将信号 $y(t)$ 在时间坐标轴上向右平移 τ_0 后所得的信号。利用上述两信号相关时的滞后时间测量,可诊断故障信号发生的位置,如深埋于地下的输油管道泄漏位置探测。

5.4.3 功率谱分析

1) 自功率谱密度函数

频谱图的分析有两种表示方法:一种是以振幅(均方根值或峰值)形式表示,成为幅值谱,另一种以能量的形式表示,称为功率谱。

振动信号 $x(t)$ 的能量是用均方值来量度的: $x_{ms}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$

上式中 x_{ms}^2 代表 $x(t)$ 的平均功率,而积分 $\int_0^T x^2(t) dt$ 代表了 $x(t)$ 的总能量。

$x(t)$ 经过傅立叶变换得到谱密度函数 $X(\omega)$, $X(\omega)$ 是单位频率上的振动量有效值。同理,对功率进行傅立叶变换可得

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega \quad (5-6)$$

式中

$$G_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(\omega)|^2}{T} \quad (5-7)$$

$G_x(\omega)$ 称为功率谱密度函数或自功率谱密度函数,简称自谱。它反映了单位频率上的均方值的大小。自谱密度函数是复数。

已知傅立叶频谱函数 $X(\omega)$ 与时域信号 $x(t)$ 的关系为

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

设 $X^*(\omega)$ 是 $X(\omega)$ 的共轭复数,即

$$X^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt$$

则 $G_x(\omega)$ 与 $X(\omega)$ 的关系为

$$G_x(\omega) = X(\omega) X^*(\omega)$$

实际上,自相关函数 $R_x(\tau)$ 与自谱 $G_x(\omega)$ 构成了一个傅立叶变换对

$$G_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \quad (5-8)$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) e^{j\omega \tau} d\omega \quad (5-9)$$

2) 互功率谱密度函数

功率谱密度函数分为两种:自功率谱密度函数和互功率谱密度函数,互功率谱密度函数简称互谱。互谱 $G_{xy}(\omega)$ 可表示为

$$G_{xy}(\omega) = X(\omega) Y^*(\omega)$$

式中: $Y^*(\omega)$ ——信号 $y(t)$ 的频谱 $Y(\omega)$ 的共轭复数。

上面提到自相关函数与自谱构成了一个傅立叶变换对;与此相对应,互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 也与互功率谱密度函数 $G_{xy}(\omega)$ 构成了一个傅立叶变换对

$$G_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \quad (5-10)$$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (5-11)$$

互谱密度函数也为复数,其形式可表示为

$$G_{xy}(\omega) = |G_{xy}(\omega)| e^{-j\phi_{xy}(\omega)}$$

式中: $|G_{xy}(\omega)|$ ——互谱的模。

$\phi_{xy}(\omega)$ ——互谱的相角。

互谱的模反映了两测点信号在各个频率上的能量大小,互谱的相角则反映了两测点在频率 ω 处的相位差。因此,互谱密度函数可以确定各频率成分上信号传输的滞后时间 $\tau = \frac{\phi_{xy}(\omega)}{\omega}$ 。另外,通过互谱和自谱关系测得的传递函数就不会受到系统内部噪声的干扰。

5.4.4 传递函数和相干函数

1) 传递函数

在频域内描述系统输入输出特性的函数称为传递函数或频率响应函数 $H(\omega)$,简称频响函数。若系统的激振为 $x(t)$ (例如力信号),响应为 $y(t)$ (例如振动位移、加速度或速度), $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 分别为它们的傅立叶变换,则 $Y(\omega)$ 对 $X(\omega)$ 之比成为传递函数(精确地讲,传递函数为输出与输入信号的拉普拉斯变换之比),记为

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (5-12)$$

传递函数描述了频域内机械系统的动态特性关系。如图 5-13 所示,机械系统的一端为输入信号,另一端为输出信号。这个输入和输出端,可以是一个激振点和一个响应点,也可以是多个激振点和多个响应点。机械结构是一个复杂的系统,各个元件的质量、阻尼、刚度等参数对信号传递的影响各不相同。例如转轴上的一个振动信号,通过轴承、支架传递到基础,在基础上测得的振幅和相位将与转轴上的有很大不同,传递函数反映两者间的关系。

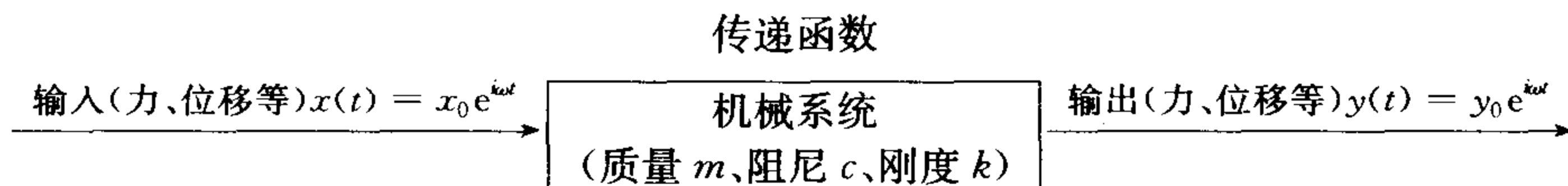


图 5-13 机械系统的传递函数

一般 $H(\omega)$ 是一个复数,由实部和虚部组成,如用复数极坐标表示,为

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{-j\phi(\omega)} \quad (5-13)$$

式中: $|H(\omega)|$ —— $H(\omega)$ 的模,也称为系统的增益因子。

$\phi(\omega)$ —— $H(\omega)$ 的相角,也称为系统的相位因子。

系统传递函数的模 $|H(\omega)|$ 表示输出振幅与输入振幅之比;系统传递函数的相位因子 $\phi(\omega)$ 表示输出和输入的相位差。 $|H(\omega)|$ 和 $\phi(\omega)$ 都是频率 ω 的函数,因此传递函数反映了系统输入和输出之间的幅频特性和相频特性。

在机械系统中,由输入或输出信号物理量的不同组合,可得到各种传递函数的名称。

当输入为力时,可得

$$\text{位移导纳(动柔度)} = \frac{\text{输出位移}}{\text{输入激振力}}$$

$$\text{速度导纳(机械导纳)} = \frac{\text{输出速度}}{\text{输入激振力}}$$

$$\text{加速度导纳(机械惯性)} = \frac{\text{输出加速度}}{\text{输入激振力}}$$

当输出为力时,可得

$$\text{位移阻抗(动刚度)} = \frac{\text{输出激振力}}{\text{输入位移}}$$

$$\text{速度阻抗(机械阻抗)} = \frac{\text{输出激振力}}{\text{输入速度}}$$

$$\text{加速度阻抗(动质量)} = \frac{\text{输出激振力}}{\text{输入加速度}}$$

在机械系统中,常常需要预知其一些重要的结构频率响应特性。例如,在模态实验的频域方法中,基本要点是测定机械系统各点对激振点的响应;转子运行时的稳定性情况以及机架、基础的减震效果好坏,需要预测轴承的动力特性、基础上的原点阻抗及交叉传递阻抗等;又如,滚动轴承缺陷在运行中的冲击脉冲信号,用装在机壳外部的加速度传感器接收信号时,也必须考虑机壳的传递函数。所有这些零部件结构系统的动力特性,都可以用某些双通道分析仪或频响分析仪进行测定,测量结果将获得频域内输入输出的幅值比和相位差。

2) 相干函数

相干函数又称凝聚函数,是在频域内描述两个信号因果关系的一种无因次比例系数,也是用来说明两个信号在频域内是否相关的一种判别指标。它把两个测点信号之间的互谱与各自的自谱联系起来,用来确定输出信号 $y(t)$ 中有哪些频率成分、多大的程度来自输入信号 $x(t)$,通过它可以了解到输入与输出信号之间的影响程度。工程上常用相干函数来衡量噪声对测试分析所得传递函数的影响。相干函数 $\gamma_{xy}^2(\omega)$ 的定义是

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{|G_{xy}(\omega)|^2}{G_x(\omega) \cdot G_y(\omega)} \quad (5-14)$$

式中: $G_{xy}(\omega)$ ——由两测点数据作平均后所得到的互功率谱。

$G_x(\omega)$ 、 $G_y(\omega)$ ——测点 x 和 y 所测数据各自平均得到的自功率谱。

相干函数的变化范围是 $0 \leq \gamma_{xy}^2(\omega) \leq 1$ 。当 $\gamma_{xy}^2(\omega) = 1$ 时,表示该频域信号 $y(t)$ 完全来源于信号 $x(t)$,称为全相干,即 $y(t)$ 完全由 $x(t)$ 所引起,没有其他输入或噪声的影响。当 $0 < \gamma_{xy}^2(\omega) < 1$ 时,表示该频域 $y(t)$ 有一定程度依赖于 $x(t)$,而其余部分则可能是以下几种情况引起的:

- (1) 测量信号中混有外界干扰信号。
- (2) 系统存在非线性因素。
- (3) 系统中除了输入信号 $x(t)$ 之外,还有其他输入信号。

当 $\gamma_{xy}^2(\omega) = 0$ 时,表示该频域 $y(t)$ 与 $x(t)$ 完全不相干,这时测到的传递函数是没有意义的。

习题与思考题

5.1 常用的机械振动测量传感器有哪3种?当被测量的频率范围处于高频段,应优先采用哪种传感器?大型旋转机械中监测转轴的振动,应采用哪种传感器?检测振动烈度,应采用哪种传感器?

5.2 指出利用仪器检测可以获得机械振动的3种基本参数(振动三要素)是什么。

5.3 指出获得结构固有频率和阻尼的方法有哪些。

5.4 结构的主振型怎样测量?

5.5 自相关函数和互相关函数各有哪些特点?它们在机械振动分析中有什么作用?

5.6 传递函数在机械振动分析中有什么作用?传递函数幅频特性和相频特性所表示的意义是什么?

5.7 时域内反映两信号相似程度的函数是什么?频域内判断两信号是否有因果关系的函数是什么?

第6章 振动理论在机器故障诊断中的应用

6.1 机器故障诊断技术概述

6.1.1 机器故障诊断的内容

机器故障诊断技术是近年来国内外发展很快的一门学科,它所包含的内容比较广泛,如机器发生振动和机械损伤时的原因分析、振源判断、故障防治,机械零部件使用期间的可靠性分析,机器运行状态量(振动、噪声、温度、压力和流量等)的监测,状态特征参数变化的辨识等,都属于机器故障诊断的范畴。

机器故障诊断的前提是必须了解机器的工作状态,或称“健康状况”,掌握机器各部位和零部件的性能是处于良好状态,劣化状态或者是故障状态。而对机器工作性能状态的了解是通过各种监测手段和分析系统来实现的。

所以实际上机器故障诊断技术所包含的内容是指机器运行中的“状态监测”与“故障诊断”两部分。

机器故障诊断技术应具备的功能是:

- (1) 在不打开机器的条件下,能够确定机器故障的性质、部位、程度和发展趋势,预测设备的可靠性程度。
- (2) 能够定量地检测和评价机器各部分的运动状态,缺陷和磨损,性能的劣化。
- (3) 能够确定机器故障的修复或控制方法。

由于现代化生产规模不断扩大,生产装置向着大型化、高速化、连续化和自动化发展。对机器的性能要求越来越高,一次性投资也越来越大,很多大型装置关键设备都是单机、满负荷、连续性的操作方式。一旦出现机器故障,将导致停产,其经济损失十分巨大。而且,某些机器设备一旦出现故障,如化工部门大机组的严重振动故障和灾难性事故,还可能导致重大损失。

然而,要求机器不出故障是不现实的,最好的设备也不可能永远不出故障,重要的是能及时发现机器设备的异常或故障,把握它的发展趋势,以便及早采取有效的防治措施。

机器故障诊断一般包括以下几个主要环节:

- (1) 机器设备状态参数的检测,信号采集。
- (2) 对获得的信号进行分析,提取故障的特征信息。
- (3) 确定机器故障的类型和部位。
- (4) 对确定的故障作防治处理或控制。

6.1.2 机器故障诊断的主要方法

机器设备可作为监测的信息是多种多样的,但目前用得最多的是机器的振动信号。因为机器故障无论从故障机理还是从诊断方法上来看,在很大程度上都与振动密切相关。

一方面,机器由于设计不良、制造误差、安装问题或运行中的磨损等原因引起振动而产生的故障占整个机器故障的绝大部分。因振动引起故障,或因故障引起振动的情况均经常发生。另一方面,在振动信号中蕴含着机器的状态变化和故障特征的丰富信息,一般故障都能以异常振动的形式表现出来。近年来,振动测试和分析技术有了迅猛的发展。信号的检测和分析技术已成为故障诊断中的重要手段。

机器故障的振动诊断技术就是:借助于仪器测量,通过各种测试分析手段;对测得的振动信号进行分析、比较、判断,为机器故障诊断提供依据。

除了振动信号的分析之外,其他可作为机器故障诊断的技术手段简要介绍如下:

(1) 润滑油的油样分析。对于齿轮、轴承、气缸和曲柄连杆等摩擦副,当工作状态异常时,润滑油内的金属磨屑会迅速增加。因此,通过测定油中各种金属的含量、磨粒的大小和分布状况,就可以知道机器零件的磨损程度,判断机器工作是否正常。机械故障诊断中的油样分析技术通常指铁谱分析和光谱分析,其中铁谱分析应用更为广泛。

(2) 温度的检测分析。通过检测设备温度场,根据温度的分布状态或异常变化来判断设备的故障状况。例如对旋转机械轴承的温度检测。

(3) 噪声分析。任何运转中的机器都会产生噪声,因为声音是一种机械振动在弹性介质中传播的波,所以噪声中也含有多种频率成分。与振动诊断法相类似,从噪声的频谱分析中可以找到与机器工作有关的特征信息。噪声分析可以实现的目的有两个,一是寻找机器发出噪声的主要振源,以便采取相应的降噪措施;二是通过噪声信号判断机器故障。

(4) 无损检测技术。如声发射检测、超声波检测等。

6.1.3 机器振动信号的处理

振动信号中蕴含着设备的状态变化和故障特征的丰富信息,信号处理是提取故障特征信息的主要手段,它是进一步诊断设备故障原因并采取防治对策的依据。

动态信号随时间的变化过程表现为多种形式,如简谐的、周期的、瞬态的、随机的等等,被检测到的信号由于系统传递路径的影响,环境噪声的影响和各种机械元件的联合作用,构成信号的成分很复杂。如果仅直观地从时域波形上观察,往往很难看出设备究竟是正常还是异常,如有异常,故障信息又表现在哪些方面?为此,必须对检测到的信号进行加工处理,以便更全面、更深刻地揭示出动态信号中所包含的多种信息。

目前,各种信号分析仪的功能难以胜数。从信号处理的基本方法及功能来看,可将其主要功能概括如下:

(1) 时域分析。以时间为变量的各种函数或图形,如瞬态记录、时域平均、轴心轨迹图形、自相关函数、互相关函数等。

(2) 幅值域分析。均值函数、方差和峭度计算概率密度及概率分布函数等。

(3) 频域分析。傅立叶正、逆变换,自功率谱和互功率谱、细化 FFT 技术、三维坐标图、倍频程分析等。

(4) 传递特性分析。传递函数、相干函数、模态分析等。

傅立叶变换,即频谱分析,是信号处理技术的基础,除了实现时域和频域的转换之外,它还是研究系统特性的主要工具。线性系统的输入、输出和系统的传递特性均可通过傅立叶变换方法求得,可以说,傅立叶变换是求解问题的一个普遍方法。

频谱分析在机器故障诊断中占有重要地位,一切实际发生的复杂信号都能被分解为各种频率成分,机器出现不同类型的故障,其振动频率的组成是不相同的。根据主要频率成分的幅值大小和分布情况判别故障类型是通常采用的诊断方法。

寻找机器振动原因和部位的常规步骤是:先在机器的主要部位上(如在轴上或轴承座上)采集信号,经过消除噪声处理后进行频率分析,从频谱图上找出一个或几个具有明显峰值的频率成分;另外,通过对机器结构特性计算或激振试验,预知机器主要部件的自振频率;仔细考查机器各部位产生振动的激发源和激发频率。如果频谱图上的主要响应频率与激发频率或自振频率相对应,则引起机器振动的原因和故障特征频率就可以基本确定。

在旋转机械中,频谱图上幅值占有优势的一些主要频率成分常常是人们注意的目标。下列3种主要频率分布可以大体上反映出旋转机器某些相应的故障类型。

(1) 频谱图上振动主频率等于轴的转速频率,这是最常遇到的情况。这类振动原因总是和转子各种形式的不平衡相联系的,例如转子初始平衡不良,叶片飞离,轴发生弯曲变形,轴颈和轴承偏心,转子轴承系统的自振频率与旋转频率接近,支承系统或基础共振等。

(2) 振动主频率与轴转速频率的整倍数相对应。这类情况常与转子和构件的对称性或转子的对中有关,例如转子在两个相互垂直截面上的刚度不对称,轴承支承刚度在水平、垂直方向上相差很大,联轴节的平行不对中等。

(3) 振动主频率低于转速频率,这类振动称为亚异步振动。有的振动频率为 $\frac{1}{i} \times$ 转速频率($i = 1, 2, 3 \dots$),这多数与摩擦、松动等非线性振动有关系;还有一些是 $j \times$ 转速频率($j < 1$)的振动,该振动频率与转子系统的自振频率相接近,就会引发转子系统的自激失稳振动,可能在短时间内达到系统破坏性的程度,一般发生在转速频率高于一阶自振频率时,多数是在二倍转子一阶自振频率以上,例如滑动轴承的油膜振荡。

6.2 机器的振动故障诊断

6.2.1 旋转机械常用的状态监测和分析图形

旋转机械包括汽轮机、电机、离心式压缩机、离心泵和风机等。旋转机械中的确定性的振动信号可以分为瞬态信号和稳态信号两种形式。瞬态信号是指机器启动、停车阶段或在外力突变时采集到的信号;稳态信号则是指机器稳定转速下运行时采集到的信号。

旋转机械常用的状态监测和分析图形,用于瞬态信号的有:波德图、极坐标图,三坐标图和轴心轨迹图等。用于稳态信号的有:频谱图、功率谱图,轴心轨迹图相位分析、趋势分析等。以下分别叙述几种常用的信号分析图形及其作用。

1) 波德(Bode)图

波德图是反映机器振动振幅和相位随转速(或频率)变化的关系曲线。转速为横坐标,振幅和相位角为纵坐标。一般在机器启动或停车阶段采集分析得到。

从波德图上可以得到:

- (1) 转子系统在各种转速下的振幅和相位。
- (2) 转子系统的临界转速(或共振频率)。
- (3) 转子系统的共振放大系数(临界转速时的振幅与临界转速后振幅的比值)。
- (4) 根据共振时的振幅确定转子系统的阻尼大小。

由这些数据可以获得转子的动态特性。图 6-1 是某转子启动阶段轴承上测得的波德图。由该图可知转子的临界转速约为 1 600 r/min,由该图还可得到该转子的动态放大系数及阻尼。

