
CHAPTER 1

2018-2019 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 求极限 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + k^\alpha}$, 其中 $\alpha \in (0, 1)$.

2. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{2 \tan x} + \sin x^2)}{x}$.

3. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

4. 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax + bx + b}{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}} = 2$, 求常数 a, b 的值.

5. 设可微函数 $y = y(x)$ 由方程 $y + ye^x = 2 \cos y \sin x - 4x$ 确定, 求 $y'(0)$.

6. 求曲线 $r = 2 \sin 3\theta$ 在 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 处的切线方程.

7. 设函数 $f(x) = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$, 求微分 $dy|_{x=0}$.

8. 设函数 $y = x + x^3$ 的反函数为 $x = g(y)$, 求 $g''(2)$.

9. 设 $y = x^2 \cos 2x$, 求 $y^{(5)}\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

10. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = t \cos t - \sin t, \\ y = \cos t \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. 讨论函数 $f(x) = \frac{\sin \pi x}{x^2 - 1}$ 的连续性, 并对函数的间断点判别类型.

12. 求无穷小量 $u(x) = \left(\frac{1 + 2 \cos x}{3}\right)^{x^2} - 1 (x \rightarrow 0)$ 的主部和阶数.

13. 求函数与 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \geq 0, \\ x, & x < 0 \end{cases}$ 的导函数 $f'(x)$, 并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

14. 已知 $a > 1$, $n \geq 1$, 证明不等式 $\frac{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}}{\ln a} < \frac{\sqrt[n]{a}}{n^2}$.

15. 一架飞机在 H 米高空以 a 米/秒的速度水平匀速飞行. 设在 $t = 0$ 时刻有一探照灯位于飞机正下方的地面上跟踪飞机. 问 t 秒以后探照灯应以怎样的角速度转动才能照到飞机?

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. 设数列 $\{x_n\}$ 由递推公式 $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + \frac{2}{x_n^2}$ 给出. 证明数列 $\{x_n\}$ 无界.

17. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 有定义并且对于任何 $x, y \in [a, b] (x \neq y)$ 成立

$$|f(x) - f(y)| \leq M(x - y)^2,$$

其中 M 为常数. 证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒为常数.

CHAPTER 2

2019-2020 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 因 $\frac{n}{n+n^\alpha} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k^\alpha} < 1$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n^{\alpha-1}} = 1$,

由夹逼定理知 $l = 1$.

2. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{2 \tan x} + \sin x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2 \tan x} + \sin x^2 - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x + \sin x^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} \\ &= 2. \end{aligned}$$

3. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1)^{\frac{1}{\ln x}} = \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^x - 1)}{\ln x} \right] \\ &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{e^x}{e^x - 1}}{\frac{1}{x}} \right] = \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x e^x}{x} \right] \\ &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \right] = e. \end{aligned}$$

4. **Solution.** 计算

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax + bx + b}{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[(a+b)x + b](\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3})}{(3x+1) - (x+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2[(a+b)x + b]}{x-1} \\ &= 2. \end{aligned}$$

$$\text{因此有 } \begin{cases} a + 2b = 0, \\ a + b = 1. \end{cases} \quad \text{解得 } a = 2, b = -1.$$

5. **Solution.** 方程两边对 x 求导得到

$$y' + y'e^x + ye^x = -2 \sin y \sin x \cdot y' + 2 \cos y \cos x - 4,$$

代入 $x = 0, y = 0$ 解得 $y'(0) = -1$.

6. **Solution.** 曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = 2 \sin 3\theta \cos \theta, \\ y = 2 \sin 3\theta \sin \theta. \end{cases}$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{6 \cos 3\theta \sin \theta + 2 \sin 3\theta \cos \theta}{6 \cos 3\theta \cos \theta - 2 \sin 3\theta \sin \theta}.$$

代入 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 得切线斜率 $k = \sqrt{3}$, 又切点坐标为 $(0, 0)$, 所以切线方程为 $y = \sqrt{3}x$.

7. **Solution.** 因为

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} + \frac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{1-x^2},$$

所以 $dy|_{x=0} = f'(0) dx = 2 dx$.

