
CHAPTER 1

2022-2023 学年微积分（一）（下）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 在空间直角坐标系中, 方程 $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ 表示 ().
A. 半球面
B. 柱面
C. 锥面
D. 单叶双曲面
2. 设 $z = f(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处有 $f_x(1, 1) = f_y(1, 1) = 1$, 则必有 ().
A. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} f(x, y)$ 存在
B. $dz|_{(1,1)} = dx + dy$
C. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x, 1)$ 及 $\lim_{y \rightarrow 1} f(1, y)$ 都存在
D. $f(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 沿方向 $\boldsymbol{n} = \{\cos \theta, \sin \theta\}$ 的方向导数存在
3. 设函数 $z = f(x, y)$ 的全微分为 $dz = 2x dx + 3y dy$, 则点 $(0, 0)$ ().
A. 不是 $f(x, y)$ 的连续点
B. 不是 $f(x, y)$ 的驻点
C. 是 $f(x, y)$ 的极大值点
D. 是 $f(x, y)$ 的极小值点
4. 设 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和平行 $z = 1$ 所围成的空间区域, 将 $I = \iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z}) dx dy dz$ 化为柱坐标系下的累次积分, 下列结果正确的是 ().
A. $I = 2\pi \int_0^1 r dr \int_0^1 f(\sqrt{r^2 + z}) dz$
B. $I = 2\pi \int_0^1 r dr \int_r^1 f(\sqrt{r^2 + z}) dz$
C. $I = 2\pi \int_0^1 dr \int_r^1 f(\sqrt{r^2 + z}) dz$
D. $I = 2\pi \int_0^1 dz \int_0^z f(\sqrt{r^2 + z}) dr$

5. 设 S 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($z \geq 0, R > 0$), $abc \neq 0$, 则 $\iint_S (ax + by + cz) dS = (\quad)$.

A. $c\pi R^2$

B. $\frac{1}{4}c\pi R^3$

C. $c\pi R^3$

D. $(a + b + c)\pi R^2$

6. 下列命题中, 正确的是 ().

A. 若 $a_n \leq b_n \leq c_n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛

B. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

C. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散

D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{\sqrt{n}}$ 收敛

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 设曲线 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, 则 $\oint_{\Gamma} (x^2 + 2y^2 + 3z) ds = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. $z = x + 3y + \ln(1 + x^2 + y^2)$ 在点 $(0, 0, 0)$ 的切平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

9. 设 $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) \Big|_{(1, -1, 2)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ 2x, & 0 < x < \pi \end{cases}$, 将 $f(x)$ 展开成以 2π 为周期的傅里叶级数, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数在 $x = -3\pi$ 处的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 求过点 $P(2, 1, 3)$ 且与 $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-1}$ 垂直的平面方程, 并求该平面与 L_1 的交点.

12. 设 $z = e^{-x} \sin \frac{y}{x}$, 求 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(2, \pi)}$, $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right|_{(2, \pi)}$.

13. 求曲面 $z = xy$ 包含在圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 内那部分面积 S .

14. 求 $I = \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 由 $\begin{cases} y^2 + \frac{z^2}{2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所形成的曲面所围成的立体.

15. 设 S 是上半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ($R > 0$), 取上侧, 求 $I = \iint_S \frac{(x^2 + y) dy dz + z dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

16. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$ 的收敛域与和函数 $S(x)$.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 设 L 是 xOy 面上任意的光滑曲线, $f(x)$ 具有二阶连续的导数, 且 $f(0) = 4$, $f'(0) = 3$, 若曲线积分 $\int_L (-xe^x + f''(x))y dx + f(x)dy$ 与路径无关, 求 $f(x)$.

18. 求 $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$ 在椭圆域 $D = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 \leq 4\}$ 上的最大值和最小值.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x) dx = A$, 证明: $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy = \frac{1}{2}A^2$.

20. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $2a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n^2 + u_n}$, 其中 $u_n > 0$, $\{a_n\}$ 有上界, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

CHAPTER 2

2022-2023 学年微积分（一）（下）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** D.