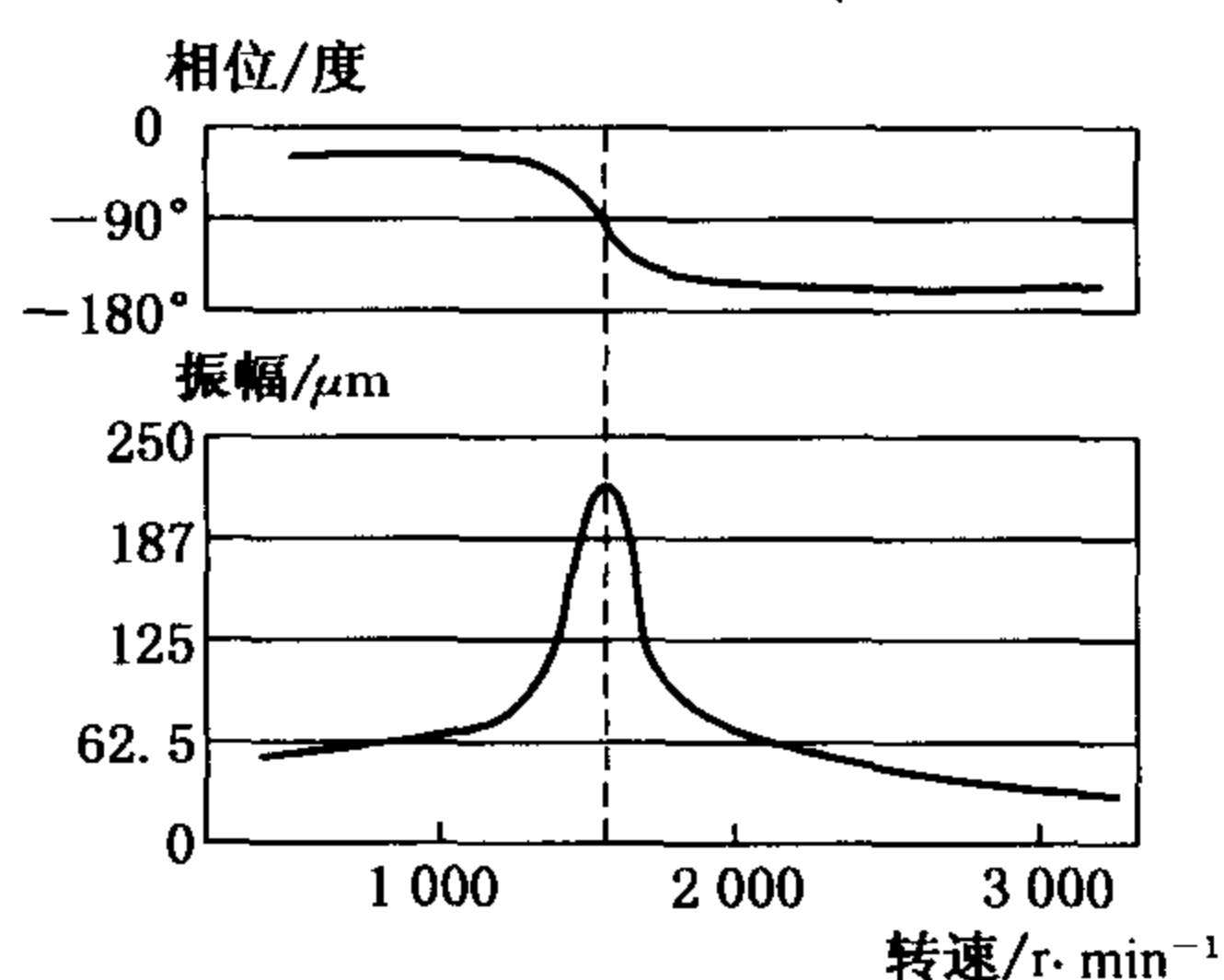


图 6-1 某转子启动阶段的波德图

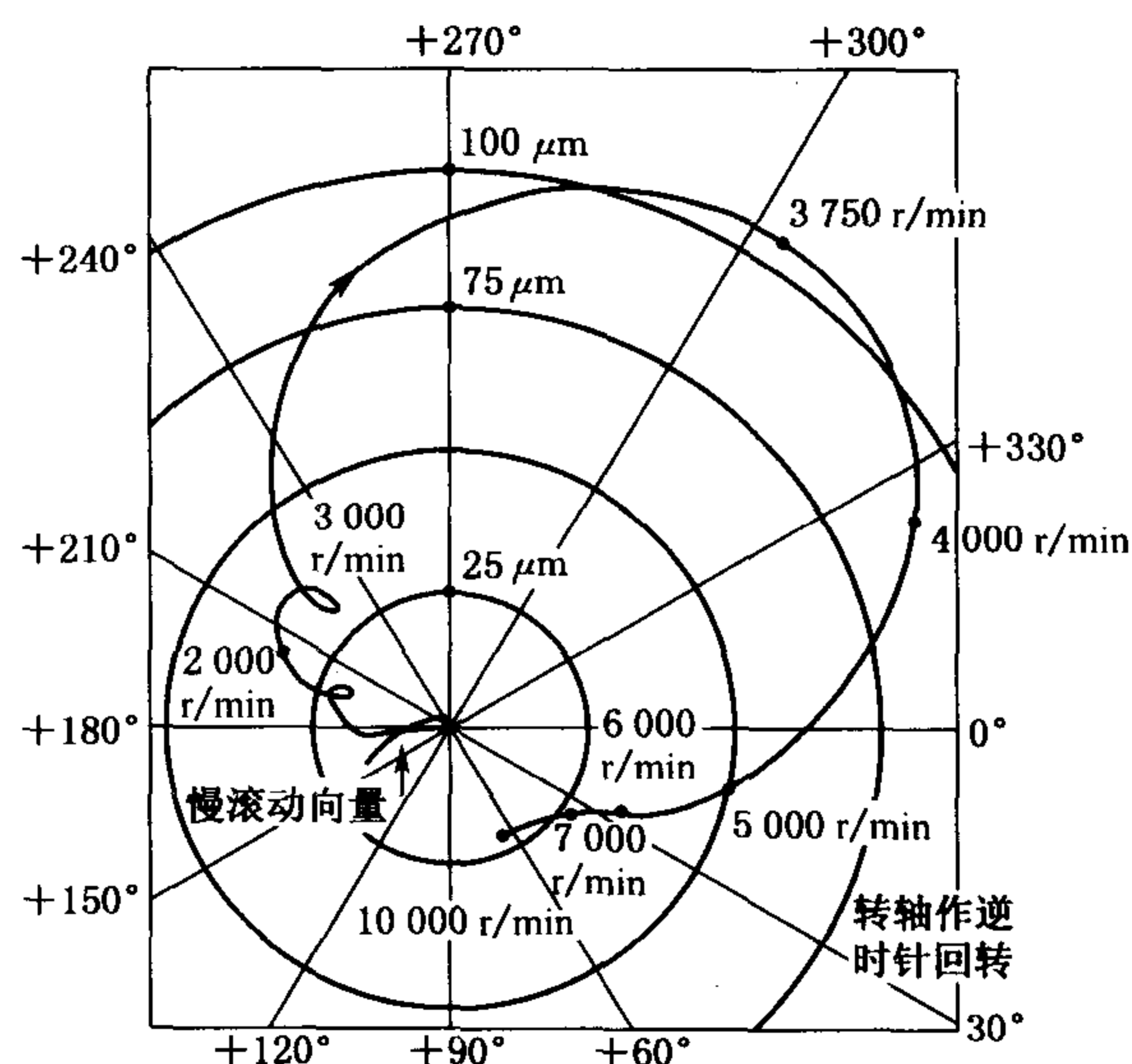


图 6-2 一台压缩机转子启动时的极坐标图

2) 极坐标(Nyquist)图

极坐标图是把振幅与相位随转速的变化关系在极坐标上表示出来。图中用一旋转矢量的点代表转子的轴心,该点在各个转速下所处位置的极半径代表轴的径向振幅,该点在极坐标上的角度就是相位角。这种极坐标表示方法在作用上与波德图相同,但比波德图更为直观,因为这一旋转矢量点的移动轨迹就代表了转子的振动状态变化。复杂的多平面的转子现场动平衡仪器常需要用极坐标图来表示。图 6-2 为一压缩机转子在启动阶段的极坐标图。在图中可清楚看出转子的临界转速是 3 750 r/min。因为在相同转速间隔中,3 750 r/min 的轨迹距离最长(在该转速下有近 180°的相位偏移),且振幅最大。图 6-2 中的慢滚动向量属于初始弯曲信号。

3) 三坐标图(瀑布图)

三坐标图的 x 轴为振动频率, y 轴为转速或时间间隔, z 轴为振动幅值。这种图形实际上表现了振动体在各种转速下的频谱变化,显示出在某种转速下发生了某个频率成分的幅值升高、降低或有突变过程,常用来表达机器振动在骤变过程或启动停车过程中各频率成分

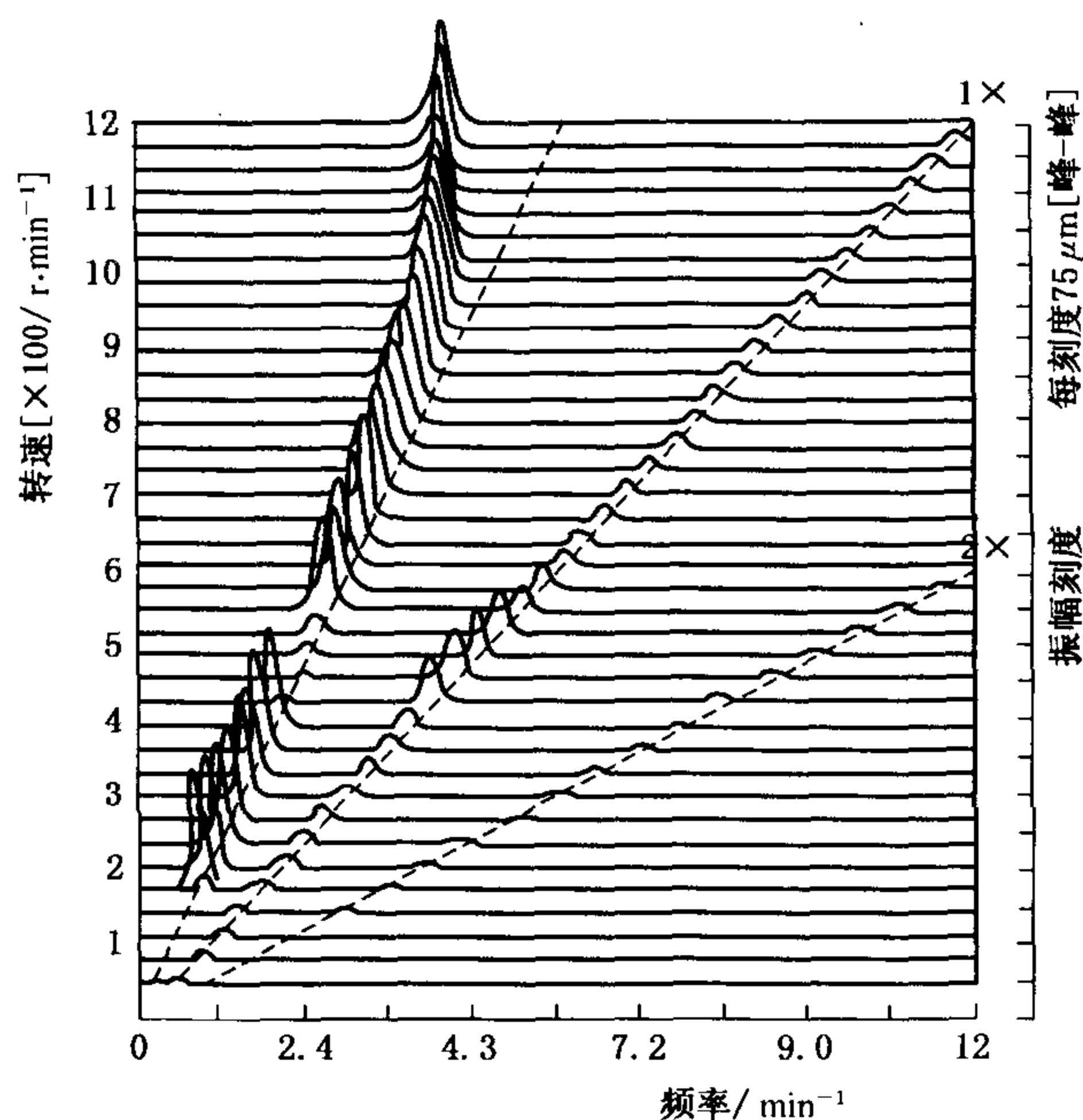


图 6-3 离心压缩机高压缸启动过程的三坐标图

的幅值变化,可以判断机器的临界转速、振动原因以及系统的阻尼情况。例如,机器过临界转速、轴承发生油膜振荡、零件磨损以及各种突发性的亚异步振动等,均能在三坐标图上获得分析故障原因的有用信息。三坐标图可由频谱分析仪或信号处理装置直接显示出来。

图 6-3 是某电厂压缩机高压缸启动过程的三坐标图。由图可见,当机器的转速达到 200 r/min 以上,半频成分(即转速频率一半)的幅值就很高。随着转速的升高振幅不断增大,振动主频率始终在转速频率的一半以下,当振幅很高时,这个振动主频率就不随转速变化,而是维持不变。这种情况大多属于油膜的不稳定涡动(半速涡动)。

当涡动频率接近转子的一阶临界转速时,就发生激烈的油膜震荡。

4) 轴心轨迹图

转轴高速旋转时并不是固定不变地围绕自身中心旋转,而是还环绕某一中心作涡动(或称甩转、进动)运动,这种涡动运动产生的原因,可能是转子不平衡、对中不良、转子上的陀螺力矩、油膜力、密封力以及转子与静子之间的摩擦力作用等。这种涡动运动的轨迹称为轴心轨迹。用某种方法测得的轴心轨迹图也称为李莎茹图形。

轴心轨迹图的获得:只要把两个非接触式传感器分别置于轴颈或轴某一截面相互垂直的两个方向上,或者用两个接触式传感器置于轴承相互垂直的两个方向上,把这两个方向上的振动信号分别输入双通道采集分析仪的 x 轴和 y 轴,两传感器的灵敏度一致,在显示屏上就得到轴心轨迹图。输入通道中加滤波器,可去除所研究频率成分以外的其他杂波信号,以获得清晰的轴心轨迹图,如图 6-4。

可以证明,转子在基本为正弦激振状态下稳定运转时的轴心轨迹为一椭圆。当 x 、 y 方向的振幅和相位不同时,椭圆具有不同的形状和方向。

轴心轨迹图在故障诊断中具有重要作用,例如可用来观察转子的临界转速,也可从中判别某些故障类型。一些大型旋转机器在发生振动故障时或故障的前期可以从轴心轨迹上分析出某些异常特征。

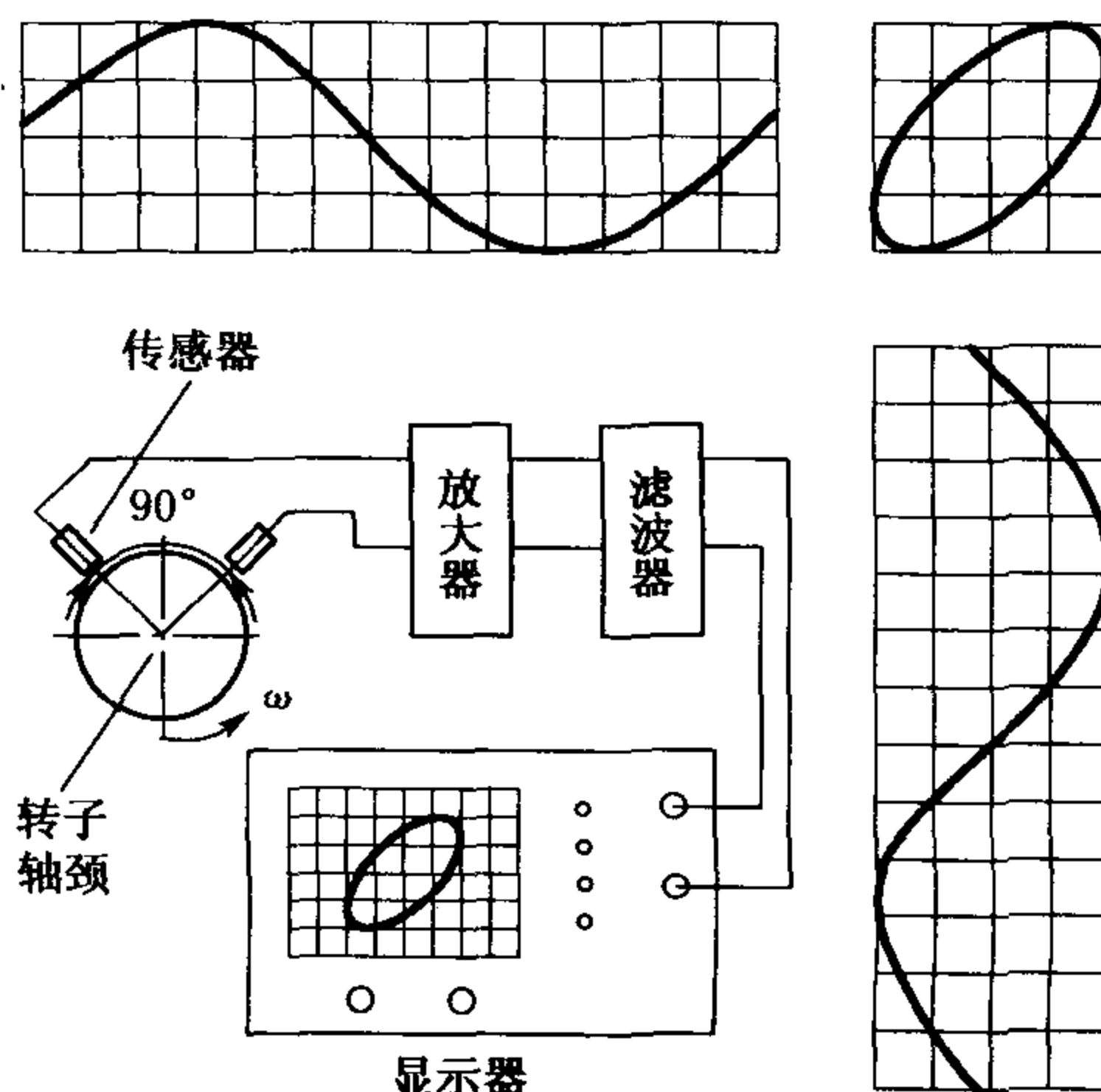


图 6-4 转子轴心轨迹监测

6.2.2 几种旋转机械的振动评定标准

旋转机械的振动振幅大小可以反映出机器受到激振力的大小,也就反映出机器运转情况的好坏。目前最常使用的评定方法是采用总振幅(通频振幅)来衡量机器运行的好坏。

这种评定方法分为两类。一种是轴承的振动评定,利用接触式传感器(速度传感器或加速传感器)放置在轴承座上进行测量;另一种轴的振动评定,利用非接触式传感器(电涡流式传感器)测量轴相对于机壳的振动值。

评定参数可以用振动烈度(即速度均方根值,它代表了振动能量的大小)或振动位移峰峰值来表示。振动烈度与振动位移峰峰值的关系可用下式表示

$$\dot{x}_{rms} = \frac{x_{pp} \cdot \omega}{2\sqrt{2}} \text{ (mm/s)}$$
 (6-1)

式中: \dot{x}_{rms} ——振动烈度,单位 mm/s。
 x_{pp} ——振动当量位移峰峰值,单位 mm。
 ω ——转子旋转角速度,单位 r/s。

1) 以轴承振动位移位峰峰值作评定标准

表 6-1 为水电部颁布的《电力工业技术管理法规》中规定的汽轮发电机组轴承的振动标准。表 6-2 为机械部《离心鼓风机和压缩机技术条件》中规定的轴承振动标准。表 6-3 为国际电工委员会(IEC)推荐的汽轮机振动标准。

表 6-1 汽轮机组振动标准/ μm

转速/ $\text{r} \cdot \text{min}^{-1}$	优	良	合格
1 500	30 以下	50 以下	70 以下
3 000	20 以下	30 以下	50 以下

表 6-2 离心鼓风机和压缩机振动标准/ μm

轴承类型	转速/ $\text{r} \cdot \text{min}^{-1}$			
	$\leq 3\,000$	$\leq 6\,500$	$\leq 10\,000$	$\leq 16\,000$
主轴轴承	≤ 50	≤ 40	≤ 30	≤ 20
齿轮轴承		≤ 40	≤ 40	≤ 30

表 6-3 IEC 推荐的汽轮机振动标准/ μm

位 置	转速/ $\text{r} \cdot \text{min}^{-1}$				
	$\leq 1\,000$	1 500	3 000	3 600	$\geq 6\,000$
轴承上	75	50	25	21	12
轴上(靠近轴承)	150	100	50	44	20

用振动位移值来评定机组振动是按照转速高低来规定允许的振动值。转速低、允许的振动值大;转速高,允许的振动值小。因为同样的振动值,对高速机组将会带来较大的

危害。

2) 以轴振动的位移峰峰值作评定标准

美国石油学会对涡轮机械的振动标准为 API617, 这个标准给出轴振动的限制数值。API617 规定的振动允许值 A 为

$$A = 25.4 \sqrt{\frac{12\,000}{n}} \quad (\mu\text{m 双振幅}) \quad (6-2)$$

式中: n ——转速(r/min)。

上述 IEC 推荐的汽轮机振动标准中也包含了轴振动的标准。

3) 以轴承振动烈度作评定标准

国际标准化组织 ISO 2372 和 ISO 3945 振动标准给出了以振动烈度来评价轴承振动的标准。以振动烈度规定的标准不必再按转速而异。

表 6-4 ISO 2372 振动标准

振动烈度 /mm·s ⁻¹	机器类型					
	K 类	M 类	G 类	T 类		
0.28	A	A	A	A		
0.45						
0.71						
1.12	B	B	B	B		
1.8	C					
2.8						
4.5	D	C	C	B		
7.1		D			C	
11.2			D	D	C	
18.0					D	D
28.0						
45.0						

表 6-5 ISO 3945 振动标准

振动烈度 /mm·s ⁻¹	支承分类	
	刚性支承	柔性支承
0.45	好	好
0.71		
1.12		
1.8	满意	满意
2.8		
4.5		
7.1	不满意	不满意
11.2		
18.0	不能接受	不能接受
28.0		
45.0		
71.0		

ISO 2327 振动标准中机器状态分 4 个品质段: A 为设备状态良好; B 为容许状态; C 为容忍状态; D 为不允许。表中每个分级档次的比例系数为 1.6, 这是在实际经验中得出的规律, 即机器速度每上升 1.6 倍时, 已明显感受到不同的振动迹象。在表中把机器类型分为 4 类, 其中 K 类表示小型机器, 功率不超过 15 kW; M 类中型机器, 功率为 15~75 kW; G 类表示大型机器; T 类表示大型原动机。

ISO 3945 规定的是功率大于 300 kW 的大型电机、汽轮机、涡轮泵和风机等机器的振动标准。我国机电部标准(JB)也与此相同。支承类型分为刚性与柔性支承两类。当转子系统的一阶固有频率低于机组的转速频率时属于柔性支承, 反之则属于刚性支承。

上述标准适用于工作转速为 600~12 000 r/min 的机器。

上述使用的标准有一定的片面性, 主要是它没有充分考虑不同机器动态响应。例如在

实践中发现,对于大机器转子,由于各种力的作用所形成的动态力虽然较大,但是轴承、机壳的刚度和阻尼也大,经过轴承和机壳的传递,在轴承座上测得的振动值将大大被衰减而变得很小。在轴承或机壳上测得的振值并不能正确反映出转子振动的大小,所以对于大机器更适合于采用轴相对于轴承的位移值来制定振动标准。

关于振动值的评价问题,作为一般规则可以认为:中小型机器,振动值的评价可以采用测量轴承座上的速度或位移。对于大型机器,振动值的评价可以采用轴承座上的测量值,也可以采用测量轴对轴承的位移。轴承座上的测量值一般仅作为评价机器振动大小的依据,而不宜作为“标准”使用。

4) 按照频率分析方法评定

虽然上面所述的根据总振值大小作出评价机器的方法,能在总体上反映机器运转时是否存在故障状态。但是不同类型的故障所引起的机器损伤严重程度是不相同的。例如一台机器的振动由于转子不平衡引起,轴振动位移为 $50\ \mu\text{m}$,当时机壳和管道的振动并不明显。当发生气流激振时,同样测得轴振动位移为 $50\ \mu\text{m}$,此时机壳、管道振动非常剧烈,甚至局部发生管道振裂。因此采用总振值来作为评定机器发生故障的程度是不全面的。而且从总振值的测量中也无法了解机器故障的类型和性质。如果采用频率分析方法,根据频谱中的各频率在频域中的分布等方面的信息,作为评价机器在故障状态的依据。这种评定机器振动的方法较采用总振值评定更为科学。目前已有一些企业利用频率分析方法作为评定机器是否“正常”、“异常”或存在“严重故障”的依据。

