
CHAPTER 1

2016-2017 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 设数列 x_n 满足 $x_1 > 0, x_{n+1} = x_n \cdot \frac{n+10}{3n-2} (n > 1)$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$ ($a, b, c > 0$ 是常数).

3. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) + x^2 \sin \frac{1}{x}}{(\cos x + 1) \ln(1+x)}$.

4. 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3 + 2x + 1}{x - 1} = b$, 求常数 a, b 的值.

5. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + 2^{\frac{1}{x}}}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$.

6. 指出函数 $f(x) = \frac{\sin(x^2 - 3x + 2)}{x(x-1)|x-2|}$ 的间断点, 并判断间断点的类型.

7. 设函数 $y = \sqrt{\frac{e^x}{x+1}} \sqrt{e^x + 1} (x > -1)$, 求微分 $dy|_{x=0}$.

8. 设函数 $v = f(u)$ 有反函数 $u = \varphi(v)$, 满足 $f(0) = 0$, 且 $\varphi(v)$ 是可导的, 在 $v = 0$ 的某个邻域内有 $\varphi'(v) = \frac{1}{2 + \sin v}$, 求复合函数 $y = f(2x + x^2)$ 在 $x = 0$ 处的导数.

9. 设 $y = \ln(2x^2 - 3x + 1)$, 求 $y^{(10)}(0)$.

10. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 确定, 求在 $t = \frac{\pi}{4}$ 时的导数 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处连续, $F(x) = (e^x - e^a)f(x)$, 计算导数 $F'(a)$.

12. 求函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 的导函数 $f'(x)$, 并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处二阶可导, 且 $f(1+x) - 3f(1-x) \sim 3x^2 (x \rightarrow 0)$, 求 $f(1), f'(1), f''(1)$ 的值.

14. 求无穷小量 $u(x) = \arcsin x - \arctan x (x \rightarrow 0)$ 的主部和阶数.

15. 一根长为 5 米的竹竿斜靠着墙，地面与墙面垂直，竹竿在地面的投影也与墙面垂直. 设墙面和地面是光滑的，使得竹竿顶端 A 沿着墙壁竖直往下滑动，同时，底端 B 沿着其投影线向外滑动. 如果在底端 B 距离墙根为 3 米时，点 B 的速度为 4 米/秒，问此时顶端 A 下滑的速度为多少？

3 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

16. 由函数在一点可导可否推出它在该点的某个邻域内连续？认为可以请证明，认为不行请举反例.

17. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 设正实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 满足 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.
证明：存在三个不相等的实数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0, 1)$ ，使得 $\frac{\lambda_1}{f'(\xi_1)} + \frac{\lambda_2}{f'(\xi_2)} + \frac{\lambda_3}{f'(\xi_3)} = 1$.

CHAPTER 2

2016-2017 学年微积分（一）（上）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.**

法一. 当 $n > 22$ 时, $\frac{n+10}{3n-2} < \frac{1}{2}$, 所以 $0 < x_{n+1} < \frac{1}{2}x_n < \cdots < \frac{1}{2^{n-22}}x_{22}$,

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-22}}x_{22} = 0$, 由夹逼定理得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

法二. 当 $n > 6$ 时, $\frac{n+10}{3n-2} < 1$, 所以 $0 < x_{n+1} < x_n < \cdots < x_6$, 由单调有界定理知数列 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+10}{3n-2} = \frac{1}{3}a,$$

解得 $a = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

2. **Solution.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[\frac{a^x + b^x + c^x}{3} - 1 \right]} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \left[\frac{(a^x - 1) + (b^x - 1) + (c^x - 1)}{x} \right]} \\ &= e^{\frac{1}{3}(\ln a + \ln b + \ln c)} \\ &= \sqrt[3]{abc}. \end{aligned}$$

3. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) + x^2 \sin \frac{1}{x}}{(\cos x + 1) \ln(1 + x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) + x^2 \sin \frac{1}{x}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{2x} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

4. **Solution.** 原极限式可变形为

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3 + (2-b)x + 1 + b}{x-1},$$

得 $a = 0, 2 - b = 0$, 即 $a = 0, b = 2$.

5. **Solution.** 当 $x \rightarrow 0^-$ 时, $2^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+x+2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 1.$$

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $2^{\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x+2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 1.$$

因此 $l = 1$.

6. **Solution.** 函数 $f(x)$ 的间断点为 $x = 0, 1, 2$.

当 $x = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$, 所以 $x = 0$ 为无穷间断点.

当 $x = 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin[(x-1)(x-2)]}{x(x-1)|x-2|} = -1$, 所以 $x = 1$ 为可去间断点.

当 $x = 2$ 时, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-1)(x-2)}{-x(x-1)(x-2)} = -\frac{1}{2}$,

所以 $x = 2$ 为跳跃间断点.

7. **Solution.** $\ln y = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{e^x}{x+1} \right) + \ln \sqrt{e^x+1} \right] = \frac{1}{2} \left[x - \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(e^x+1) \right]$,

所以

$$\begin{aligned} y' &= y \cdot \frac{1}{2} \left[x - \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(e^x+1) \right]' \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{e^x}{x+1} \sqrt{e^x+1}} \left[1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{e^x+1} \right]. \end{aligned}$$

代入 $x = 0$ 得 $dy|_{x=0} = y'(0)dx = \frac{\sqrt[4]{2}}{8}dx$.