方程 $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ 等价于

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1, z \geq 0,$$

表示单叶双曲面的上半部分.

2. **Solution.** C.

多元函数偏导存在无法保证函数连续, 全微分 $dz = f_x dx + f_y dy$ 仅在函数可微时成立,

偏导数存在不能保证沿任意方向的方向导数存在.

对于 C 选项, $f(x, 1)$ 是 x 的一元函数, 由 $f_x(1, 1)$ 存在知该一元函数在 $x = 1$ 处可导, 必然连续,

即 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x, 1) = f(1, 1)$ 存在; 同理 $\lim_{y \rightarrow 1} f(1, y)$ 也存在.

3. **Solution.** D.

由题可知 $dz = d\left(x^2 + \frac{3}{2}y^2\right)$, 所以 $z = x^2 + \frac{3}{2}y^2 + C$, 因此 $f(x, y)$ 显然在 $(0, 0)$ 处可微, 且

$$f_x(0, 0) = 2x|_{(0,0)} = 0, \quad f_y(0, 0) = 3y|_{(0,0)} = 0,$$

所以点 $(0, 0)$ 是驻点. 又 $f_{xx}(0, 0) = 2$, $f_{yy}(0, 0) = 3$, $f_{xy}(0, 0) = 0$, 所以

$$f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = 6 > 0,$$

因此点 $(0, 0)$ 是极小值点.

4. **Solution.** B.

由柱坐标代换

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

可得

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^1 f(\sqrt{r^2 + z}) dz.$$

5. **Solution.** C.

由对称性可知

$$\iint_S x \, dS = \iint_S y \, dS = 0,$$

$$\text{故 } \iint_S (ax + by + cz) \, dS = c \iint_S z \, dS.$$

用球坐标代换, $dS = R^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta$, 因此

$$\begin{aligned} c \iint_S z \, dS &= c \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cos \varphi R^2 \sin \varphi \, d\varphi \\ &= c\pi R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi \, d\varphi \\ &= c\pi R^3 \left[-\frac{\cos 2\varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= c\pi R^3. \end{aligned}$$

6. **Solution.** A.

对于 A 选项, 根据已知条件 $a_n \leq b_n \leq c_n$, 可知 $0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$.

令 $u_n = b_n - a_n$, $v_n = c_n - a_n$, 则 $v_n \geq u_n \geq 0$ 均为正项级数的通项.

因为 $\sum a_n$ 和 $\sum c_n$ 都收敛, 它们的差级数 $\sum v_n = \sum (c_n - a_n)$ 也必然收敛,

根据正项级数的比较判别法, 由于 $\sum v_n$ 收敛, 所以 $\sum u_n$ 也收敛.

因 $b_n = u_n + a_n$, 而 $\sum u_n$ 和 $\sum a_n$ 都是收敛级数, 所以它们的和级数 $\sum b_n$ 必然收敛.

对于 B 选项, 令 $a_n = \frac{1}{n}$, 显然 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

对于 C 选项, 令 $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{(-1)^n \sqrt{n}} \right) = 1$,

但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

对于 D 选项, 令 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. **Solution.** 2π .

显然曲线 Γ 具有轮换对称性, 因此

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} x^2 \, ds &= \oint_{\Gamma} y^2 \, ds = \oint_{\Gamma} z^2 \, ds, \\ \oint_{\Gamma} x \, ds &= \oint_{\Gamma} y \, ds = \oint_{\Gamma} z \, ds = 0. \end{aligned}$$

从而

$$\oint_{\Gamma} (x^2 + 2y^2 + 3z) \, ds = \oint_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) \, ds + \oint_{\Gamma} (x + y + z) \, ds = 2\pi.$$

8. **Solution.** $x + 3y - z = 0$.