6.2.3 旋转机械典型故障的振动诊断

机器或其零部件作为一个振动系统,在振动激振和响应之间有着一定的状态联系。由前4章中叙述的有关振动的基本理论可知,对于线性系统,运动微分方程为

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F(t) \quad (6-3)$$

在线性系统中,响应频率等于激振频率,系统的固有频率与振幅大小无关。另外,线性系统中可用叠加原理处理问题。

实际振动系统的弹性与阻尼并不符合线性模型,但是大多数情况下,只要振幅不大,完全可以按线性系统处理,其结果仍然是准确的。然而,像干摩擦、材料内部摩擦阻尼、油膜震荡以及大振幅等情况,就不能认为是线性系统。这类属于非线性振动问题,其振幅和频率响应特性就完全不同了,它们的振动频率随振幅大小而变化,而且在简谐力作用下,其受迫振动不一定是简谐振动,它的响应波形会发生畸变,响应波形中除了包含有与激振频率相同的谐波外,还包含有超谐波响应和次谐波响应。对于非线性系统的运动微分方程为

$$M\ddot{x} + F(\dot{x}, x, t) = 0 \quad (6-4)$$

实际机器的振动问题比较复杂,通常主要是通过测试分析手段对测得的信号进行处理。对机器故障进行振动诊断的过程,一般包括三方面内容:信号采集、数据处理、故障分析和诊断。

旋转机械的振动,可分为两种形式:一种形式为同步振动,也称为强迫振动,其振动频率为转子的转速频率及其倍频,主要由转子的不平衡、联轴器的不对中、安装不良等原因造成。另一种形式为亚异步振动,多为自激振动,这种振动常常在某个转速下突然发生,对机器具有极大的危害性。

以下简要介绍典型的或常见的几种旋转机械故障的诊断。

1) 转子不平衡故障的诊断

(1) 转子不平衡故障的机理和特征。不平衡是转子最常见的故障。造成转子质量不平衡的原因大致有:

① 设计制造方面的原因。如旋转体几何形状不对称,材料缺陷、焊接或浇铸上的缺陷、装配误差、转子动平衡方法不当等引起的质量不对称,使转子重心不在旋转轴线上。

② 工艺过程的原因。如转子初始弯曲、转子受热不均匀、转子部件结垢、转子部件脱落、分离机械转鼓内物料分布不均匀等,引起转子质量偏心。

转子质量不平衡所产生的离心力始终作用在转子上,转子每旋转一周,就在转子或轴承处产生一次激振。因此它的振动频率就是转子的转速频率,即

$$f = \frac{n}{60} \quad \text{或} \quad \omega = 2\pi f = \frac{\pi n}{30}$$

转速频率也称为工频,即工作频率,如图 6-5 中 ω_0 。这种频率成分很容易在频谱图上观察到。转子不平衡故障的特征是:

① 在转子径向方向的频谱图上,转速频率成分具有突出的峰值。

② 转速频率成分的高次谐波幅值很低,因此反映在时域上的波形很接近于一个正弦波。

③ 对于普通两端支承的转子,轴向测点上的振值一般并不明显。

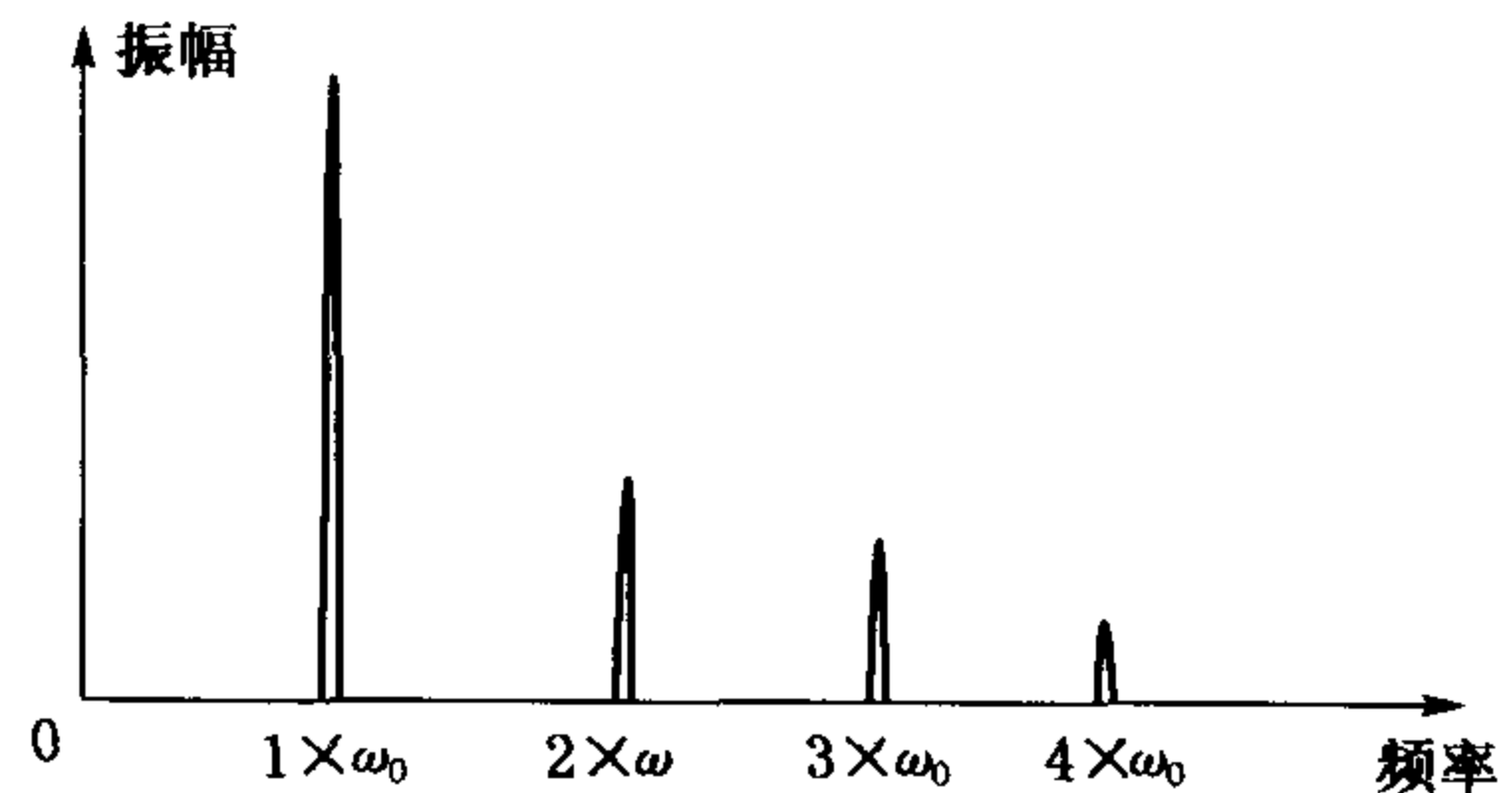


图 6-5 典型的不平衡振动频谱

典型的不平衡振动频谱图中转速频率成分幅值占有最大比例,如图 6-5,这是不平衡振动明显的特征,其波形图基本上是一个标准的正弦波。图中还会出现 $2 \times \omega$, $3 \times \omega$, $4 \times \omega$ 等一些高频成分,主要是系统受非线性振动的影响。实际转子轴承并非完全线性振动系统,非线性影响的特点是会产生激振频率的超谐波响应。

实际转子轴承并非完全线性振动系统,非线性影响的特点是会产生激振频率的超谐波响应。

(2) 类似于不平衡振动的其他故障鉴别。还有一些机器故障,例如机壳变形、转轴上传动零件偏心、机座松动、往复力作用或基础共振等,这些故障也会在径向方向显示出较大的转速频率成分。这些类似于不平衡振动的其他故障,可以采用一种相位分析的方法,将这类故障与单纯的不平衡区别开。

一般来说,在不平衡旋转离心力作用下,转子轴心轨迹为一椭圆,离心力激振将在转轴截面的水平和垂直两个方向上产生 90° 左右的相位差。而机壳变形、支撑部位松动、轴上零件(如皮带轮)偏心 and 基础共振这些故障出现时,虽然其振动频率像不平衡振动一样,表现出以转速频率为主的频率成分,但是其振动方向一般不按旋转力的方向变化,在转轴截面的水平和垂直两个方向上产生相位差为 0° 或 180° 。这种振动模式称为“定向振动”。其转子轴心轨迹接近一条直线形状。

2) 转子不对中故障形式与特征

(1) 转子不对中故障的形式。转子不对中是指用联轴器连接的相邻两转子的轴线的不对中,而转子本身是由轴承支撑。因此转子不对中包括两方面的内容,一是联轴器的不对中;二是轴承的不对中,两者是互相联系的。轴承不对中也可能由基础下沉或轴承座的热膨

胀不均匀而引起。

① 联轴器的不对中

联轴器的不对中情况有两种基本类型：平行不对中和角度不对中。实际情况往往是这两种基本不对中类型的组合，如图 6-6。

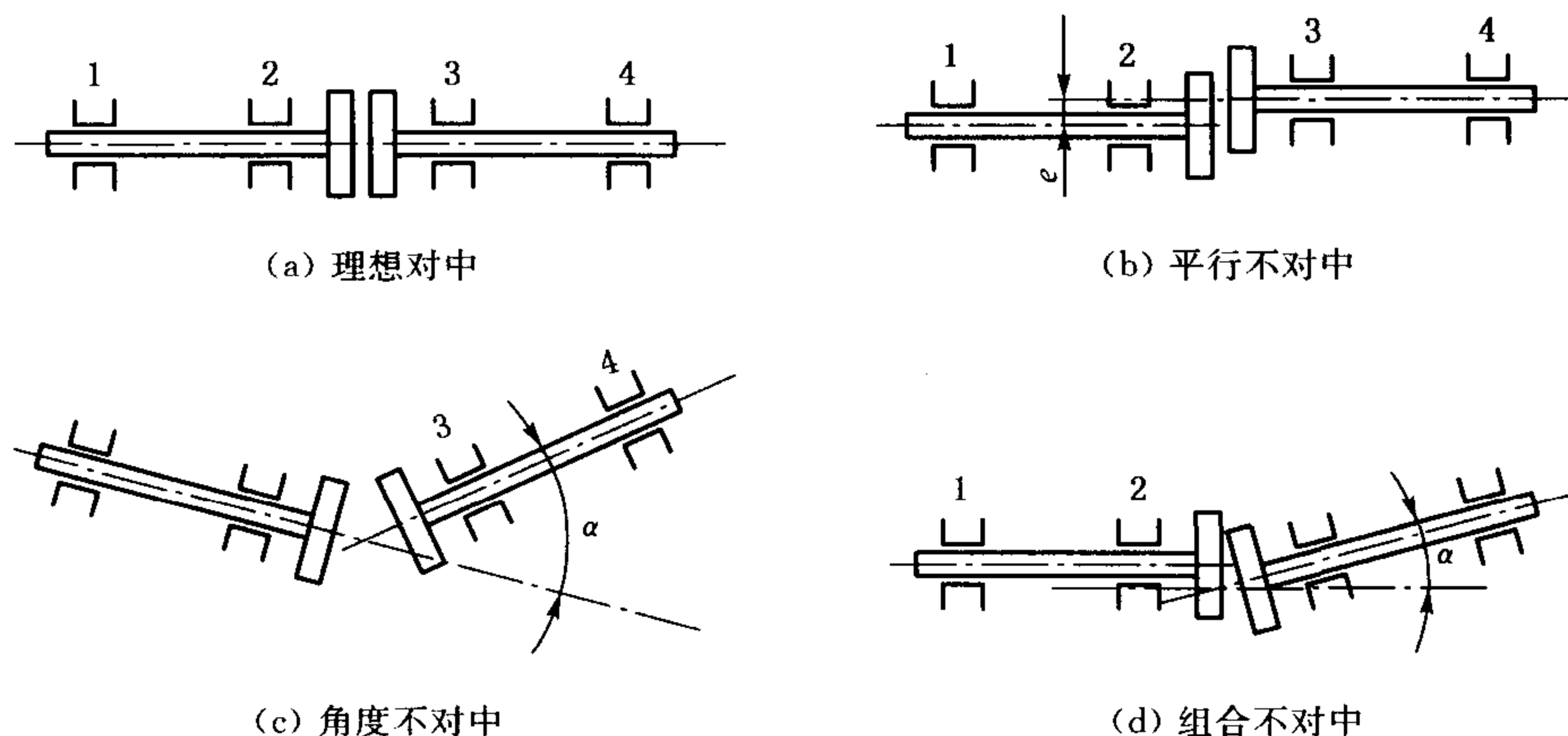


图 6-6 联轴器的不对中(1、2、3、4 为轴承编号)

对于平行不对中的研究表明：平行不对中转转子旋转时，会产生很大的离心力，激振转子产生径向振动，其振动频率为转速频率的 2 倍。

对于角度不对中的研究表明：角度不对中转转子旋转时，会产生很大的轴向激振力，激振转子主要产生轴向振动，其振动频率为转速频率。

组合不对中则包含了 2 倍频的径向激振和工频(转速频率)的轴向激振。

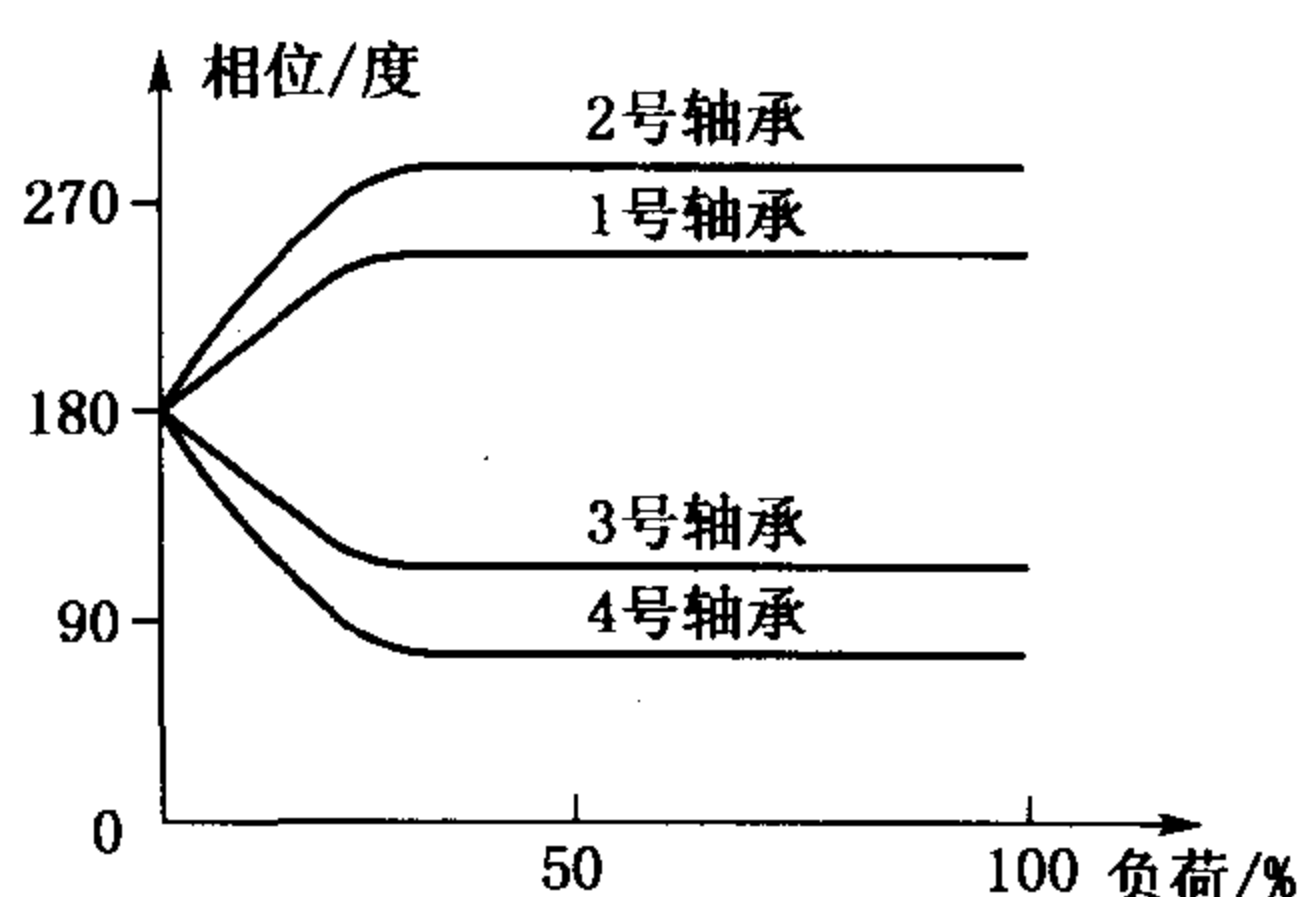


图 6-7 不对中时轴承相位
(轴承编号见图 6-6)

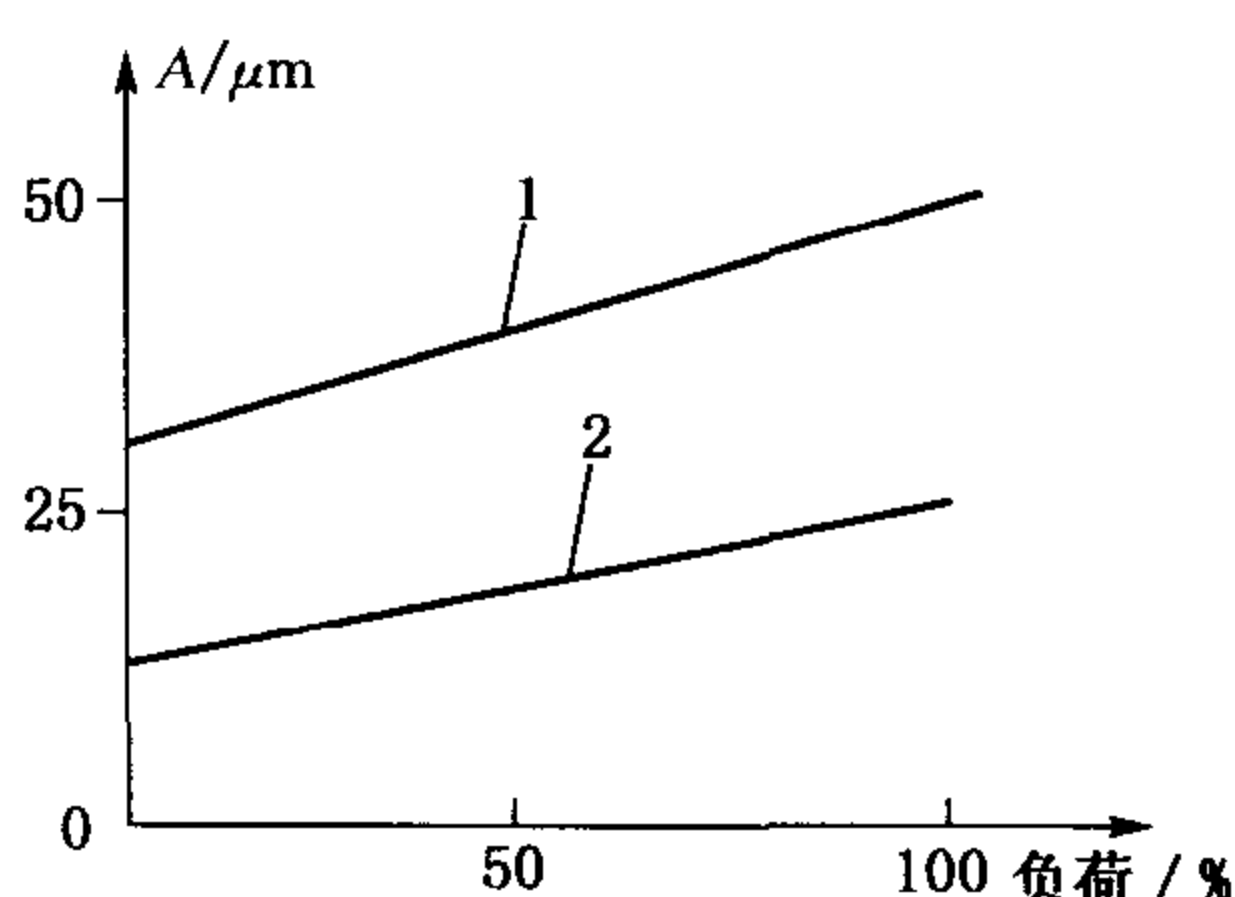


图 6-8 轴承上振幅与负荷关系
1. 位置偏低的轴承 2. 位置偏高的轴承

② 轴承的不对中

轴承不对中反映了转子轴颈在轴承中的安装不对中，使轴颈在轴承中的平衡位置改变，轴颈位置低的轴承负荷增大，轴颈位置高的轴承负荷减小。图 6-8 表示紧靠联轴节两侧的轴承，当存在平行不对中时，随着负荷的增加，轴承上振幅增高的趋势，由图可见，位置低的轴承(轴颈位置高)比位置高的轴承(轴颈位置低)振幅大。因为位置低的轴承被架空，油膜稳定性下降。轴承不对中使转子在运行中产生附加的载荷，甚至使转子产生摩擦和失稳。

(2) 转子不对中故障的特征。不对中故障的主要特征表现在下列几个方面：

① 联轴器不对中故障所出现的最大振动往往出现在紧靠联轴节两端的轴承上,如图6-6的2号、3号轴承。

② 不对中使联轴节两侧的转子振动产生相位差。平行不对中时,两侧轴承径向振动相位差基本上为 180° ;角度不对中使联轴节两侧轴承轴向振动相位差 180° ,如图6-7。

③ 平行不对中主要引起径向振动,角度不对中主要引起轴向振动。通常联轴器的不对中总是包含较大的轴向振动。

④ 从振动频率上分析,不同形式的不对中情况引起的振动频率是不相同的。不对中振动以2倍频和工频为主,2倍频所占比例越大,往往表明不对中越严重。所以通常可根据2倍频和工频所占比例来判断不对中的严重程度,如图6-9。