8. **Solution.**

$$\begin{aligned} y'(0) &= f'(2x+x^2)(2+2x)|_{x=0} \\ &= 2f'(0) \\ &= \frac{2}{\varphi'(0)} = 4. \end{aligned}$$

9. **Solution.** $y = \ln(x-1) + \ln(2x-1)$, 所以

$$y^{(10)} = \frac{(-1)^9 9!}{(x-1)^{10}} + \frac{(-1)^9 9! \cdot 2^{10}}{(2x-1)^{10}}.$$

代入 $x = 0$ 得 $y^{(10)}(0) = -9! \cdot (2^{10} + 1)$.

10. **Solution.** $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3 \sin^2 t \cos t}{-3 \cos^2 t \sin t} = -\tan t$, 所以 $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -1$.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = (-\tan t)' \cdot \frac{1}{-3 \cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3 \cos^4 t \sin t}, \text{ 所以 } \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. **Solution.**

$$\begin{aligned} F'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^a)f(x)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\mathrm{e}^a(\mathrm{e}^{x-a} - 1)f(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \mathrm{e}^a f(x) \frac{\mathrm{e}^{x-a} - 1}{x - a} \\ &= \mathrm{e}^a f(a). \end{aligned}$$

12. **Solution.** 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$.

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0,$$

$$\text{所以 } f'(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

当 $x \neq 0$ 时, $f'(x)$ 显然连续. 又

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = 0 = f'(0),$$

所以 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 综上所述, $f'(x)$ 在 \mathbf{R} 上处处连续.

13. **Solution.** 由题意可知 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(1+x) - 3f(1-x)] = -2f(1) = 0$, 所以 $f(1) = 0$.

且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - 3f(1-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} - 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1)}{-x} = 4f'(1) = 0,$$

所以 $f'(1) = 0$.

又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - 3f(1-x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(1+x) - 3f'(1-x)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(1+x) - f'(1)}{2x} - 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(1-x) - f'(1)}{-2x} \\ &= -f''(1) = 3, \end{aligned}$$

所以 $f''(1) = -3$.

14. **Solution.** 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x)}{cx^r} = 1$, 则

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \arctan x}{cx^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+x^2}}{crx^{r-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x^2 + (1-\sqrt{1-x^2})}{crx^{r-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \frac{1}{2}x^2}{crx^{r-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2}x^2}{crx^{r-1}}, \end{aligned}$$

因此必须 $\begin{cases} r-1=2, \\ cr=\frac{3}{2}, \end{cases}$ 解得 $r=3, c=\frac{1}{2}$.

所以 $u(x)$ 的主部为 $\frac{1}{2}x^3$, 阶数为 3.

15. **Solution.** 设 t 时刻竹竿底端距离墙根的水平距离 $x(t)$, 竹竿顶端距离墙根的垂直距离为 $y(t)$, 则

$$x^2(t) + y^2(t) = 25.$$

方程两边对 t 求导得

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0,$$

将 $x(t) = 3\text{m}$, $y(t) = 4\text{m}$, $\frac{dx}{dt} = 4\text{m/s}$

代入上式得 $\frac{dy}{dt} = -3\text{m/s}$, 即竹竿顶端下滑的速度为 3m/s .

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. **Proof.** 不能. 反例: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$

$$\text{计算 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f'(0) = 0$.

考虑非零点 a . 若 $a \in \mathbf{Q}$, 取点列 $\{x_n, x_n \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}\}$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0 \neq f(a) = a^2$, 说明 $f(x)$ 在 $x = a$ 处不连续.

同理可证当 $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ 时, $f(x)$ 也不连续. 所以函数除零点外处处不连续.

于是, 函数在 $x = 0$ 处可导, 但在该点的任何邻域内不连续.

17. **Proof.** 由于 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) = 0 < \lambda_1 < 1 = f(1)$,

由介值定理, 存在 $c_1 \in (0, 1)$ 使得 $f(c_1) = \lambda_1$.

又因为 $f(c_1) = \lambda_1 < \lambda_1 + \lambda_2 < 1 = f(1)$,

在区间 $[c_1, 1]$ 上应用介值定理, 存在 $c_2 \in (c_1, 1)$ 使得 $f(c_2) = \lambda_1 + \lambda_2$.

在区间 $[0, c_1], [c_1, c_2], [c_2, 1]$ 上对函数 $f(x)$ 依次使用 Lagrange 中值定理,

存在 $\xi_1 \in (0, c_1), \xi_2 \in (c_1, c_2), \xi_3 \in (c_2, 1)$, 使得

$$\begin{aligned} f'(\xi_1) &= \frac{f(c_1) - f(0)}{c_1 - 0} = \frac{\lambda_1}{c_1}, \\ f'(\xi_2) &= \frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1} = \frac{\lambda_2}{c_2 - c_1}, \\ f'(\xi_3) &= \frac{f(1) - f(c_2)}{1 - c_2} = \frac{\lambda_3}{1 - c_2}. \end{aligned}$$

于是

$$\frac{\lambda_1}{f'(\xi_1)} + \frac{\lambda_2}{f'(\xi_2)} + \frac{\lambda_3}{f'(\xi_3)} = c_1 + (c_2 - c_1) + (1 - c_2) = 1.$$