由 $z = x + 3y + \ln(1 + x^2 + y^2)$ 可得

$$z_x = 1 + \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \quad z_y = 3 + \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}.$$

因此

$$z_x(0, 0) = 1, \quad z_y(0, 0) = 3.$$

曲面在点 $(0, 0, 0)$ 处切平面的法向量可取作 $(z_x(0, 0), z_y(0, 0), -1) = (1, 3, -1)$, 因此切平面方程为

$$x + 3y - z = 0.$$

9. **Solution.** $\frac{1}{6}$.

$$u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2).$$

因此 $\mathbf{grad} u = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$, 所以

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad} u) = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{x^2 + z^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

代入 $(1, -1, 2)$ 得

$$\Delta u = \frac{1}{1 + 1 + 4} = \frac{1}{6}.$$

10. **Solution.** $\frac{\pi}{2}$.

因为

$$-3\pi \equiv -\pi \equiv \pi \pmod{2\pi},$$

根据 Dirichlet 收敛定理可知

$$S(-3\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{2\pi + (-\pi)}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 与直线

$$L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

垂直的平面法向量可取 $(2, 1, -1)$. 过点 $P(2, 1, 3)$ 的平面方程为

$$2(x-2) + (y-1) - (z-3) = 0,$$

即

$$2x + y - z - 2 = 0.$$

将

$$x = 2t + 1, \quad y = t + 2, \quad z = -t + 2$$

代入该平面方程, 可得 $t = 0$, 故交点为 $(1, 2, 2)$.

12. **Solution.** 先求

$$z_y = e^{-x} \cos \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^{-x}}{x} \cos \frac{y}{x}.$$

所以

$$z_y(2, \pi) = \frac{e^{-2}}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

再对 x 求偏导, 可得

$$z_{yx} = e^{-x} \left(\frac{y}{x^2} \sin \frac{y}{x} - \frac{x+1}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) \frac{1}{x}.$$

在 $(2, \pi)$ 处, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, 故

$$z_{yx}(2, \pi) = \frac{\pi}{8e^2}.$$

13. **Solution.** 曲面面积为

$$S = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} \, dx \, dy.$$

由于 $z = xy$, 故

$$z_x = y, \quad z_y = x.$$

所以

$$S = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1+x^2+y^2} \, dx \, dy.$$

用极坐标代换,

$$S = 2\pi \int_0^1 r \sqrt{1+r^2} \, dr = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

14. **Solution.** 绕 z 轴旋转后得到椭球体

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2} \leq 1.$$

对固定 z , 截面是圆

$$x^2 + y^2 \leq 1 - \frac{z^2}{2},$$

因而

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} z^2 \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} z^2 \, dz \iint_{x^2+y^2 \leq 1-\frac{z^2}{2}} dx \, dy \\ &= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} z^2 \left(1 - \frac{z^2}{2} \right) dz = \frac{8\sqrt{2}\pi}{15}. \end{aligned}$$

15. **Solution.** 上半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 上满足 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$, 因此

$$I = \frac{1}{R} \iint_S (x^2 + y^2) \, dy \, dz + z \, dx \, dy.$$

记 S' 为 $x^2 + y^2 \leq R^2, z = 0$ 取下侧, $\Sigma = S \cup S'$, 则

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{R} \left(\oint_{\Sigma} (x^2 + y) \, dy \, dz + z \, dx \, dy - \iint_{S'} (x^2 + y) \, dy \, dz + z \, dx \, dy \right) \\ &= \frac{1}{R} \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \\ z \geq 0}} (2x+1) \, dx \, dy \, dz \\ &= \frac{1}{R} \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \\ z \geq 0}} dx \, dy \, dz = \frac{2\pi R^2}{3}. \end{aligned}$$

16. **Solution.** 令 $y = x^2$, 则级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} y^n$.