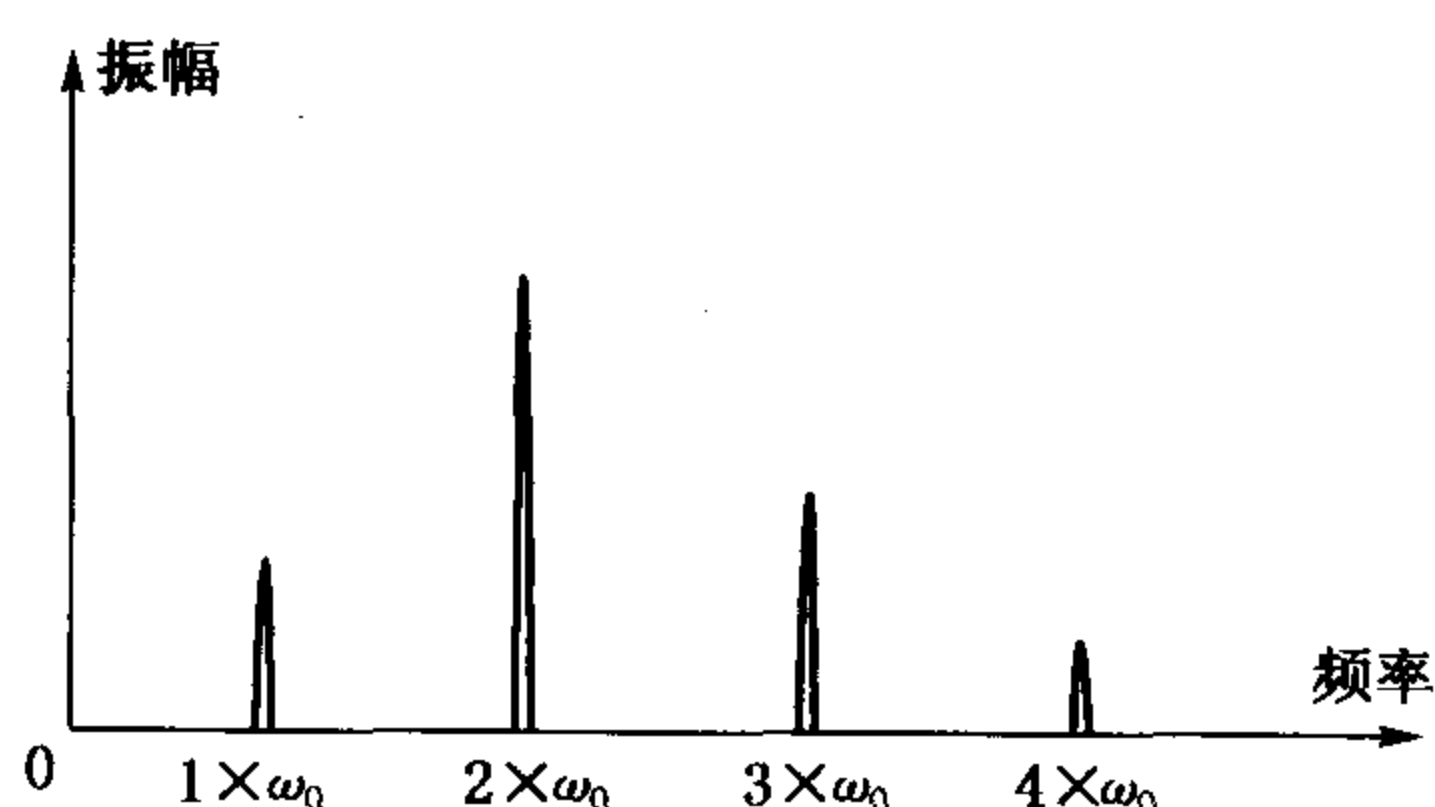


图 6-9 某离心压缩机不对中时的响应

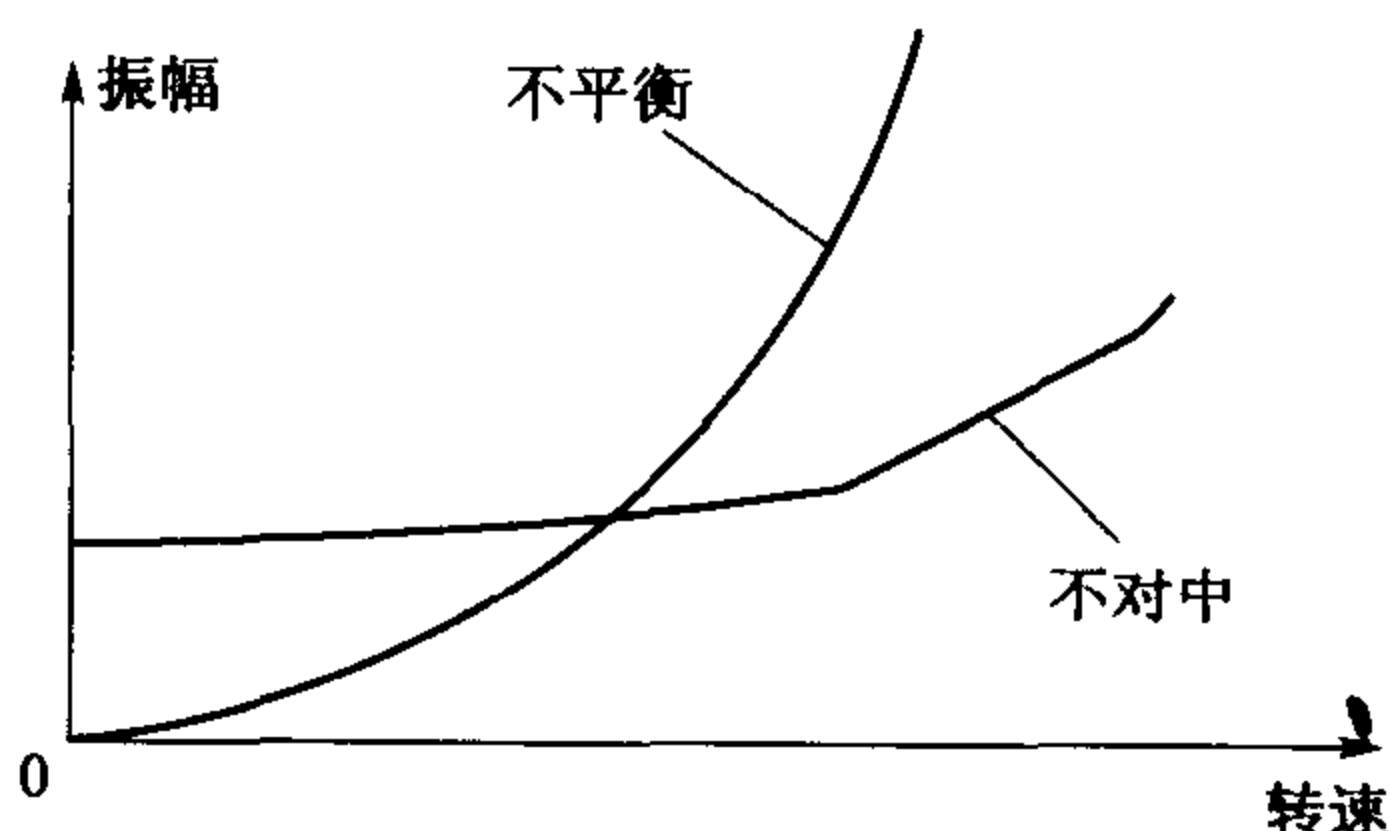


图 6-10 不平衡与不对中时振幅随转速的变化

⑤ 不对中使相邻两个轴承的支承负荷发生较大变化,一个轴承负荷变大,另一侧负荷减小,负荷减小的轴承容易引起油膜失稳。

⑥ 不对中故障对负荷的变化敏感,随着负荷的增加,轴承上的振幅呈增高趋势,如图6-10,其中位置低的轴承振幅比位置高的轴承大。

3) 油膜振荡的特征及其诊断

(1) 滑动轴承工作原理。高速旋转机械广泛采用滑动轴承,滑动轴承依靠转轴自身旋转产生的油楔压力来支撑转子的负荷。转轴转速 ω 升高至一定程度时,轴颈与轴瓦之间的收敛间隙中流动的润滑油就形成油膜,收敛油膜也称为油楔。收敛油楔中,流进油处的间隙大而流出油处的间隙小,根据流量的连续性,流进油的速度变小而流出油的速度变大。该流体的动压力托起轴颈,并将轴颈推向一边,使轴颈在偏心的位置上稳定运转。轴颈中心与轴承中心的距离称为偏心距,偏心距连线与外载荷 W 的作用线(垂直线)的夹角称为偏位角。一定的偏心距和偏位角反映了一定的油楔形状。在轴承内轴颈与轴瓦不发生接触的情况下,偏心距越大,油膜厚度越小,则转子系统的稳定性越好,承载能力越大。

(2) 半速涡动。事实上,高速转子轴颈在滑动轴承内高速旋转的同时,还受到外界干扰,围绕某一平衡中心作公转运动,即涡动。涡动运动主要是在油膜动压力的切向分力的推动下出现的。可以证明轴颈涡动的角速度 $\omega_{\text{涡}}$ 理论上等于转子旋转角速度 ω 的一半,即

$$\omega_{\text{涡}} = 0.5\omega \quad (6-5)$$

通常称此为半速涡动。实际上,由于轴承端存在泄漏等因素的影响,涡动角速度 $\omega_{\text{涡}}$ 小于转子旋转速度的一半,即半速涡动的实际涡动频率 $\omega_{\text{涡}}$ 约为

$$\omega_{\text{涡}} = (0.42 \sim 0.48)\omega \quad (6-6)$$

油膜激振引起的半速涡动其方向与转子转速的方向相同,为正向涡动。涡动轨迹近似

椭圆。半速涡动是一种自激振动。由于油膜具有一定的阻尼,使半速涡动的幅值保持在一稳定值,一般振幅比较小。但在某种条件下,可能会使振幅越来越大,强烈的振动会导致机器零件的损坏。

(3) 油膜震荡现象。油膜震荡是轴颈的涡动频率与转子的自振频率相重合时产生的共振涡动。

半速涡动的出现,使转子由稳定变为不稳定,随着转轴转速 ω 的继续升高,涡动角速度 $\omega_{\text{涡}}$ 也随之增加,并保持着约等于转速之半的比例关系,在转速较低的很大一段范围内,虽然半速涡动已出现,但涡动一般并不激烈。但当转速 ω 超过转子的一阶临界转速 ω_n 的二倍以上后,半速涡动频率与转子的自振频率相重合,就会发生油膜共振,转子振幅突然升高,振动激烈。这种共振涡动现象就称为油膜震荡。

半速涡动与油膜震荡的发生,与一定的转轴转速和载荷有关。高速轻载转子的轴颈中心在轴承中的下沉偏心距较小,轴心位置较高、因此其稳定性较差。半速涡动在较低的转速下就会出现,如图 6-11(a)。半速涡动一旦出现,就持续下去。随着转速 ω 的升高,半速涡动成分的幅值也逐渐增加。当转速达到或稍高于 2 倍的转子一阶临界转速 ω_n 时,开始发生油膜震荡。

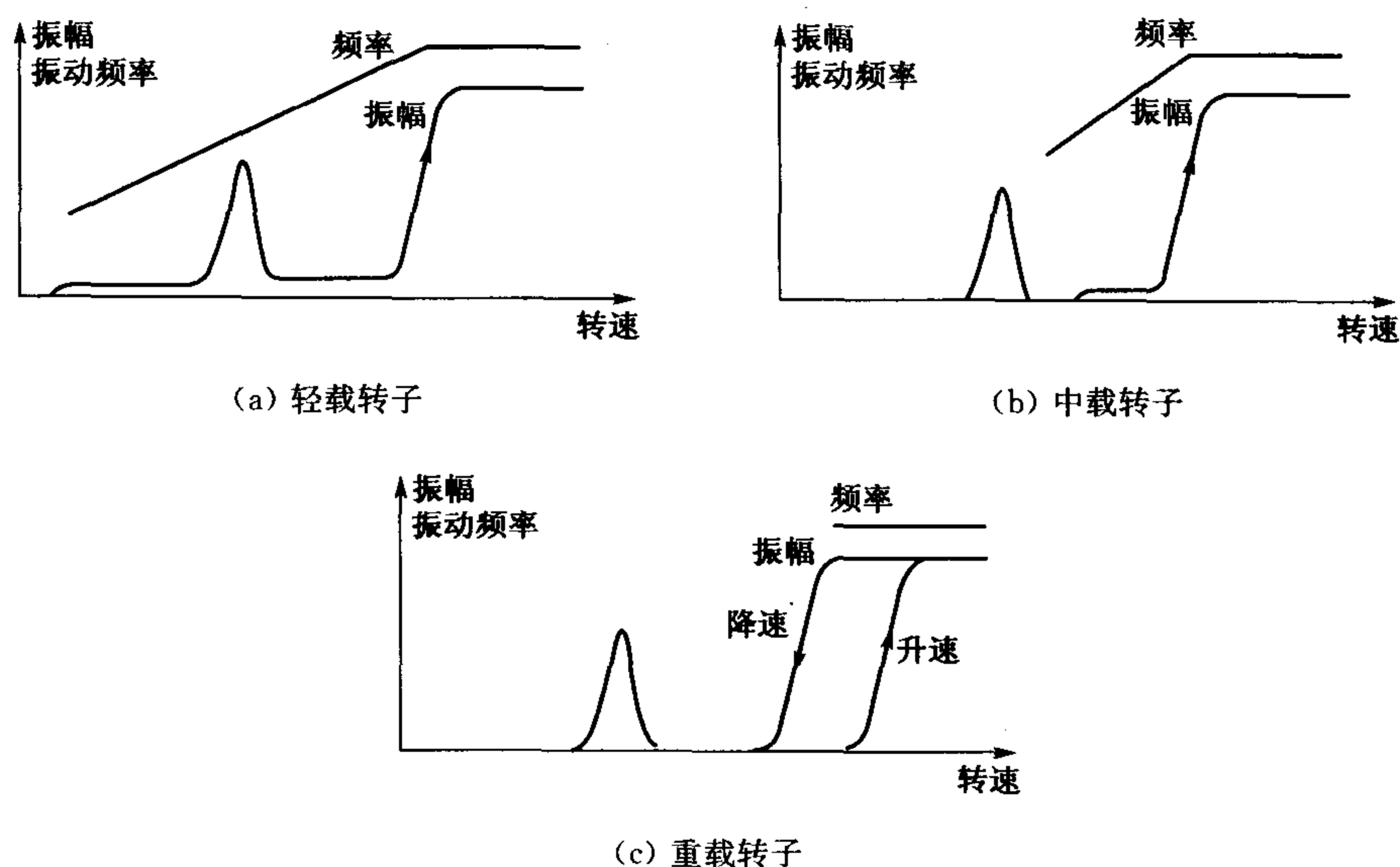


图 6-11 不同载荷下油膜震荡特点

对于中载转子,涡动在一阶临界转速后出现,发生油膜震荡的转速稍高于 $2\omega_n$,如图 6-11(b)。对于重载转子,因为轴颈中心在轴承中的下沉偏心距较大,因此其稳定性好。低转速时未出现半速涡动。当转速达到 $2\omega_n$ 时,转轴没有失稳。直到转速高于 $2\omega_n$ 较多时,才突然发生油膜震荡,如图 6-11(c)。

油膜共振发生后,再提高转速,涡动角速度与转速的比例关系便不再保持。

油膜震荡的振幅远高于半速涡动,常有毁坏机器的危险。

(4) 油膜震荡故障的特性。油膜震荡往往来势很猛,瞬间振幅突然升高,引起轴颈与轴瓦之间摩擦,发出强烈的吼叫声,将严重损坏轴承和转子。它主要有以下特征:

① 油膜震荡的发生转速总是在转子系统一阶临界转速 ω_n 的二倍以上。

② 油膜震荡故障的振动主频率约为转子的一阶临界转速,接近发生油膜震荡的起始转速频率的一半。发生油膜震荡后,转速再升高,油膜震荡的频率不变。

③ 油膜震荡的发生和消失具有突发性,升速时发生油膜震荡的起始转速和降速时油膜震荡的终止转速是不相同的,起始转速要大于终止转速,这种现象称为“惯性”现象,如图6-11(c)。

(5) 油膜震荡的防治方法。

① 提高转子系统刚度,提高转子系统一阶临界转速,扩大转子系统稳定工作区。使转子的涡动速度小于转子系统一阶临界转速,避开共振涡动。

② 提高轴承的稳定性。

a) 提高轴承比压,即适当减小轴承宽度,抬高轴承位置。

b) 适当降低润滑油黏度,适当提高润滑油温度。

③ 采用抗振性能良好的轴承。各种类型的轴承特点如下:

a) 普通的圆柱轴承。低速重载时是稳定的,高速轻载转子很少采用。

b) 椭圆轴承。使用较广泛,产生两个油楔,对轴颈失稳有抑制作用,允许轴承正反转。

c) 多油叶轴承。由几块圆弧瓦组成,产生多个油楔,性能优于椭圆轴承。

d) 多油楔轴承。性能类似于多油叶轴承,但只允许轴承单向转动。

e) 可倾瓦轴承。由多块可绕支点偏转的活动瓦块组成,是目前认为抗振性能最好的轴承。

4) 高转速机械转子的亚异步不稳定振动

(1) 概述。涡轮机械(汽轮机、离心式压缩机等)的技术发展趋势表现在高转速、轻质量、高压、高效、大功率和高增益的功率密度(即机器单位质量或单位体积内所具有的输出功率)。这些高性能机器在提高产量、降低成本等方面带来巨大的经济效益,但是从设计制造到运行管理也带来很多难题,其中高速旋转机器的亚异步振动问题是机器使用中面临的一大威胁。

高速、高压和轻质量的机器意味着它的旋转部件必须设计成挠性结构。现在很多涡轮机械的转子工作转速超越其一阶乃至二阶临界转速。这种转子一旦发生亚异步自激振动失稳,转子由运动而贮存的能量不断释放,将对包括轴承在内的静子部件产生强大的激振力。因此对于超临界转速运行的机器,不仅需要作审慎的高速动平衡,而且要在结构设计上避开共振涡动区域,防止落入不稳定的门槛之内。

高功率密度与转子挠性结构联系在一起,使得机器对于流体激振等干扰更为敏感,容易在工作中失去稳定。

涡轮机械为了追求高效率,势必要求转子和静子各部分动、静元件之间具有较小的密封间隙,较长的密封结构,但是高压差力的密封小间隙,如果设计不当会引起转子的气隙激振。

此外,挠性转子的内摩擦阻尼、干摩擦振动、流体的激振以及转子的刚度不对称等因素均可能引起亚异步不稳定振动。

(2) 亚异步不稳定振动的特性。亚异步振动,即转子振动频率低于转速频率的振动,这种振动可以分为强迫振动和自激振动两类。像离心式压缩机的喘振、旋转失速之类的气流激振属于强迫振动,而油膜振荡、非接触式密封中的流体激振、转子材料内摩擦阻尼等属于自激振动。通常亚异步不稳定振动指自激振动。

在滑动轴承的稳定性分析中已经提到了油膜涡动的概念,油膜振荡即是转子轴颈在油膜力作用下发生的一种共振涡动。除了油膜力之外,转子上还有其他的激振力,这些激振力的一个共同特征,是施加在与转子位移相垂直的涡动切向方向上,促进转子加剧涡动运动。转子在受到这些力的作用后,一般情况下,由于系统存在阻尼,振动并不会显著增大。但若激振力的频率的接近转子的自振频率,就会引起共振涡动。这时,系统的阻尼力往往不足以克服激振力,转子振幅将迅速扩大,强烈的振动可能造成机器的损坏。

发生亚异步不稳定振动的转子往往运行在它的一阶临界转速之上,转子的振动一般具有突发性的特点,与一定的速度、负荷或功率门槛值相联系。当到达门槛值以后,猛烈的振动随之发生,要想继续提高机器的转速或负荷几乎是不可能的,这种振动称为共振涡动。也有的称为分数频率涡动,振动往往在机器未达到额定负荷和额定转速之前不暴露出来,而到投产以后才发现这类问题。

有些机器因为设计中考虑不周,带来本身固有的毛病,属于先天性稳定不足,当遇上环境条件的微小变化就会失去稳定。对这种机器进行小修小改往往并不能解决问题,必须从整体结构上改造。例如,提高转子的刚性,改造轴承和密封结构,利用多种措施增加系统的阻尼等;提高共振涡动门槛值,避开共振涡动。而另一些机器的不稳定则是由某种激振源引起的,消除了这种激振源,机器就恢复到稳定状态。

高参数(高速、高压、高功率)机器的转子共振涡动问题,曾引起国内外很多学者的重视,并进行了大量研究工作,研究转子的共振涡动特性,得到的基本结论是:

- ① 一个平衡很好的转子,开始发生不稳定时,需要有一个外部干扰。
- ② 发生共振涡动的工作转速总是在一阶临界转速之上。
- ③ 共振涡动频率与机器转速高低无关,总是保持为一个恒定值。
- ④ 共振涡动的门槛值在同一类结构的机器中也会有很大差别。
- ⑤ 在系统中增加阻尼,可提高共振涡动门槛值。
- ⑥ 提高转子动平衡精度并不能消除或衰减共振涡动。

6.3 机器典型零部件的振动故障诊断

6.3.1 齿轮故障的基本形式与特征

1) 齿轮异常的基本形式

齿轮是机械装置中最常见的传动方式。齿轮常在高速、重载等恶劣环境条件下工作,使其发生故障的因素愈来愈多,而齿轮异常又是诱发机器故障的重要因素。因此,齿轮的故障诊断非常重要。

齿轮由于制造、操作、维护以及齿轮材料热处理、运行状态等因素不同,产生异常的形式也不同,常见的齿轮异常有以下4种形式。

(1) 齿面磨损。齿面磨损是由于油质不清洁、润滑油不足或污物进入齿轮工作表面等原因引起,使齿廓显著改变,侧隙加大,以至于齿厚过度减薄导致断齿。

(2) 齿面划痕胶合。齿面工作时温度很高,如润滑条件不好,齿面间的油膜破裂,一个齿面的金属会熔触黏着在与之啮合的另一个齿面上,在齿面上形成垂直于节线的划痕胶合。

新齿轮未经跑合时,也常在某一局部产生这种现象,使齿轮擦伤。

(3) 齿面点蚀和剥落。齿轮在实际啮合过程中,既有相对滚动,又有相对滑动,而且相对滑动的摩擦力在节点两侧的方向相反,从而产生脉动载荷。这种力的作用使齿轮表面层产生脉动循环的应力,当该应力超过齿轮材料的疲劳极限时,接触表面将产生疲劳裂纹,继而裂纹扩展,最终使齿面剥落小块金属,在齿面上形成小坑,称其为点蚀。当“点蚀”扩大连成一片时,形成齿面上金属块剥落。此外,材质不均或局部擦伤,也易在某一齿上首先出现接触疲劳,产生剥落。