8. **Solution.** 计算

$$g'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{1+3x^2},$$

$$g''(y) = \frac{d}{dy}(g'(y)) = \frac{d}{dx}(g'(y)) \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{6x}{(1+3x^2)^3}.$$

代入 $x = 1, y = 2$ 得 $g''(2) = -\frac{3}{32}$.

9. **Solution.** 利用 Leibniz 法则得到

$$\begin{aligned} y^{(5)} &= x^2 (\cos 2x)^{(5)} + 5 \cdot 2x (\cos 2x)^{(4)} + 10 \cdot 2 (\cos 2x)^{(3)} \\ &= -32x^2 \sin 2x + 160x \cos 2x + 160 \sin 2x. \end{aligned}$$

代入 $x = \frac{\pi}{2}$ 得 $y^{(5)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -80\pi$.

10. **Solution.**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t}{\cos t - t \sin t - \cos t} = \frac{-\sin t}{-t \sin t} = \frac{1}{t}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{-t \sin t} = \frac{1}{t^3 \sin t}. \end{aligned}$$

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. **Solution.** 函数 $f(x)$ 的间断点为 $-1, 1$. 因

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin \pi x}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\pi \cos \pi x}{2x} = \frac{\pi \cos(-\pi)}{-2} = \frac{\pi}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi x}{2x} = \frac{\pi \cos \pi}{2} = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

所以 $x = -1, 1$ 均为可去间断点.

12. **Solution.**

$$\begin{aligned}
 u &= \left(\frac{1+2\cos x}{3} \right)^{x^2} - 1 = \exp \left(x^2 \ln \frac{1+2\cos x}{3} \right) - 1 \\
 &\sim x^2 \ln \frac{1+2\cos x}{3} \\
 &\sim \frac{2x^2}{3} (\cos x - 1) \\
 &\sim -\frac{1}{3}x^4.
 \end{aligned}$$

所以 u 的主部为 $-\frac{1}{3}x^4$, 阶数为 4.

13. **Solution.** 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$; 当 $x < 0$ 时, $f'(x) = 1$;

当 $x = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$, 所以 $f'(0) = 1$.

因此

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x > 0, \\ 1, & x \leq 0. \end{cases}$$

当 $x \neq 0$ 时, $f'(x)$ 显然连续;

当 $x = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1 = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$, 所以 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

因此 $f'(x)$ 在 \mathbf{R} 上处处连续.

14. **Solution.** 令 $f(x) = a^x$, 显然 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$ 内可导.

由 Lagrange 中值定理知存在 $\xi \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right)$ 使得

$$\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a} = f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right) = f'(\xi) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{a^\xi \ln a}{n(n+1)} < \frac{a^{\frac{1}{n}} \ln a}{n^2},$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}}{\ln a} < \frac{\sqrt[n]{a}}{n^2}.$$

15. **Solution.** 设飞机飞过的距离为 x 米, 飞机与探照灯的连线与竖直方向的夹角为 θ .

由几何关系有 $x = H \tan \theta$, 故

$$\frac{dx}{dt} = a = H \sec^2 \theta \cdot \frac{d\theta}{dt}.$$

当前时刻 $x = at$, 故 $\sec \theta = \frac{\sqrt{H^2 + a^2 t^2}}{H}$, 代入上式得

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{aH}{H^2 + a^2 t^2}.$$

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. **Proof.** 显然 $x_{n+1} - x_n = \frac{2}{x_n^2} > 0$, 即 $\{x_n\}$ 严格单调增加.

若 $\{x_n\}$ 有界, 则 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $a = a + \frac{2}{a^2}$, 此方程无解, 矛盾.

因此 $\{x_n\}$ 无界.

17. **Proof.** 由题可知, $\forall x, y \in [a, b] (x \neq y)$, 有 $0 \leq \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq M|x - y|$.

当 $x \rightarrow y$ 时, $M|x - y| \rightarrow 0$, 由夹逼定理知 $\lim_{x \rightarrow y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = 0$, 即 $f'(x) = 0$.

所以 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒为常数.