用比值判别法,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{(n+1)(2n+1)} = 0, \end{aligned}$$

故级数关于 y 的收敛半径为 $R_y = +\infty$, 关于 x 的收敛半径也为 $R_x = +\infty$, 即收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

下面求和函数 $S(x)$.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}.$$

其中

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{2n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n-1)!} = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = x^2 e^{x^2}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} - 1 = e^{x^2} - 1. \end{aligned}$$

所以

$$S(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2} - 1.$$

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 记

$$P(x, y) = (-xe^x + f''(x))y, \quad Q(x, y) = f(x).$$

由曲线积分与路径无关得 $P_y = Q_x$, 即

$$-xe^x + f''(x) = f'(x).$$

于是

$$f''(x) - f'(x) = xe^x.$$

上述方程对应的齐次微分方程的特征方程为 $r^2 - r = 0$, 其根为 $r = 0$ 和 $r = 1$,

因此齐次方程的通解为 $y = C_1 + C_2 e^x$.

$r = 1$ 是该特征方程的单根, 故可设非齐次方程的特解为 $f^*(x) = x(ax + b)e^x$,

代入得 $(2ax + 2a + b)e^x = xe^x$, 比较系数可得 $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$, 因此非齐次方程的通解为

$$f(x) = C_1 + C_2 e^x + \left(\frac{1}{2}x - 1\right)xe^x.$$

将 $f(0) = 4$, $f'(0) = 3$ 代入可得 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 4, \\ C_2 - 1 = 3 \end{cases}$, 解得 $C_1 = 0$, $C_2 = 4$, 因此

$$f(x) = 4e^x + \left(\frac{1}{2}x - 1\right)xe^x.$$

18. **Solution.** 在区域内部令 $\begin{cases} f_x = 2x = 0, \\ f_y = -2y = 0 \end{cases}$, 解得唯一驻点 $(0, 0)$, 且 $f(0, 0) = 2$.

在边界 $4x^2 + y^2 = 4$ 上有 $y^2 = 4 - 4x^2$, 代入原函数得

$$f = x^2 - (4 - 4x^2) + 2 = 5x^2 - 2, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

所以边界上最大值为 3, 最小值为 -2. 比较可知 $f(x, y)$ 在区域 D 上的最大值为 3, 最小值为 -2.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 法一. 记 $f(x)$ 的一个原函数为

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

则 $F(0) = 0$, $F(1) = A$. 因此

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy &= \int_0^1 f(x) (F(1) - F(x)) dx \\ &= A \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 F(x) dF(x) \\ &= A^2 - \frac{1}{2} F^2(x) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} A^2. \end{aligned}$$

法二. 交换积分次序, 有

$$\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy = \int_0^1 dy \int_0^y f(x)f(y) dx.$$

将右端的积分变量 x, y 对换, 得

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x)f(y) dx = \int_0^1 dx \int_0^x f(x)f(y) dy.$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy + \int_0^1 dx \int_0^x f(x)f(y) dy \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^1 f(x)f(y) dy \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \left(\int_0^1 f(y) dy \right) = \frac{1}{2} A^2.\end{aligned}$$

法三. 记

$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy.$$

由于被积函数 $f(x)f(y)$ 关于 x, y 对称,

积分区域 $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ 与 $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ 面积相同且无公共内点, 因此

$$I = \int_0^1 dy \int_y^1 f(y)f(x) dx = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x)f(y) dx.$$

将两个积分相加, 并合并积分区域为正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$, 得

$$2I = \iint_{[0,1]^2} f(x)f(y) dx dy = \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \left(\int_0^1 f(y) dy \right) = A \cdot A = A^2.$$

因此

$$I = \frac{1}{2} A^2.$$

20. **Proof.** 由递推关系 $2a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n^2 + u_n}$ 可得

$$u_n = 4a_{n+1}(a_{n+1} - a_n).$$

由 $a_{n+1} = \frac{1}{2} (a_n + \sqrt{a_n^2 + u_n})$ 可得 $a_{n+1} \geq a_n$, 又 a_n 有上界, 所以 $\{a_n\}$ 收敛.

注意到

$$0 < \frac{u_n}{4} = a_{n+1}^2 - a_n a_{n+1} \leq a_{n+1}^2 - a_n^2,$$

因为 $\{a_n\}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^2 - a_n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 - a_1^2$ 收敛,

由正项级数的比较判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.