(4) 弯曲疲劳与断齿。在运行过程中承受载荷的轮齿,如同悬臂梁,其根部受到脉动循环的弯曲应力作用最大,当这种周期性应力超过齿轮材料的弯曲疲劳极限时,会在根部产生裂纹,并逐步扩展,当裂纹扩展后剩余部分无法承受外载荷时就会发生断齿现象。齿轮由于工作中严重的冲击、装配不良以及材质不均也都可能引起断齿。

以上形式的故障中,断齿和点蚀是齿轮的主要故障模式。

齿轮异常可分为局部的和分布的。前者集中于某个或几个齿上,后者分布在各轮齿上。

2) 齿轮振动的类型

齿轮在运行过程中产生的振动是非常复杂的,齿轮的振动频率基本上可归纳为3类:其中主要的是齿轮的啮合频率及其谐波以及在啮合频率及其谐波两侧的一簇边频带;其二是低频的轴的转动频率及其谐波;其三是高频的齿轮自身的各阶固有频率振动。而齿轮的实际振动往往是上述各类振动的某种组合。下面分别讨论各种类型齿轮振动产生的原因及其特征。

(1) 啮合过程中产生的振动。齿轮啮合过程中,由于轮齿发生弹性变形以及周节或齿形误差、均匀磨损等原因,使齿与齿之间发生撞击,撞击的频率就是它的啮合频率 f_m 。撞击振动频率不仅含有啮合频率 f_m ,还有 f_m 的高次谐波 $2f_m$ 、 $3f_m$ ……啮合频率为转速频率与齿轮齿数的乘积

$$f_m = f_1 \cdot z_1 = f_2 \cdot z_2 \quad (6-7)$$

式中: f_1 、 f_2 ——分别是主动齿轮轴和从动齿轮轴的转速频率,单位 Hz。

z_1 、 z_2 ——分别是主动齿轮和从动齿轮的齿数。

齿面的局部损伤而产生的激振,其相应的强迫振动频率等于损伤的齿数乘以轴的转动频率。另一方面齿轮的非均布缺陷、齿距周期性变化引起的载荷波动还会产生信号调制现象,即在响应的幅频特性曲线上可见啮合频率及其谐波两侧产生的一簇边频带。

(2) 转子不平衡或不对中产生的振动。齿轮、轴、轴承等元件由于装配不良、材料不均匀等原因会产生不平衡、不对中,使齿轮轴系统产生强迫振动。振动的频率等于轴的转动频率及其谐波。

(3) 齿轮的自由振动与自激振动。齿与齿之间撞击是一种瞬态激振,它将使齿轮产生自由衰减振动,振动频率就是齿轮的固有频率。另外,齿与齿之间的摩擦在一定条件下会诱发自激振动,自激振动与齿面加工质量及润滑条件有关,自激振动的频率接近齿轮的固有频率。

3) 齿轮故障振动频谱的特征

(1) 齿轮的啮合频率及其谐波。齿面均匀性磨损、齿轮径向间隙过大、不适当的齿轮游隙以及齿轮负荷过大等原因,将增加啮合频率和它的谐波成分幅值。如果在负荷不变情况

下,发生啮合频率和它的谐波成分增大,则意味着齿的磨损、挠曲和齿面误差严重。齿轮磨损的特征是,频谱上啮合频率及其谐波幅值都会上升,高阶谐波的幅值增加较多,如图6-12。

(2) 信号调制所产生的边频带。齿轮中多种故障在运行中往往表现为传动误差问题,由于转速频率 f 的影响,使得齿轮啮合频率振动产生信号调制,既有幅值调制又有频率调制。这两种调制在频谱中均表现为在啮合频率及其谐频的两侧各有一簇边频带,各边频带的间隔即是调制信号的频率。其中幅值调制是指载频的时域信号幅值受到调制信号的调制。下面简述边频带的产生原因。

图6-13表示两个信号的调制过程,图中(a)为载波信号的时域与频域图;(b)为调制信号的时域与频域图;(c)为调制后信号的时域与频域图。图中, f_m 为载波信号的频率(啮合频率); f_e 为调制信号的频率(转速频率);由图(c)可见,调制后的信号中,除了有啮合频率 f_m 之外,还增加了一对频率 $(f_m - f_e)$ 和 $(f_m + f_e)$ 它们以 f_m 为中心,以 f_e 为间隔。如果调制信号不是简谐波,而是多频率构成的周期信号,则以 f_m 为中心将构成一个边频带,如图6-14。

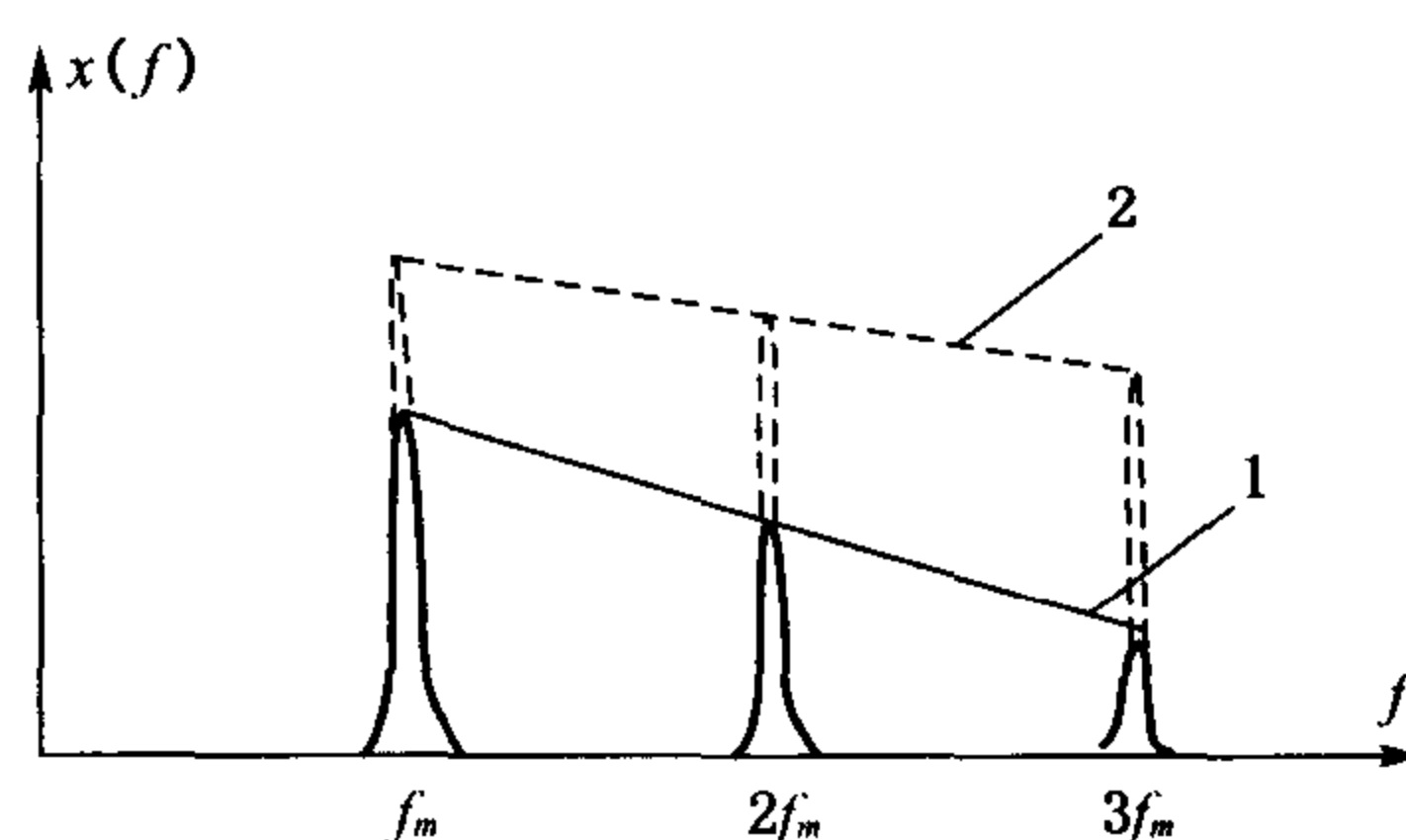
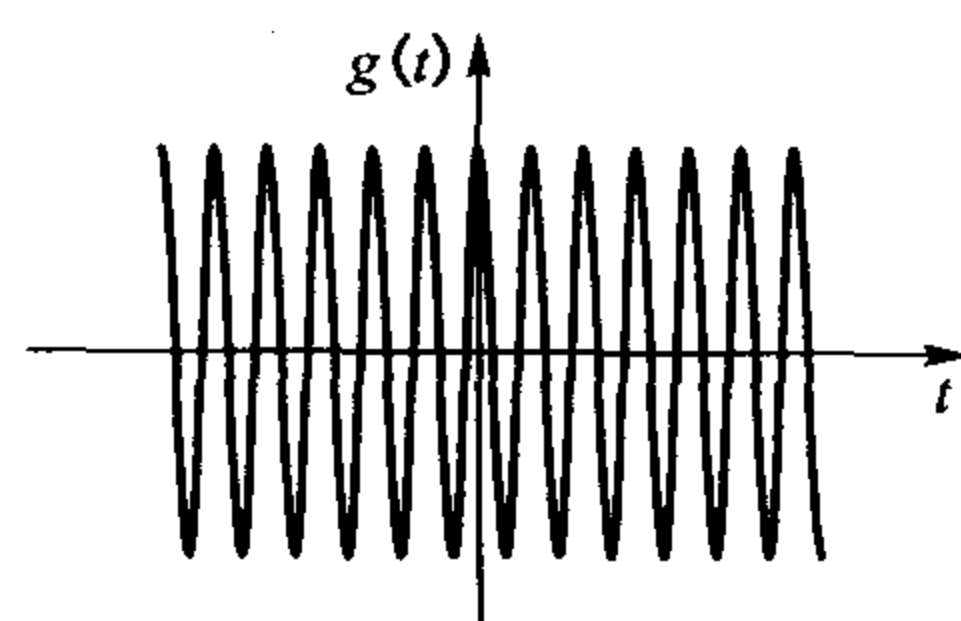
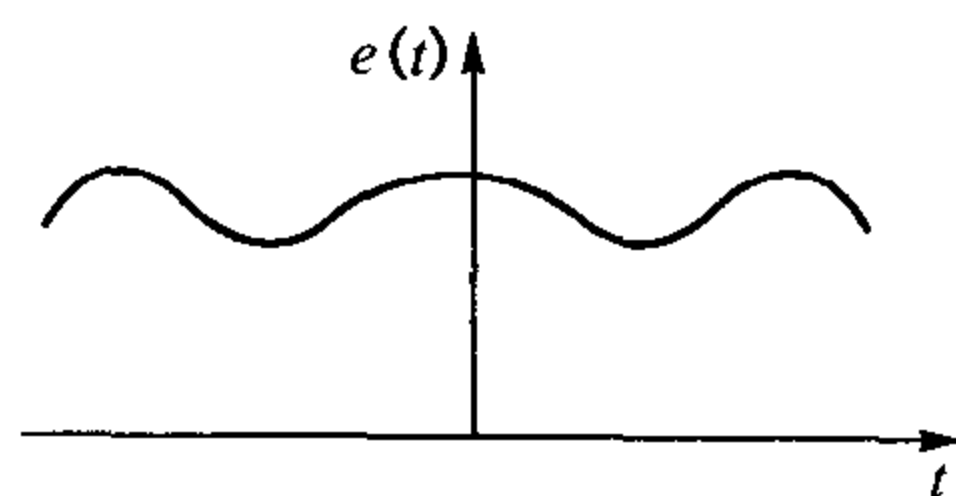
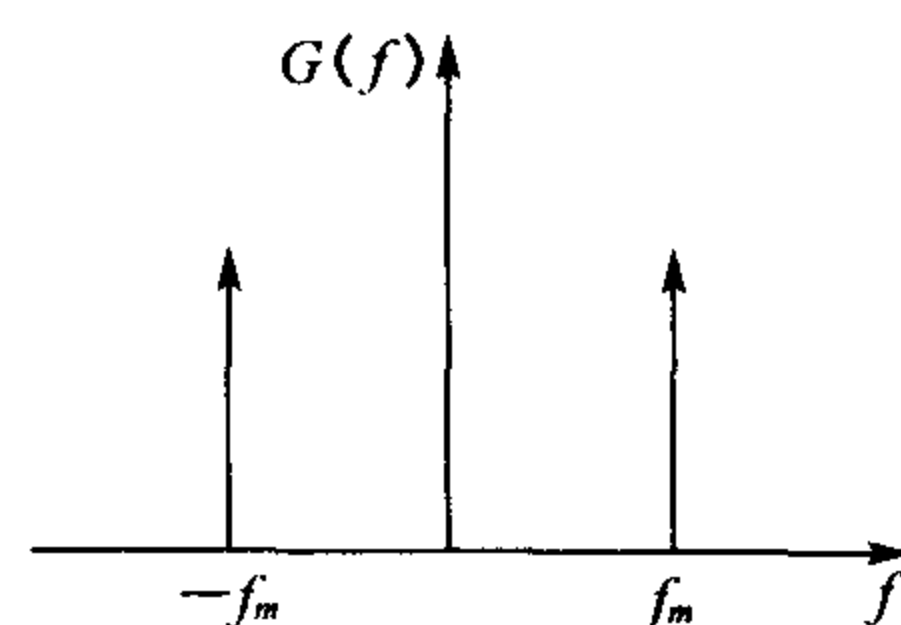


图6-12 齿轮磨损前后啮合频率及其谐波的振幅变化

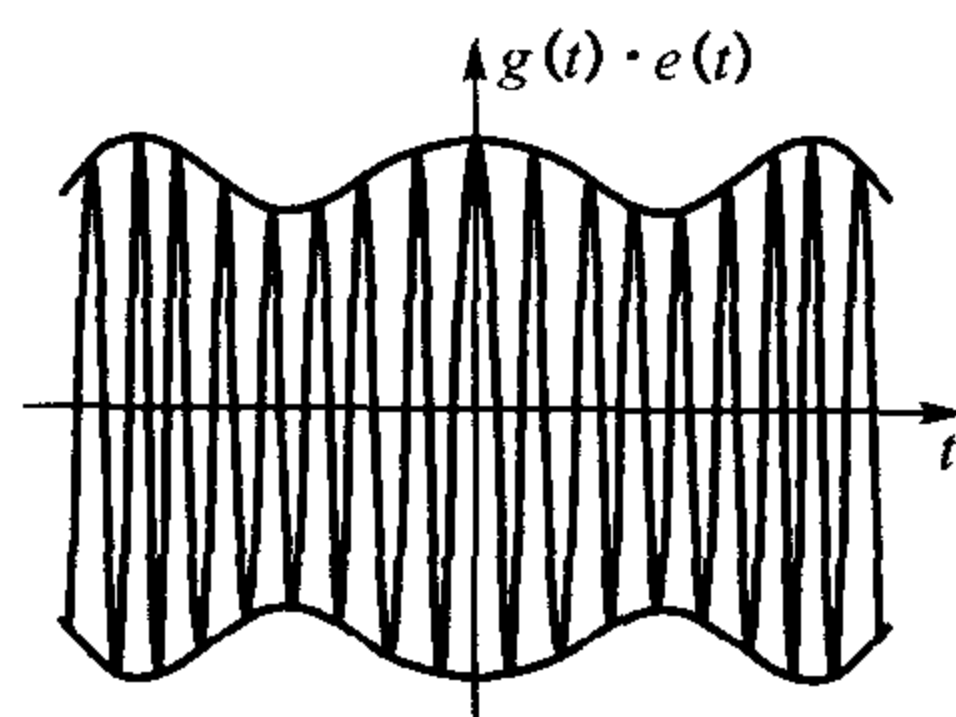
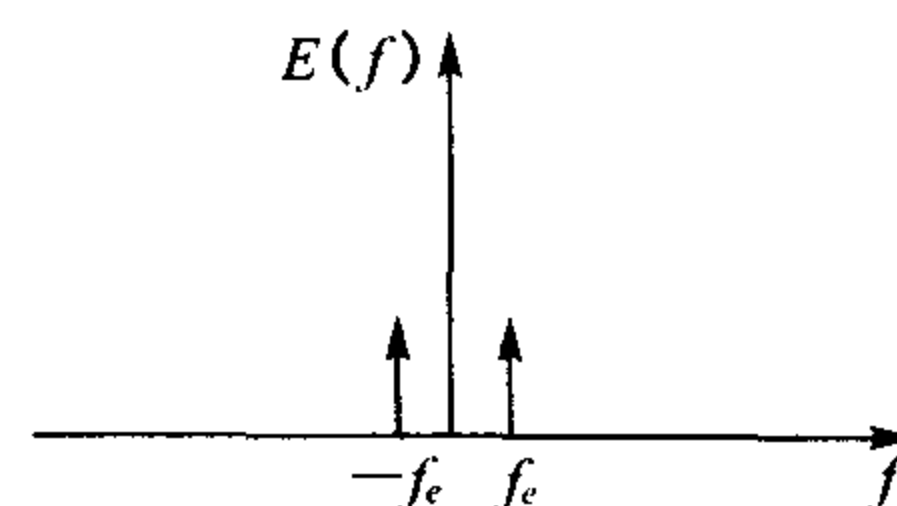
1. 磨损前 2. 磨损后



(a) 载波信号



(b) 调制信号



(c) 幅值调制后的信号

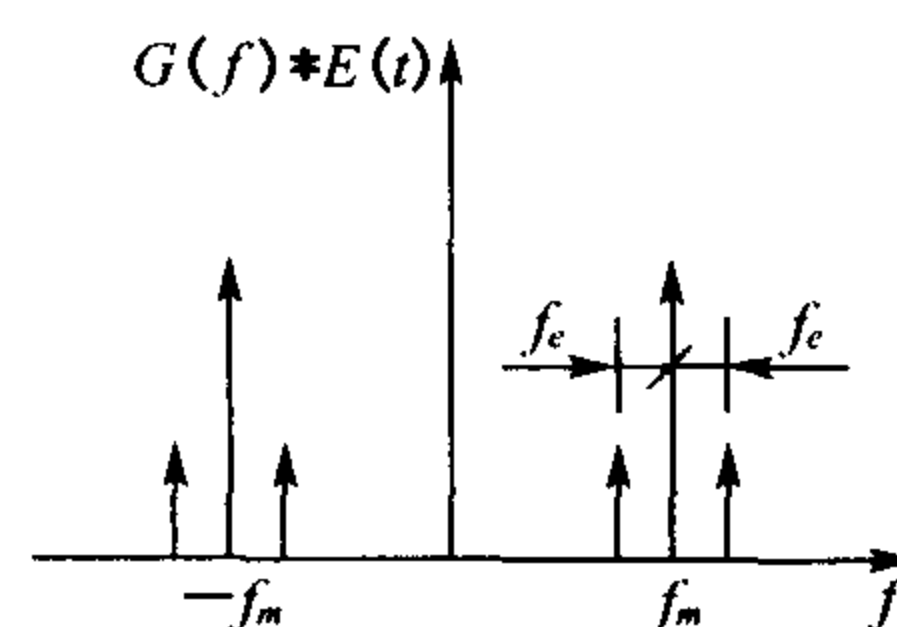


图6-13 幅值调制的时域与频域信号

幅值调制现象产生的一个原因是齿面上的载荷波动、齿距周期性变化、齿轮偏心；另一个原因是齿轮的局部缺陷，例如齿面剥落、齿的断裂或裂纹等。从而在啮合频率及其谐波的两侧形成边频带，边频带的间隔频率是齿轮转速频率，该间隔频率是与有缺陷的齿轮相应的。即

$$f_m \pm nf \quad (6-8)$$

式中： f_m ——啮合频率，在此也称载波频率； n 为 1、2、3 等正整数。

f ——旋转频率信号， f_1 或 f_2 ，与有缺陷的齿轮相应，在此也称调制频率，边频带的间隔频率。如果有缺陷的齿轮为主动齿轮，则调制频率为 f_1 。如果有缺陷的齿轮为从动齿轮，则调制频率为 f_2 。

频率调制是由于齿轮啮合中的转速波动引起，一般与齿轮加工中分度误差、齿轮轴偏心、齿面载荷波动等因素有关。

齿轮振动的边频带分布往往十分复杂，倘若齿轮箱中同时有几对齿轮啮合的话，几对齿轮振动的边频带重叠在一起，其频谱图就更加复杂了，在这种情况下很难直接从频谱图中识别出各特征频率。

(3) 低频脉冲。低频脉冲也称附加脉冲。齿轮的转子系统平衡不好、对中不好或松动，都会形成附加的低频脉冲，即转速频率及其谐波信号。它使齿轮载波信号不对称于零线。图 6-15(c) 中原始齿轮调幅信号是对称于零线的，低频脉冲(b)使其偏离零线，产生如图(a)的总信号。

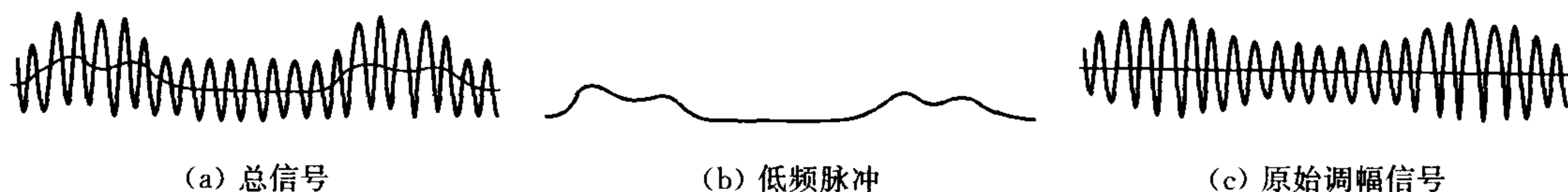


图 6-15 齿轮调幅信号中的低频脉冲

(4) 齿轮的自振频率振动。出现齿的断裂或裂缝时，每当齿轮进入啮合，就产生一个冲击信号，这种冲击可激起齿轮的一阶或高阶自振频率的自由衰减振动。

6.3.2 滚动轴承故障及其特征

1) 滚动轴承异常的基本形式

滚动轴承是旋转机械中的重要部件，也是机器中最易损坏的零件之一。

(1) 疲劳剥落。滚动轴承的滚道和滚动体在工作中承受交变载荷，工作一段时间后，在接触表面一定深度形成裂纹，然后逐渐发展，使表面形成剥落坑，最后发展成片状剥落。疲劳剥落是滚动轴承失效的主要原因。

(2) 磨损。滚道和滚动体之间相对运动以及异物的落入，使轴承工作表面产生磨损，而润滑不良，装配误差均会加剧磨损。磨损擦伤是滚动轴承失效的另一主要原因。

(3) 腐蚀。外界或空气中水分带入轴承，机器在腐蚀性介质工作因密封不严均会引起

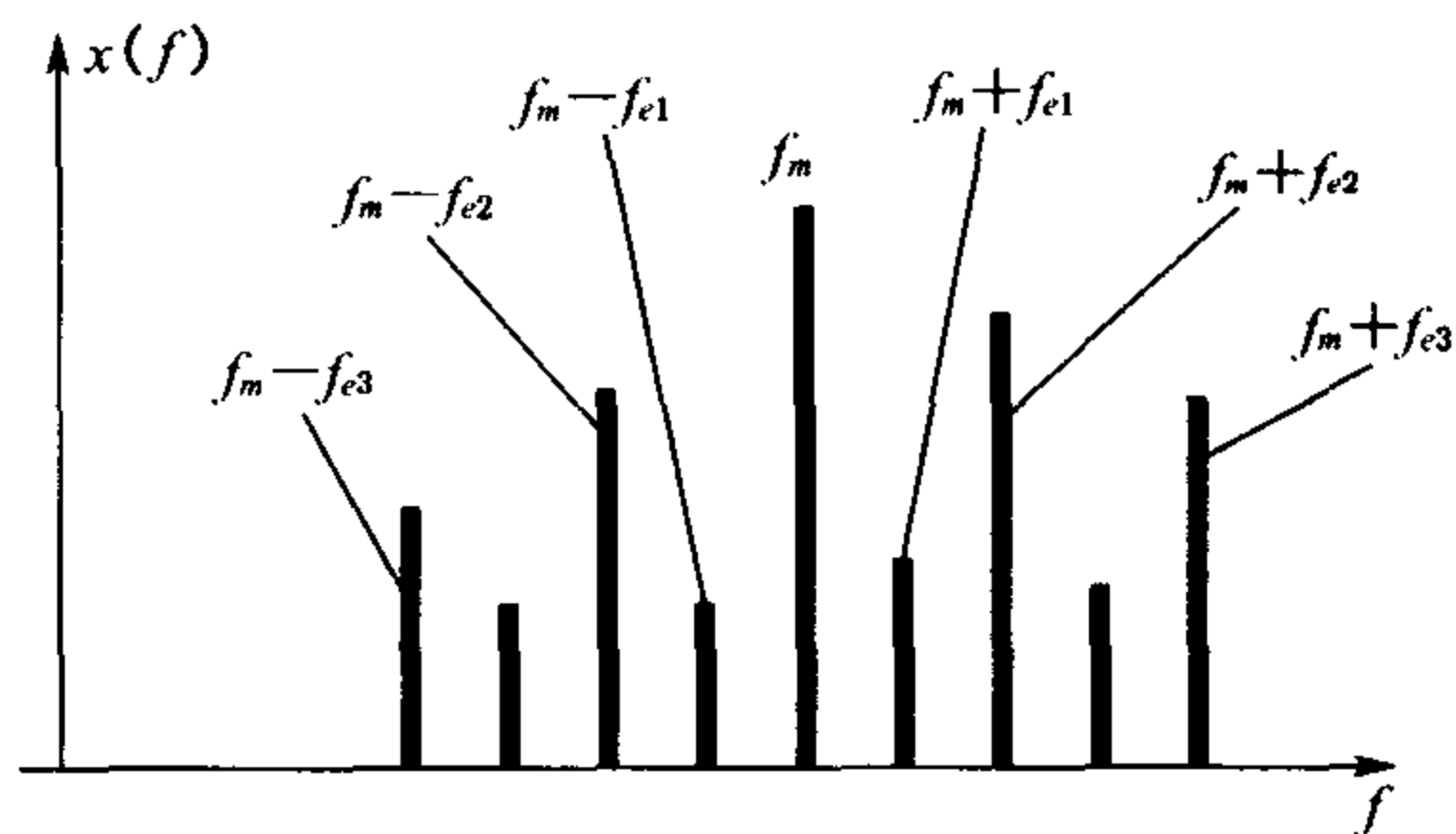


图 6-14 多种频率幅值调制频谱

表面化学腐蚀。轴承内部有较大电流通过会引起电蚀,形成电流凹坑。腐蚀也是滚动轴承产生剥落和磨损的原因。

(4) 断裂。当轴承载荷过大、金属材料有缺陷、热处理不当或轴承在轴上装配过盈量太大等原因均会引起轴承零件的破裂。

(5) 塑性变形。轴承受到过大的静载荷,使接触表面挤压应力过大,在滚道表面上形成凹坑。这是低速轴承的主要损坏形式。

2) 引起滚动轴承振动的原因

滚动轴承工作时的振动,除了由外界激振因素,如转子不平衡、不对中和结构共振等,引起之外,属于轴承本身原因所引起的振动主要有以下几种原因:

(1) 轴承工作表面缺陷引起的振动。滚动轴承工作表面包括外圈内滚道、内圈外滚道和滚动体表面。一般轴承的外圈固定,内圈转动。

滚动轴承可能由于润滑不良,载荷过大,轴承内落入异物,锈蚀等原因引起轴承工作表面的剥落、裂纹、压痕、腐蚀凹坑和胶合等离散型缺陷或局部损伤。当滚动体通过一个缺陷点时,就会产生一个冲击信号,轴承内产生的冲击能量可激起轴承零件以其固有频率振动。

由轴承局部缺陷所产生的冲击脉冲信号,其频率成分不仅包含有反应轴承故障特征的特征频率(即通过缺陷处的冲击频率),而且还包含有反映轴承元件自振频率的高频成分。

由于轴承的外圈固定,而内圈和滚动体转动。因此缺陷出现在不同的轴承零件上,所产生的振动信号是不同的。因为外圈是静止的,所以外圈滚道表面缺陷引起的振动信号不会出现信号调制现象。如图 6-16(a) 而内圈和滚动体是转动的,所以内圈滚道表面和滚动体表面缺陷引起的振动信号会产生信号调制现象。其调制频率为轴的转速频率或滚动体的公转频率,而载波频率为各自的特征频率,即通过缺陷处的冲击频率。内圈的冲击频率滚动体的冲击频率,如图 6-16(b)、(c) 所示。

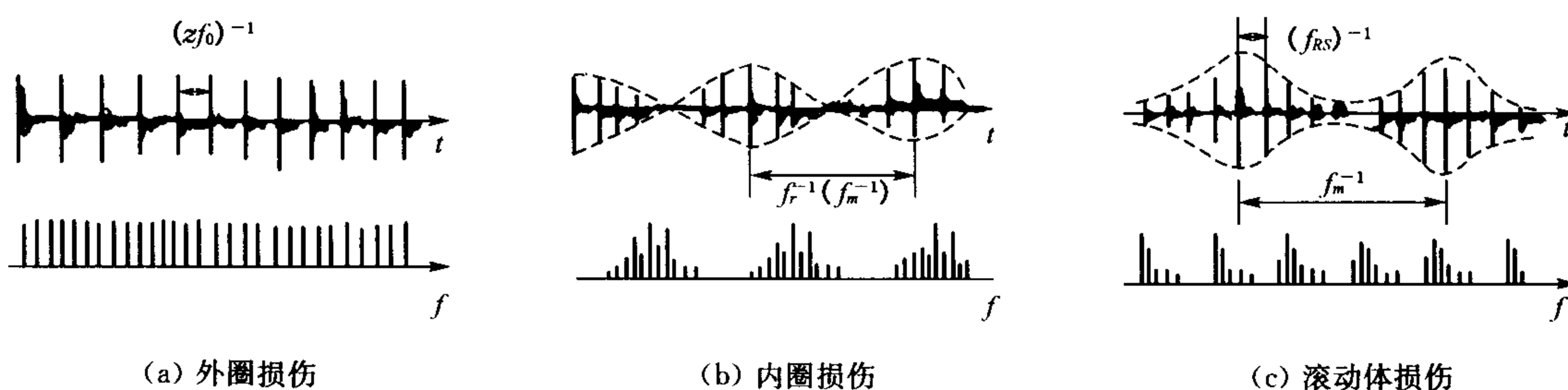


图 6-16 轴承元件损伤产生的振动信号

(2) 滚动体通过载荷方向产生的振动。轴承在外载荷作用下,各滚动体的受力大小依据其位置不同是不相同的:最下面的滚动体受力最大,最上面的滚动体受力最小。轴在旋转过程中,各滚动体的位置循环变化,每个滚动体通过载荷中心线时,就会发生一次力的变化,对轴颈或轴承座产生激振作用,这个激振频率就称为通过频率,通过频率可用下式表示

$$f_e = z \cdot f_0 \quad (6-9)$$

式中: f_e ——通过频率,单位 Hz。

f_0 ——保持架的转速频率,单位 Hz。

z ——轴承内的滚动体个数。

(3) 装配不正确。如果轴承在轴上装歪或者转轴发生了弯曲,轴在旋转时相当于转子的角度不对中现象,表现出以转速频率 f 为特征的振动频率。但在滚动轴承中,由于轴的弯曲使轴承单方向受力,因此又具有滚动体通过频率 f_e 的特征,两者合成为 $f_e \pm f$,成为这种故障振动的主要频率成分。

(4) 轴承内、外圈的加工波纹。滚动轴承内、外圈虽然是经过精加工,但是一些微小的加工波纹也会引起轴承的振动,振动频率与所处元件和波纹数有关。

(5) 润滑不良。滚动轴承润滑不良时,滚动体在旋转中由于不能形成良好的油膜而发生金属间的滑动摩擦,从而加速滚动体和滚道的磨损和疲劳剥落。

(6) 非线性振动。滚动轴承的滚动体和滚道的刚度很大,当润滑状态不良时,轴承容易出现非线性。它的振动频率有轴的转速频率 f 及其谐波 $2f, 3f, \dots$ 和分频 $\frac{1}{2}f, \frac{1}{3}f, \dots$ 。

3) 滚动轴承表面缺陷产生的振动频率

(1) 轴承工作表面缺陷的特征频率。假如滚动轴承的内圈滚道、外圈滚道或滚动体有一处缺陷(裂纹或剥落),则两元件在相接触时就会产生冲击,冲击的特征频率(也称间隔频率)可以根据轴承的转速、轴承零件的形状和尺寸,由轴承的运动关系得到。设外圈固定、内圈转动,不考虑轴向力,缺陷在不同位置时发生的冲击振动的特征频率如下:

内圈滚道缺陷的特征频率

$$f_i = \frac{n}{2 \times 60} (1 + \gamma) z \text{ (Hz)} \quad (6-10)$$

外圈滚道缺陷的特征频率

$$f_e = \frac{n}{2 \times 60} (1 - \gamma) z \text{ (Hz)} \quad (6-11)$$

滚动体表面缺陷的特征频率

$$f_b = \frac{n}{2 \times 60} (1 - \gamma^2) \gamma z \text{ (Hz)} \quad (6-12)$$

式中: n ——转轴的转速,单位 r/min 。

z ——滚动体数目。

$$\gamma = \frac{d}{D_m} \cos \alpha$$

d ——滚动体直径。

D_m ——滚动体中心圆直径。

α ——接触角。

轴承各元件几何关系见图 6-17。

(2) 滚动轴承的固有频率。① 内、外圈的固有频率。滚动轴承内圈和外圈的固有频率的公式是相同的,两者均为矩形截面圆环,其计算式为

$$f_{ny} = \frac{n(n^2 - 1)}{2\pi R^2 \sqrt{n^2 + 1}} \sqrt{\frac{EI}{M}} \text{ (Hz)} \quad (6-13)$$

式中: n ——变形波数(为 2、3 或 4)。

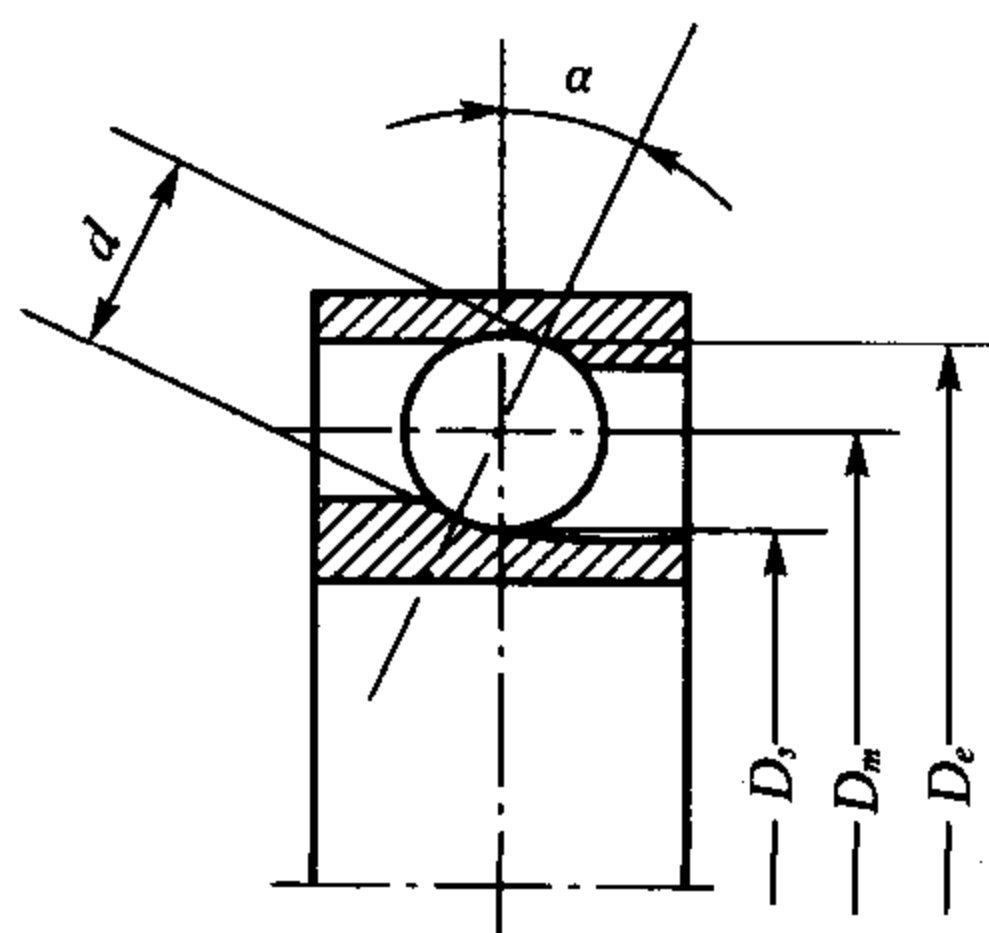


图 6-17 滚动轴承元件几何关系

R ——圆环中性轴的半径,单位 m 。

E ——圆环材料的弹性模量,单位 N/m^2 。

I ——圆环截面绕中性轴的惯性矩,单位 m^4 。

M ——圆环单位长度的质量,单位 N/m 。

② 滚动体(钢球)的固有频率

$$f_{nb} = \frac{0.424}{r} \sqrt{\frac{E}{2\rho}} \quad (\text{Hz}) \quad (6-14)$$

式中: r ——钢球的半径, m 。

ρ ——钢球材料的密度,单位 kg/m^3 。

(3) 滚动轴承振动的频谱特征。如图 6-18 所示,滚动轴承旋转时,由轴承缺陷引发的激振有 3 类:第一类是由于磨损、润滑不良或混入异物等产生的表面粗糙样损伤而引发的激振,轴承工作时,凹凸不平的接触面以宽频带的随机激振连续地激发轴承振动。第二类是由于剥落、裂纹等局部缺陷引发的冲击性激振,滚动体每次经过缺陷处,即产生冲击,激振力为尖峰形的脉冲波。第三类是滚道几何形状偏差所产生的激振,这一类激振基本上是正弦波形状。轴承外圈上测得的振动信号,应为各种激振所产生响应的叠加。

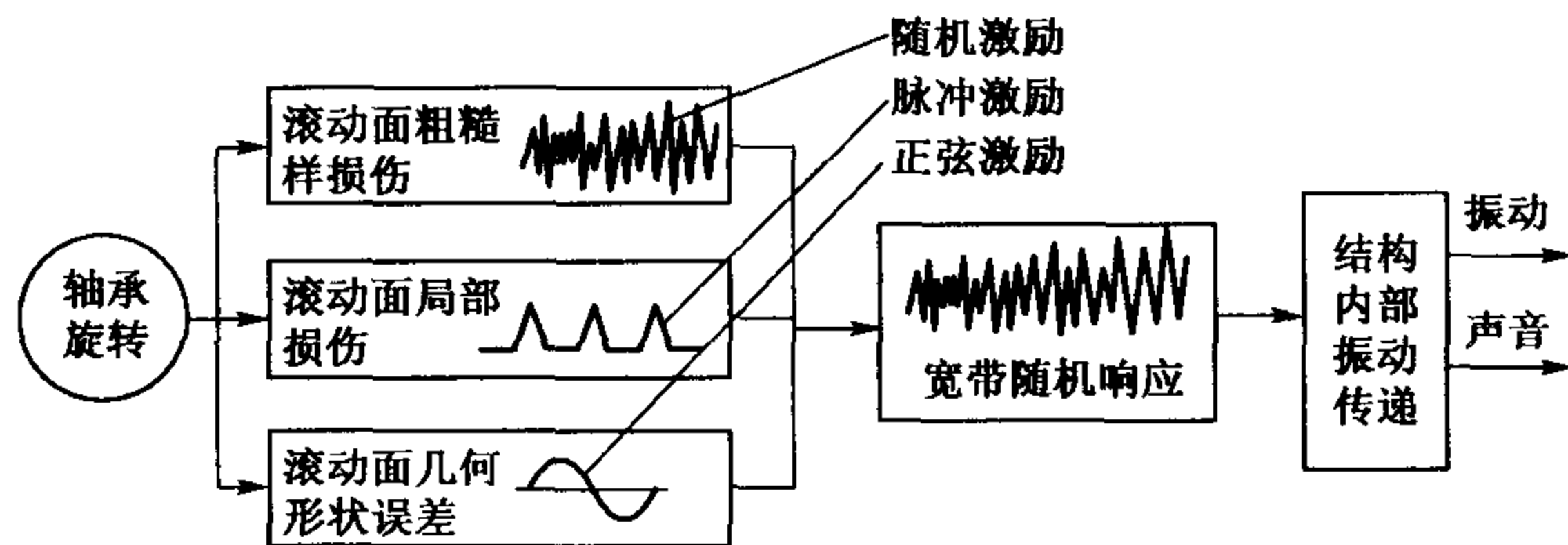


图 6-18 与滚道面有关的轴承振动

滚动轴承的振动是由几种振动合成的,其频谱具有宽频带特征,如图 6-19 所示。图中的响应频谱分布在 3 个频段内,第一频段为 $0 \sim 20 \text{ Hz}$,即低频段,主要是转子和轴承故障引发的激振频率的振动。第二频段为 $20 \sim 60 \text{ Hz}$,即高频段,轴承元件的固有频率大多在这个频段内。第三频段大于 60 Hz ,这样高的频段已属于声发射范围。滚动轴承的振动故障监测通常在第一频段和第二频段,特别是第二频段,因为第一频段即低频段的噪音很大。

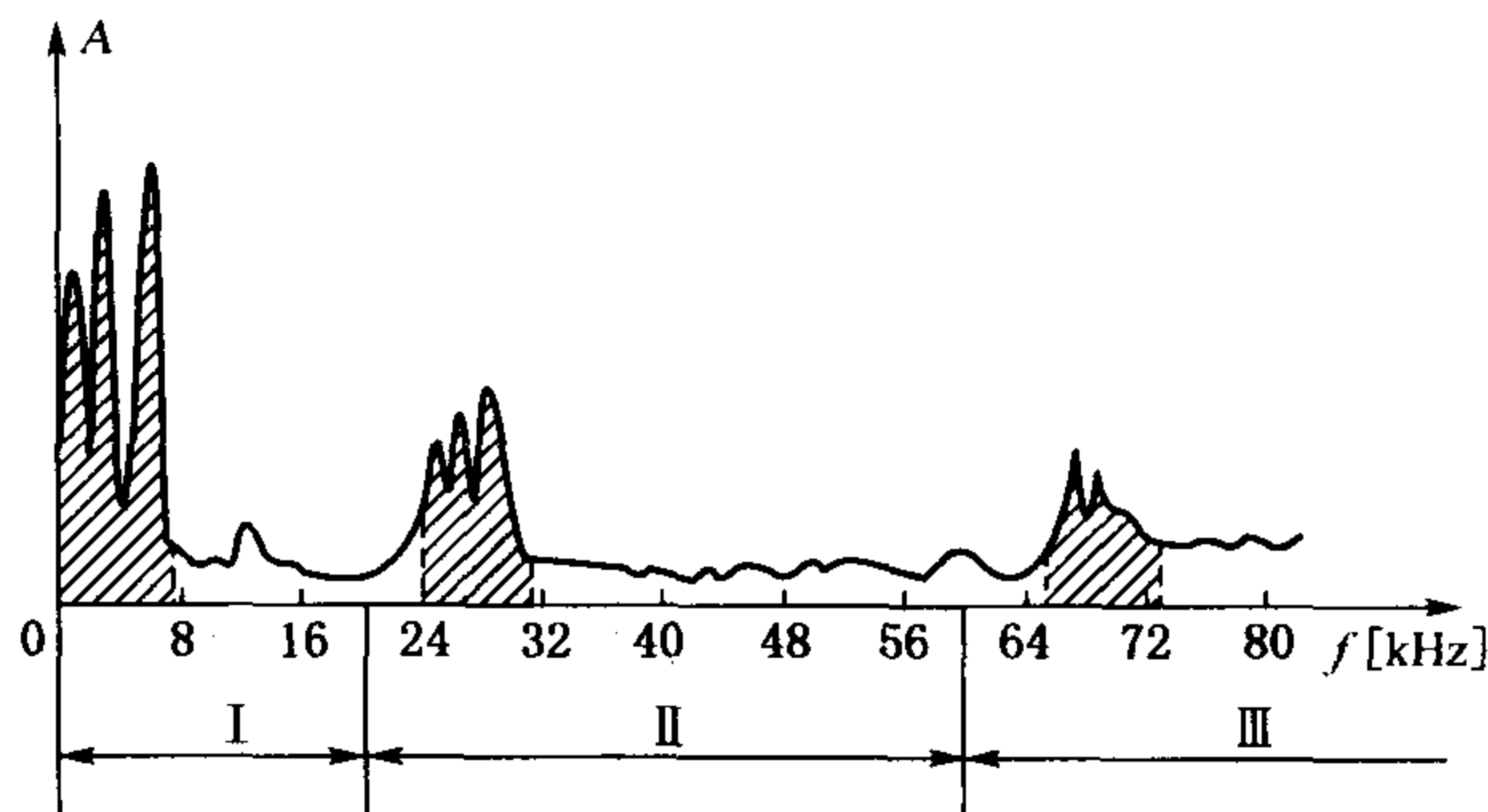


图 6-19 滚动轴承的振动频谱

(4) 滚动轴承振动的评定指标。滚动轴承振动的评定指标有 3 种:有效值、峰值和波峰因素。

有效值也称均方根值,它是对时间的平均,有效值大小反映了滚动轴承的点蚀或表面粗糙样损伤程度。

峰值是振动波形中的最大值,它的大小反映轴承由于表面剥落、裂纹等缺陷造成的冲击力的大小。图 6-20 所示为一个滚动轴承发生剥落时的振动加速度记录。由图可见,剥落期间,峰值比有效值有急剧增大。

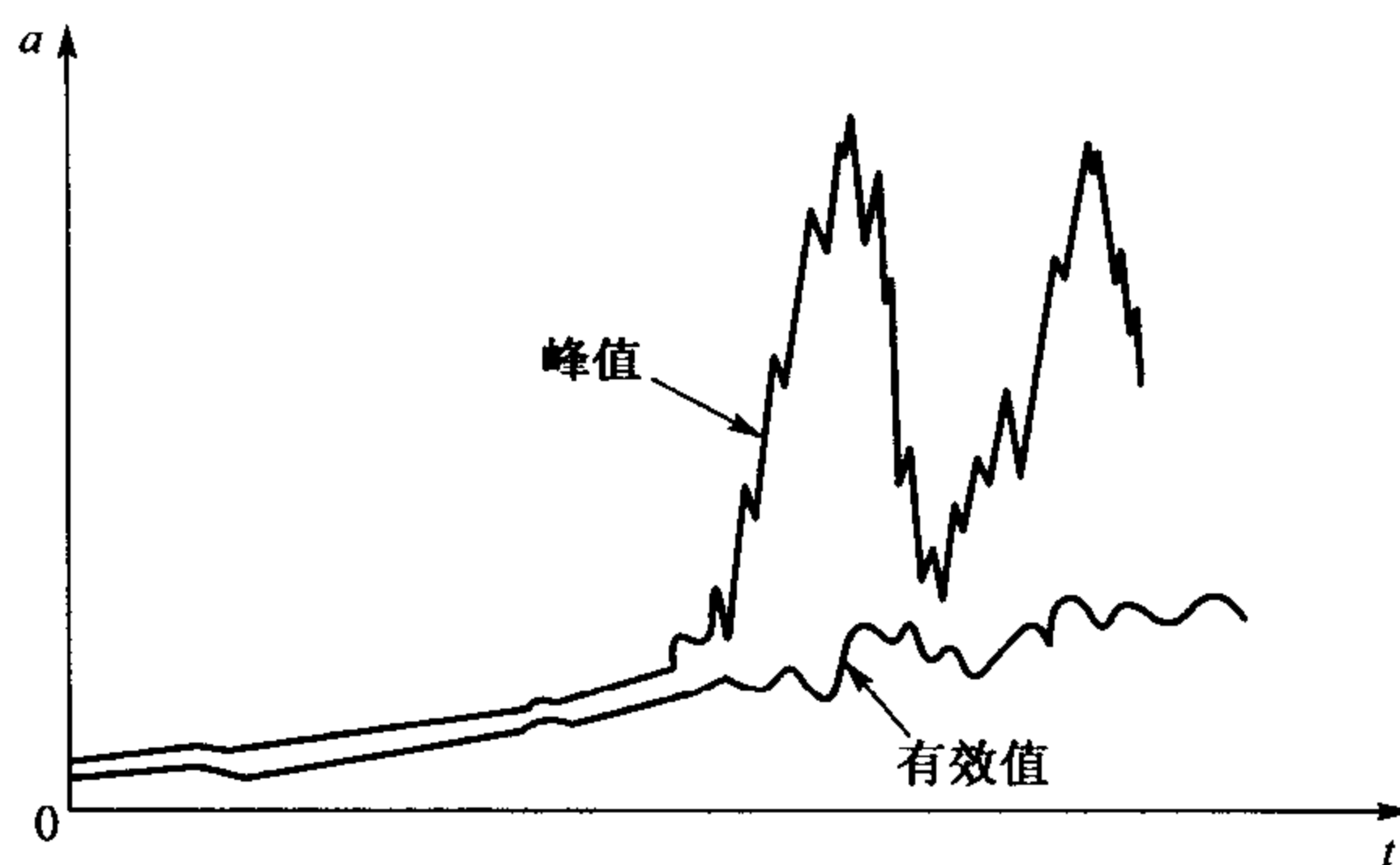


图 6-20 轴承剥落时的峰值与有效值

波峰因数定义为振动峰值与有效值的比值。一般正常轴承的振动波峰因数约为 5,当轴承发生剥落等缺陷时,波峰因数有时会达到 10。如果波峰因数小,则说明轴承没有明显伤痕,但有可能轴承磨损严重或润滑不良。

6.3.3 振动信号处理的一些特殊方法

在第 5 章和本章中已经介绍了一些常用的信号处理方法,除此之外,在机械故障诊断领域,为了提高信噪比(SNR),针对齿轮、滚动轴承这一类机械零部件的振动信号处理,还发展了其他一些方法。

1) 细化谱(ZOOM—FFT)

细化谱是对信号频谱中某一频段进行局部放大,即所谓“局部频率扩展”方法,用来增加频谱中某部分频段上的分辨能力。

通常的标准频谱,在谱图上的频率是从零赫兹到最高分析频率。频率的分辨率是由谱线条数和最高分析频率决定的。如果要提高频率分辨率,正常情况下有两个途径:增加采样点数或降低最高分析频率。前者增加 FFT 的运算时间,后者缩小分析范围,这都给谱分析带来一定问题。而细化谱分析是只对某部分频段沿轴进行放大,这样可得到局部很高的图像分辨率,如果把放大的中心对准感兴趣频段的中心频率 f_m 上,则经过频率移位和重新采样等步骤,就可以得到如图 6-21 所示的细化谱。

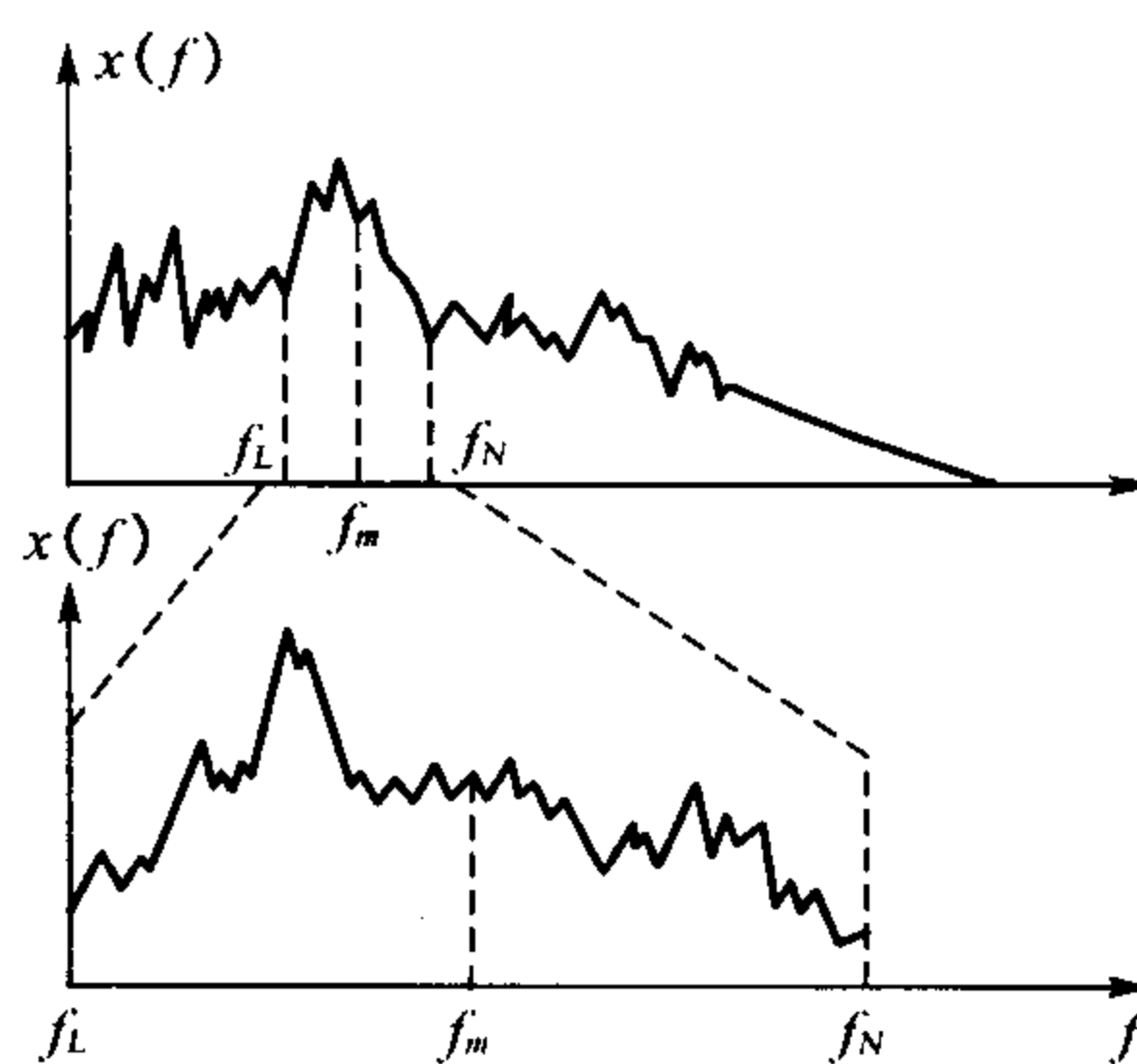


图 6-21 细化谱

在齿轮、滚动轴承等零部件故障信号中,经过调制后得到的振动信号,往往是以啮合频率或通过频率为中心,两边分布着以故障特征频率为间隔的边频带,利用边频带进行故障分析很有意义,但是在一般频谱图上,由于调制频率的间隔相对很小,频谱的分辨率低,往往找不出这些间隔频率。为此,可以采用细化谱分析方法,经过细化处理后的频谱,在感兴趣的频段内具有极高的分辨率,然后观察细化后的边频带结构,寻找故障的特征信息。

2) 倒频谱(Cepstrum)

当频谱图很复杂时,为了获取频谱图的特征信息,可将此频谱图作为时间历程信号,再作一次FFT,这就是倒频谱的概念。

倒频谱 $C_p(\tau)$ 定义是,功率谱对数值的傅立叶逆变换,其表示式为

$$C_p(\tau) = \{F^{-1}[\log G(f)]\}^2 \quad (6-15)$$

在工程上常取其平方根值 $C_a(\tau)$

$$C_a(\tau) = F^{-1}[\log G(f)] \quad (6-16)$$

式中: $G(f)$ ——时间信号的功率谱。

τ ——倒频谱的时间变量,称为倒频率,一般以毫秒(ms)计。

倒频谱分析法在滚动轴承和齿轮箱故障诊断的应用中具有特殊的优越性,特别是用在边频带的分析上。因为这些振动信号含有多种周期信号成分,而且常常受到多个调制源的联合作用,形成非对称的边带结构,功率谱中包含了很多大小和周期不相同的频率结构。因此应用细化谱搜寻边频受到一定限制。如果将这个复杂的频谱看作为一个时间历程信号,该功率谱的幅值用对数刻度表示,则谱峰的平均包络线接近为一个周期波,对这种包含了边带成分而具有周期性频谱结构的功率谱图再做一次谱分析(即进行傅立叶逆变换),就被转换到一个新域中去,在这个新域里,周期性的频谱结构在倒频谱上很清楚地呈现出来,这就是倒频谱分析方法。可以说,倒频谱是对频谱图上周期性结构成分的能量作了又一次集中,在功率的对数转换时给低幅值分量有较高的加权,而对高幅值分量以较低的加权,结果是突出了小信号周期。因此倒频谱可有效的提取和识别因调制而引起的功率谱中的周期成分,从而诊断出调制源,这是倒频谱分析的第一个优点。

倒频谱分析的第二个优点,是受传输途径的影响很小。因此倒频谱可以将输入信号与传递途径区别开来。测量机器振动时传感器的安装位置不同,传递信号的途径不同,形成了不同的传递函数,这些传递函数反映在输出谱上得到的结果是不相同的,有的频谱成分幅值可能相差十分悬殊,这就对诊断工作带来困难,可能抓不到或误抓了一些特征信息。经过倒频谱处理后,传输途径的影响基本消除,这就给机器的故障诊断提供了十分有利的条件。

图6-22所示为正常和异常状态下一卡车变速箱一档齿轮啮合时的功率谱和倒频谱。该变速箱一档输出轴的回转频率为5.4 Hz,二档输出轴的回转频率为10.4 Hz。由图可见,正常状态的功率谱无周期,而异常状态的功率谱出现明显的“周期”,即大量间距约为10 Hz的边频,起初怀疑调制源是该输出轴的二次谐波(10.8 Hz)。但在倒频谱中可以清楚看到95.9 ms的倒频谱,其所对应的频率是10.4 Hz,说明调制频率为二档齿轮轴的回转频率,由此排除了二次谐波,精确地判定空转的二档齿轮是调制源。该例说明倒频谱能精确地辨识频谱中的周期特性。

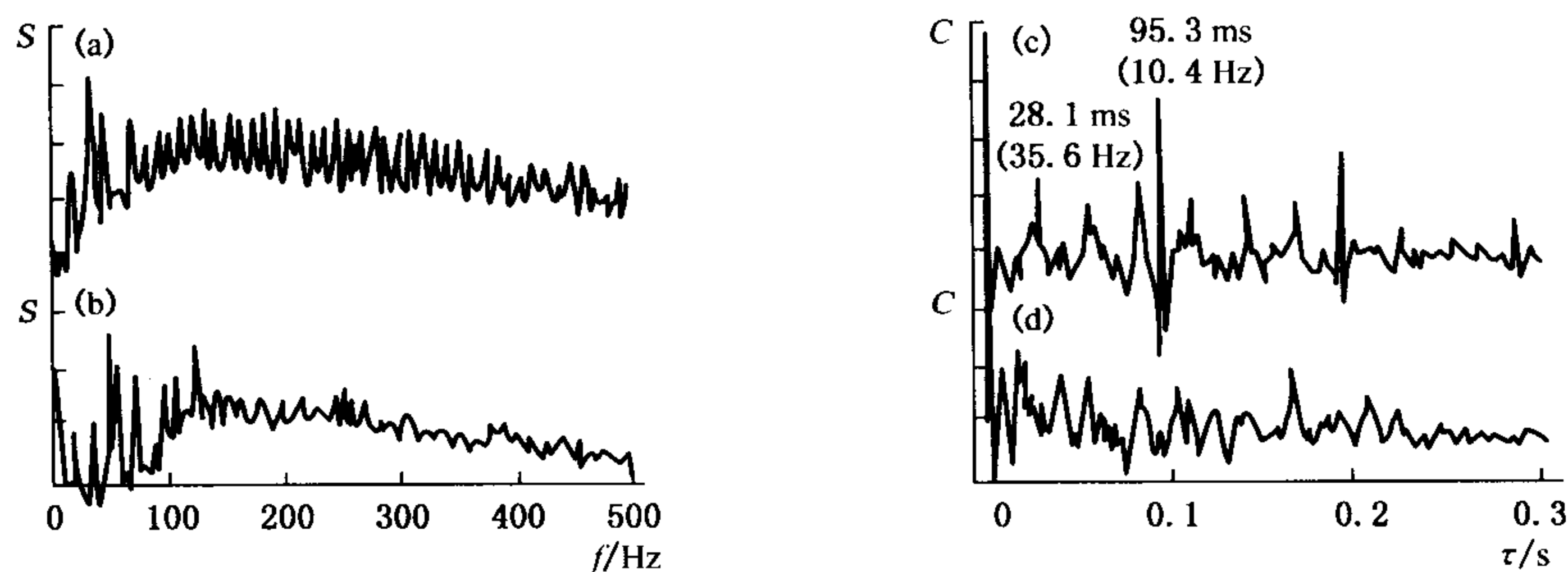


图 6-22 卡车齿轮箱正常与异常时的功率谱和倒频谱

(a) 异常时的功率谱 (b) 正常时的功率谱 (c) 异常时的倒频谱 (d) 正常时的倒频谱

3) 时域同步平均法

时域同步平均技术作为信号处理方法,其目的在于保留和故障有关的周期成分,去除其他非周期成分和噪声的干扰,从而大大提高信号信噪比,时域同步平均的原理是按转速脉冲周期间隔截取信号,然后进行分段叠加处理,以消除随机信号和其他非周期信号。

时域同步平均法的原理及具体做法如图 6-23 所示。它要求采集两路信号,一路为原输入信号 $x(t)$,另一路是用作分段的(转速)参考脉冲信号 e ,图中 T 为旋转一转的时间间隔周期,经过时域同步平均处理,保留了转速成分以及它的各阶谐波成分,而把其他的振动信号及噪声成分都一概除去。如果想要得到齿轮箱中一对啮合齿轮的振动信号,则只需使参考脉冲的频率等于其齿轮轴的转速即可。

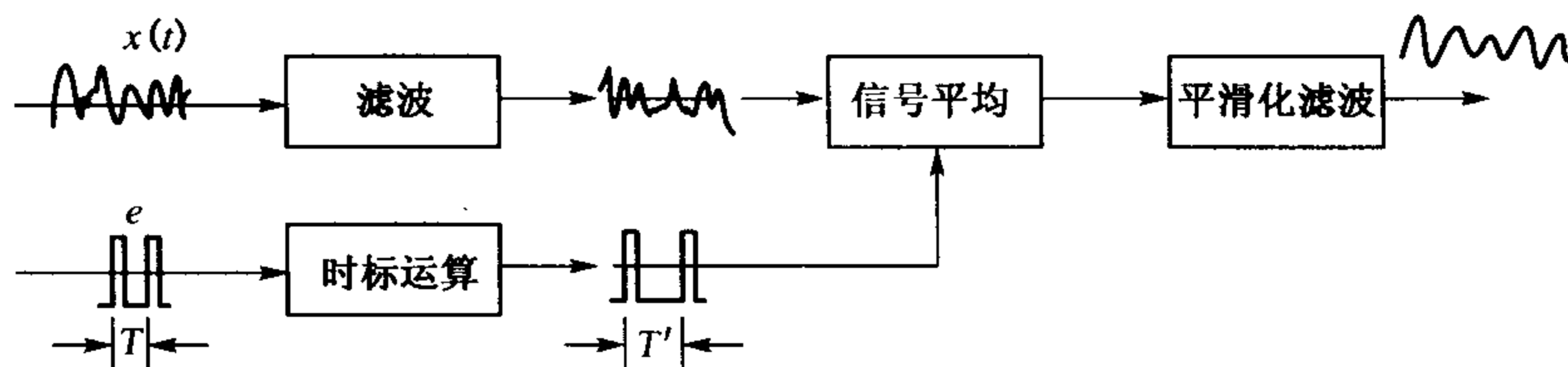
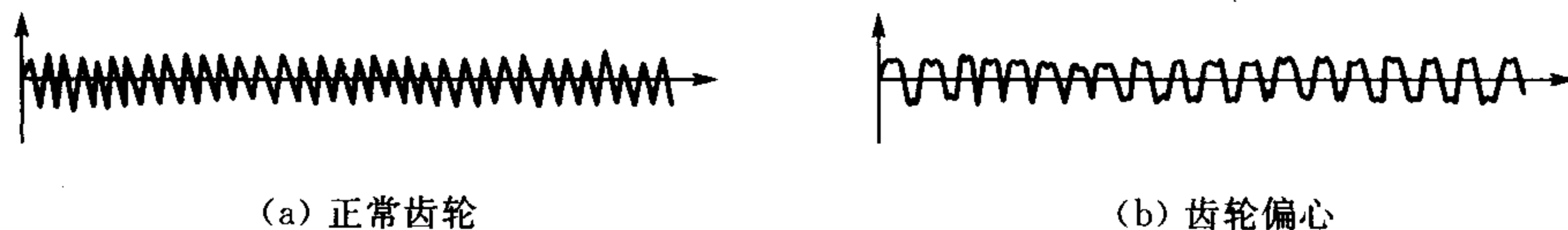


图 6-23 时域同步平均法原理框图

时域平均处理后的信号包含着机器故障的具体信息,图 6-24 表示齿轮在几种状态下的时域平均信号,图 6-24(a)为正常齿轮的时域平均信号,波形是均匀一致、光滑的,主要由啮合频率组成,没有明显的高次谐波。图 6-24(b)为齿轮偏心情形,啮合频率为转速的谱波频率所调制,形成调幅波形。图 6-24(c)为齿面严重磨损情形,波形中波峰与波谷均呈不光滑形状,啮合频率出现较大的高次谐波成分。图 6-24(d)为齿面局部剥落或断齿时的信号,在齿轮的旋转一周中,出现某一波形的突跳现象。由此可见,经过时域同步平均处理后的波形,由于消除了非周期性噪声的影响,无论在时域上或频域上均有利于分析齿轮的故障状态。



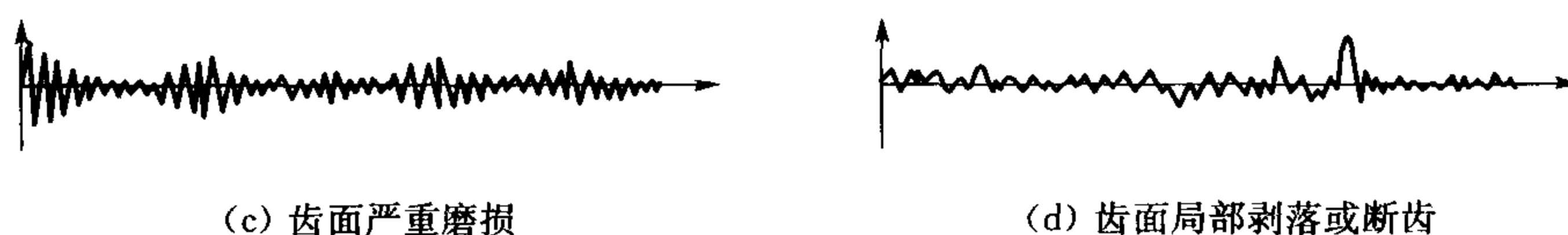


图 6-24 时域同步平均法识别齿轮缺陷

4) 自适应消噪声技术(ANC)

在滚动轴承、齿轮传动等机械系统中,故障信号往往混有很大的背景噪声,这种背景噪声把真正有用的信号淹没了。为了提高故障信号的信噪比,除了用时域平均法之外,还可采用自适应噪声消除技术,这种技术是利用两个传感器,分别拾取两个信号作为系统输入,其中一个传感器作为主输入,另一个为参考输入。主输入中包含信号 S 及噪声 n_0 , 即 $S + n_0$ 。而参考输入中包含有噪声及微弱的有效信号 n 适当选择传感器的位置,即可保证做到这一点。在图 6-25 中参考输入噪声和微弱的有效信号 n 进入自适应滤波器后的输出信号为 y 。经过加法器和主输入 $S + n_0$ 相减,得到系统的输出为 $C = S + n_0 - y$, 如果 $n_0 = y$, 则 ANC 系统的输出就是有用信号 S 。当 n_0 与 y 相近时,统计输出将是 S 和 $n_0 - y$ (为残余干扰量)之和,为了使残余干扰量达到最小,采用系统输出反馈到自适应滤波器的方法,应用最小二乘法原理,随时调节滤波器中的加权值,使系统的总输出功率为最小,噪声基本上被消除。

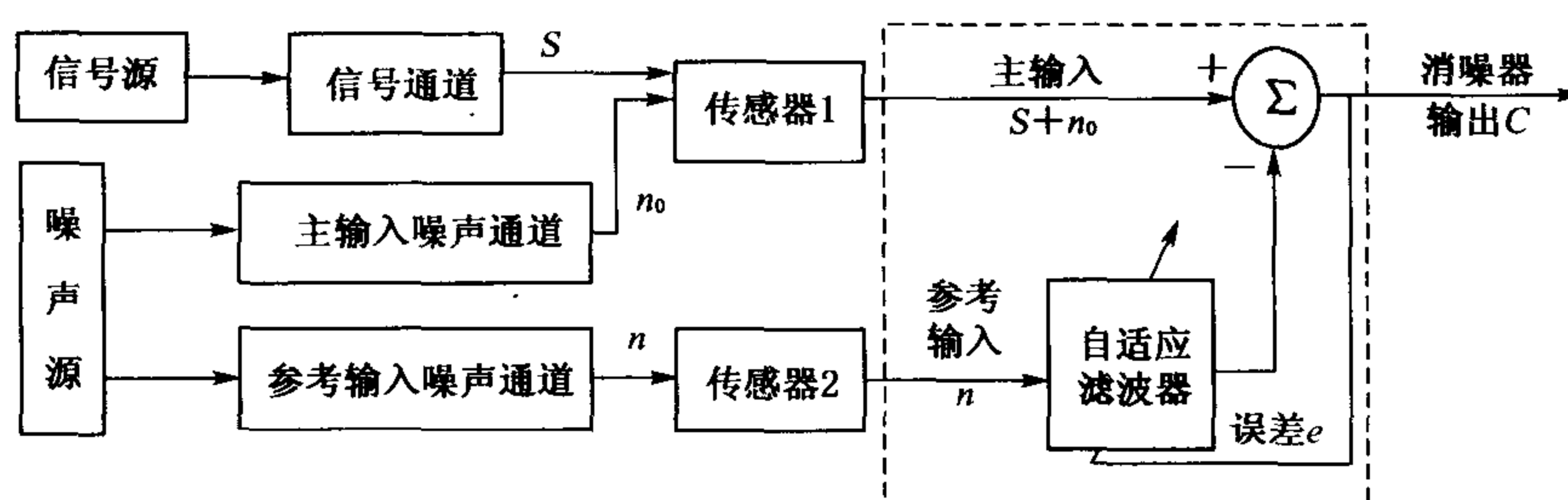


图 6-25 ANC 技术原理框图

5) 共振解调技术(IFD)

共振解调技术也称为包络检波频谱分析法,用于提取淹没在强烈背景噪声中的周期性冲击脉冲信号。这一技术在滚动轴承故障诊断中被广泛采用。

共振解调技术的原理:当机器发生故障出现周期为 T_0 的冲击脉冲时,如图 6-26,根据傅立叶级数原理,就会产生以 f_0 ($f_0 = \frac{1}{T_0}$) 为基频的一系列谐波分量,若其中某阶高次谐波与轴承等元件的结构固有频率 f_n 相吻合 (f_n 频率很高,一般在 20 kHz 以上),则将激发起元件的结构固有频率 f_n 的高频自由衰减振动。而机器工作时的其他振动频率都远低于元件的结构固有频率 f_n ,对引起该频率振动的影响极小,故实际上便消除了其他振动信号的干扰。该高频自由衰减振动信号经解调(解调的含义是包络检波和低通滤波)后,便得到了一个与原周期性脉冲波相对应、并被放大的信号。据此可确定原冲击的周期和幅值。

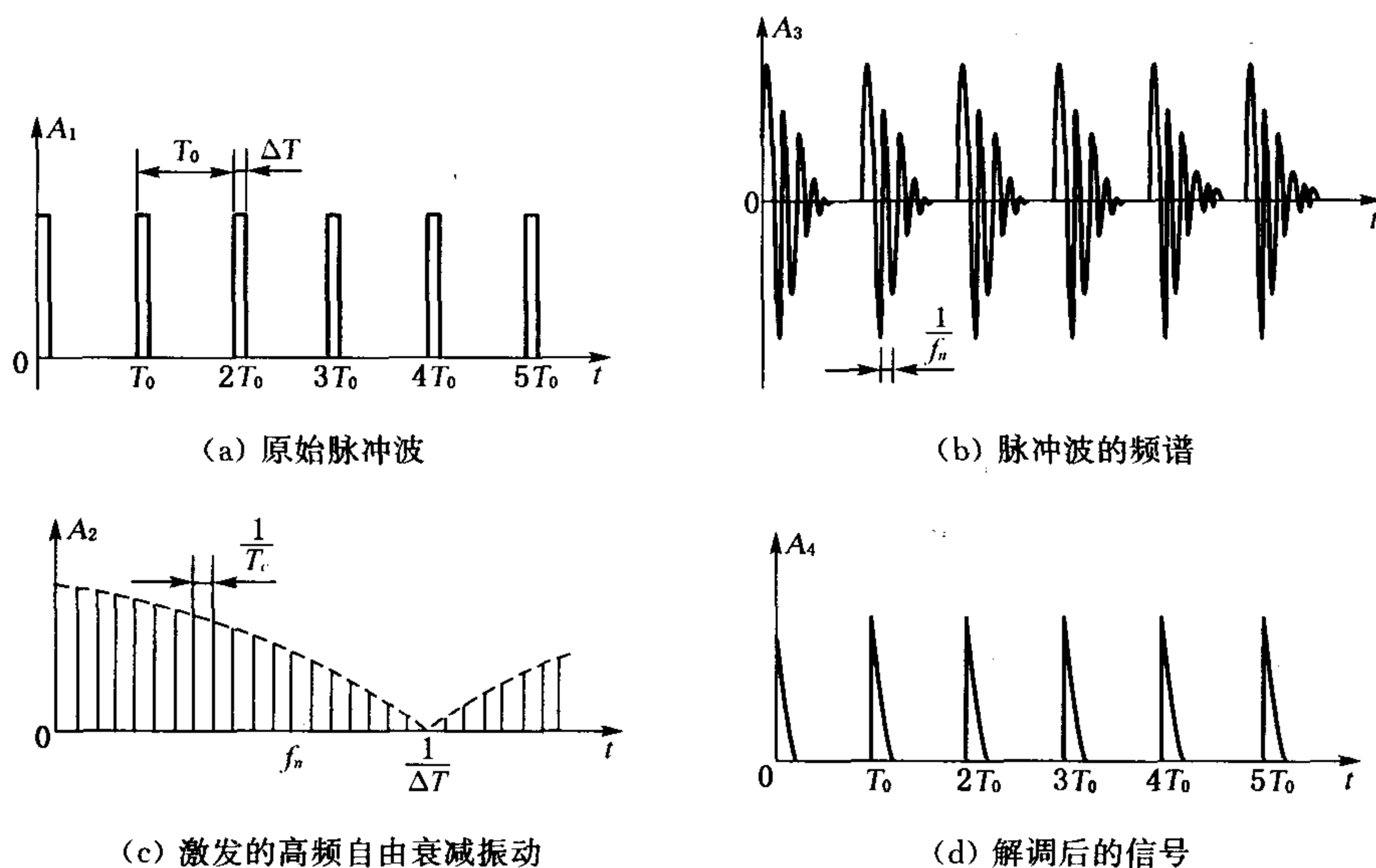


图 6-26 共振解调法原理

图 6-27 为共振解调法与低频信号接受法对一 204 型轴承测试分析结果的比较。图 6-27(a) 为低频信号接受法得到的频谱, 图中峰值过多, 较难寻找出故障的特征频谱。图(b) 为共振解调后的频谱, 清楚地显示了故障的特征频率, 其中 91.25 Hz 是外圈的间隔频率, 145 Hz 是内圈的间隔频率, 290 Hz 和 436 Hz 分别是 145 Hz 的二次和三次谐波。实际该轴承内外圈滚道上各有一处疲劳剥落。

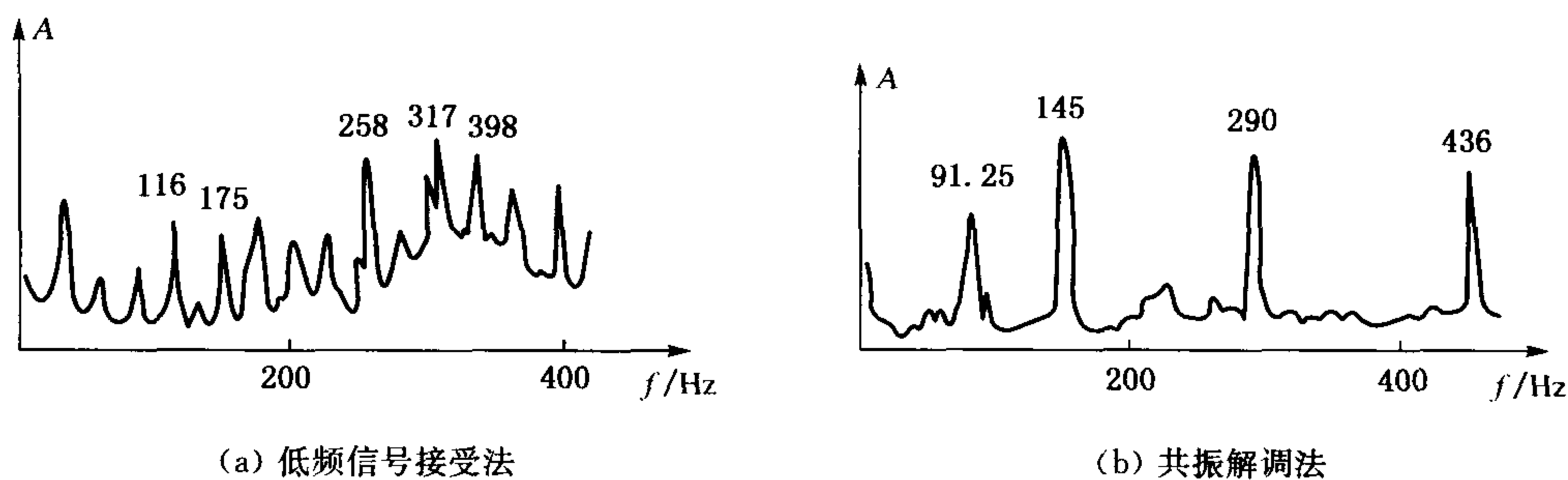


图 6-27 共振解调法与低频信号接受法的比较

共振解调法是目前最有效地诊断滚动轴承的方法之一。

习题与思考题

- 6.1 指出机械故障诊断的主要环节和主要技术方法。
- 6.2 简要说明波德图和三坐标图这两种图形在故障诊断技术上的作用。
- 6.3 传递函数在机械故障诊断中有什么作用?
- 6.4 目前最常使用的旋转机械的振动评定方法是什么? 评定参数是什么?
- 6.5 转子不平衡故障的频率特征是什么? 机壳变形、皮带轮偏心和基础共振等故障与

单纯的不平衡故障的频率特征有什么区别? 怎样鉴别这两类故障?

6.6 转子联轴节之间的不对中的基本类型有哪两类? 它们各自的频率特征是什么?

6.7 请说出滑动轴承油膜震荡的机理、特征和防治措施。

6.8 齿轮的均匀性磨损等故障, 将增加哪些频率的幅值? 不均匀的分布故障和局部性故障会产生什么现象?

6.9 滚动轴承工作表面缺陷会产生哪些频率的振动? 哪些零件缺陷会产生信号调制现象? 其载波频率和调制频率各是什么?

主要参考文献

- [1] 刘方抗. 机械振动学. 北京: 航空工业出版社, 1992
- [2] 闻邦椿, 刘树英, 张纯宇. 机械振动学. 北京: 冶金工业出版社, 2000
- [3] 黄永强, 陈树勋. 机械振动理论. 北京: 机械工业出版社, 1996
- [4] 张子明, 杜成斌, 江泉. 结构动力学. 南京: 河海大学出版社, 2001
- [5] 李晓雷, 俞德孚, 孙逢春. 机械振动基础. 北京: 北京理工大学出版社, 1996
- [6] 沈庆根. 化工机器故障诊断技术. 杭州: 浙江大学出版社, 1994
- [7] 李国华, 张永忠. 机械故障诊断. 北京: 化学工业出版社, 1999
- [8] 王江萍. 机械设备故障诊断技术及应用. 西安: 西北工业大学出版社, 2001
- [9] 闻邦椿, 刘凤翹. 振动机械的理论及应用. 北京: 机械工业出版社, 1980
- [10] 汪风泉, 郑万泔. 试验振动分析. 南京: 江苏科学技术出版社, 1988
- [11] 陈予恕. 非线性振动. 北京: 高等教育出版社, 2002
- [12] [美] F S 谢, I E 摩尔, R T 亨克尔著; 沈文钧, 张景绘译. 机械振动——理论及应用. 北京: 国防工业出版社, 1984

[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]

书名 = 机械振动理论与应用

作者 = 顾海明

页数 = 1 6 8

S S 号 = 1 1 8 2 2 3 3 1

出版日期 = 2 0 0 7 . 2

前言
目录

第 1 章 机械振动的基本概念

- 1 . 1 机械振动的研究内容及研究方法
 - 1 . 1 . 1 机械振动的研究内容
 - 1 . 1 . 2 机械振动的研究方法
- 1 . 2 机械振动的定义和表示方法
 - 1 . 2 . 1 简谐振动
 - 1 . 2 . 2 简谐振动的矢量表示法
 - 1 . 2 . 3 简谐振动的复数表示法
- 1 . 3 构成机械振动系统的基本要素
 - 1 . 3 . 1 质量
 - 1 . 3 . 2 弹性
 - 1 . 3 . 3 阻尼
- 1 . 4 谐波分析

习题与思考题

第 2 章 单自由度系统的振动

- 2 . 1 单自由度系统的自由振动
 - 2 . 1 . 1 无阻尼单自由度系统的自由振动
 - 2 . 1 . 2 固有频率、等效质量和等效刚度
 - 2 . 1 . 3 具有黏性阻尼单自由度系统的自由振动
- 2 . 2 单自由度系统的强迫振动
 - 2 . 2 . 1 简谐激振力作用下系统的响应
 - 2 . 2 . 2 转子偏心质量激振下系统的响应
 - 2 . 2 . 3 支承简谐运动激振下系统的响应
 - 2 . 2 . 4 机械阻抗的基本概念
 - 2 . 2 . 5 简谐力做的功
- 2 . 3 非简谐激振产生的强迫振动
 - 2 . 3 . 1 非简谐周期激振的响应
 - 2 . 3 . 2 任意激振的响应
 - 2 . 3 . 3 频谱分析
- 2 . 4 单自由度系统振动理论的应用
 - 2 . 4 . 1 振动的衰减与隔离措施
 - 2 . 4 . 2 转轴的临界转速
 - 2 . 4 . 3 转子的平衡
 - 2 . 4 . 4 振动机械的应用
- 2 . 5 单自由度非线性系统振动简介
 - 2 . 5 . 1 非线性振动的基本特性
 - 2 . 5 . 2 非线性振动的分析方法

习题与思考题

第 3 章 二自由度系统振动的理论与应用

- 3 . 1 二自由度系统振动的运动方程
- 3 . 2 无阻尼二自由度系统的振动
 - 3 . 2 . 1 无阻尼二自由度系统的自由振动
 - 3 . 2 . 2 与自由振动有关的几种现象
 - 3 . 2 . 3 无阻尼二自由度系统的强迫振动
- 3 . 3 有阻尼二自由度系统的振动
 - 3 . 3 . 1 有阻尼二自由度系统的自由振动
 - 3 . 3 . 2 有阻尼二自由度系统的强迫振动
 - 3 . 3 . 3 求强迫振动方程稳态解的复数法
- 3 . 4 动力消振器
 - 3 . 4 . 1 无阻尼动力消振器
 - 3 . 4 . 2 有阻尼的消振器
- 3 . 5 坐标的耦合与解耦
 - 3 . 5 . 1 广义坐标与耦合
 - 3 . 5 . 2 解耦与主坐标

习题与思考题

第4章 多自由度系统的振动

- 4 . 1 多自由度系统的振动微分方程
- 4 . 1 . 1 作用力方程与刚度系数
- 4 . 1 . 2 位移方程和柔度系数
- 4 . 1 . 3 拉格朗日方程的应用
- 4 . 1 . 4 固有频率和主振型
- 4 . 2 主坐标与正则坐标
- 4 . 2 . 1 主振型的正交性
- 4 . 2 . 2 振型矩阵与正则振型矩阵
- 4 . 2 . 3 主坐标与正则坐标
- 4 . 3 多自由度系统对初始条件的响应
- 4 . 3 . 1 无阻尼系统对初始条件的响应
- 4 . 3 . 2 多自由度系统的阻尼
- 4 . 3 . 3 有阻尼系统对初始条件的响应
- 4 . 4 多自由度系统的对激振的响应
- 4 . 4 . 1 无阻尼系统对简谐激振的响应
- 4 . 4 . 2 系统对一般激振的响应
- 4 . 4 . 3 有阻尼系统对激振的响应
- 4 . 5 多自由度系统固有频率及主振型的计算
- 4 . 5 . 1 矩阵迭代法
- 4 . 5 . 2 邓柯莱法
- 4 . 5 . 3 瑞利法

习题与思考题

第5章 实验振动分析基础

- 5 . 1 概述
- 5 . 2 机械振动实验常用仪器设备
 - 5 . 2 . 1 测振传感器
 - 5 . 2 . 2 激振设备
 - 5 . 2 . 3 数据采集和分析设备
- 5 . 3 振动特性参数的测量
 - 5 . 3 . 1 测量前应考虑的问题
 - 5 . 3 . 2 振动基本参数的测量
 - 5 . 3 . 3 结构的动力参数的测量
 - 5 . 3 . 4 实验模态分析
- 5 . 4 信号分析技术基础
 - 5 . 4 . 1 振幅特征的描述
 - 5 . 4 . 2 相关函数分析
 - 5 . 4 . 3 功率谱分析
 - 5 . 4 . 4 传递函数和相干函数

习题与思考题

第6章 振动理论在机器故障诊断中的应用

- 6 . 1 机器故障诊断技术概述
 - 6 . 1 . 1 机器故障诊断的内容
 - 6 . 1 . 2 机器故障诊断的主要方法
 - 6 . 1 . 3 机器振动信号的处理
- 6 . 2 机器的振动故障诊断
 - 6 . 2 . 1 旋转机械常用的状态监测和分析图形
 - 6 . 2 . 2 几种旋转机械的振动评定标准
 - 6 . 2 . 3 旋转机械典型故障的振动诊断
- 6 . 3 机器典型零部件的振动故障诊断
 - 6 . 3 . 1 齿轮故障的基本形式与特征
 - 6 . 3 . 2 滚动轴承故障及其特征
 - 6 . 3 . 3 振动信号处理的一些特殊方法

习题与思考题

主要参考文献