
CHAPTER 1

2013-2014 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 计算数列极限 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{12} \cdots \frac{2n-1}{4n}$.

2. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x^2} - 3^{x^2}}{(2^x - 3^x)^2}$.

3. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{x^3}$.

4. 设 $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$, 求 $f'(x)$.

5. 设参数方程 $\begin{cases} x = t + t^2, \\ y = te^t \end{cases}$ 确定了函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

6. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = h(x^2 + y^2)$ 所确定, h 处处可导, 且 $h' \neq \frac{1}{2y}$, 求 y' .

7. 求函数 $f(x) = \sin \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处带 Peano 余项的 3 阶 Taylor 公式.

8. 求函数 $f(x) = \frac{x}{1+2x}$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$.

9. 求曲线 $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$ 的斜渐近线方程.

10. 指出函数 $f(x) = (1 - e^{\frac{x}{1-x}})^{-1}$ 的间断点与类型.

2 综合题 (每小题 7 分, 共 28 分)

11. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, $f(0) \neq 0$, 且对一切 x, y 有 $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, 证明 $f(x)$ 处处连续.

12. 讨论方程 $\ln x - \frac{x}{e} + 1 = 0$ 有几个实根? 并给出证明.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导, 且 $f(2) \neq 0$. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{f(2)} \right]^x$.

14. 有一个顶点朝上的圆锥形容器, 高为 8m, 底半径为 $R = 2\sqrt{2}\text{m}$, 向其中注水. 设当水深 $h = 6\text{m}$ 时, 水面上升的速度为 $\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi}\text{m/min}$, 求此时水的体积的变化率 $\frac{dV}{dt}$.

3 证明题 (每小题 6 分, 共 12 分)

15. 证明不等式: 当 $0 < x < 1$ 时, $\frac{1-x}{1+x} < e^{-2x}$.

16. 设 $0 < x_1 < x_2$, 证明 $x_1 \ln x_2 - x_2 \ln x_1 = (\ln \xi - 1)(x_1 - x_2)$, 其中 ξ 介于 x_1 与 x_2 之间.

CHAPTER 2

2013-2014 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 设 $x_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{12} \cdots \frac{2n-1}{4n}$, 则

$$0 < x_n = \frac{2n-1}{4n} x_{n-1} < \frac{1}{2} x_{n-1} < \frac{1}{2^2} x_{n-2} < \cdots < \frac{1}{2^{n-1}} x_1,$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} x_1 = 0$, 由夹逼定理得 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

2. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2 \ln 2} - e^{x^2 \ln 3}}{(e^{x \ln 2} - e^{x \ln 3})^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^2 \ln 2 - 1 - x^2 \ln 3 + o(x^2)}{(1 + x \ln 2 - 1 - x \ln 3 + o(x))^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln 2 - \ln 3)x^2 + o(x^2)}{[(\ln 2 - \ln 3)x + o(x)]^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln 2 - \ln 3)x^2 + o(x^2)}{(\ln 2 - \ln 3)^2 x^2 + o(x^2)} \\ &= \frac{1}{\ln 2 - \ln 3}. \end{aligned}$$

3. **Solution.** 由 Lagrange 中值定理, 存在 ξ 介于 $\tan x$ 与 $\sin x$ 之间, 使得 $e^\xi (\tan x - \sin x) = e^{\tan x} - e^{\sin x}$.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \rightarrow 0$, $\sin x \rightarrow 0$, 故 $\xi \rightarrow 0$. 所以

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} e^\xi \cdot \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4. **Solution.** 因为 $\ln f(x) = \cos x \ln \sin x$, 所以

$$f'(x) = (\sin x)^{\cos x} \left(-\sin x \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \right).$$

5. **Solution.**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(t+1)e^t}{2t+1},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\frac{(t+1)e^t}{2t+1} \right)' \cdot \frac{1}{2t+1} = \frac{(t+2)e^t \cdot (2t+1) - 2(t+1)e^t}{(2t+1)^3} = \frac{(2t+3)te^t}{(2t+1)^3}.$$

6. **Solution.** 方程 $y = h(x^2 + y^2)$ 两边对 x 求导得

$$y' = h'(x^2 + y^2)(2x + 2yy'),$$

$$\text{整理得 } y' = \frac{2xh'(x^2 + y^2)}{1 - 2yh'(x^2 + y^2)}.$$

7. **Solution.** $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, 所以

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin \ln(1+x) = \sin \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) - \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^3 + o \left(\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^3 \right) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

8. **Solution.** 因为 $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x+1}$, 所以 $f^{(n)}(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n \cdot n! 2^n}{(2x+1)^{n+1}}$,

因此

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot n! \cdot 2^{n-1}.$$

9. **Solution.** 因为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right) - x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(e+t) - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{e+t} = \frac{1}{e},$$

所以曲线 $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$ 的斜渐近线方程为 $y = x + \frac{1}{e}$.

10. **Solution.** 函数 $f(x)$ 的间断点为 $x=0$ 和 $x=1$.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\frac{x}{1-x}} \rightarrow 1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{\frac{x}{1-x}})^{-1} = \infty$, 故 $x=0$ 为无穷间断点.

当 $x \rightarrow 1^+$ 时, $e^{\frac{x}{1-x}} \rightarrow 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - e^{\frac{x}{1-x}})^{-1} = 1$;

当 $x \rightarrow 1^-$ 时, $e^{\frac{x}{1-x}} \rightarrow \infty$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - e^{\frac{x}{1-x}})^{-1} = 0$, 故 $x=1$ 为跳跃间断点.

2 综合题 (每小题 7 分, 共 28 分)

11. **Solution.** 在方程 $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ 中令 $x=y=0$ 得 $f(0) = f^2(0)$, 因 $f(0) \neq 0$, 所以 $f(0) = 1$.

任取 $x_0 \in \mathbf{R}$, 在方程 $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ 中令 $x=x_0$, 得 $f(x_0+y) = f(x_0) \cdot f(y)$. 令 $y \rightarrow 0$, 得

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x_0+y) = f(x_0) \cdot \lim_{y \rightarrow 0} f(y) = f(x_0) \cdot f(0) = f(x_0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续. 由 x_0 的任意性可知 $f(x)$ 处处连续.

12. **Solution.** 设 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + 1$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$, $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减.

因为 $f(e) = 1 > 0$, $f(0^+) = -\infty$, $f(e^3) = 4 - e^2 < 0$, 所以方程 $\ln x - \frac{x}{e} + 1 = 0$ 有两个实根.

13. **Solution.**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{f(2)} \right]^x &= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\ln f\left(2 + \frac{1}{x}\right) - \ln f(2) \right] \right\} \\ &= \exp \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln f(2+t) - \ln f(2)}{t} \right] \\ &= \exp \left[(\ln f(t))' \Big|_{t=2} \right] = \exp \left(\frac{f'(2)}{f(2)} \right).\end{aligned}$$

14. **Solution.** 由几何关系, $V = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 8\pi - \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{(8-h)^3}{8}$. 方程两边对 t 求导得

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{3(8-h)^2}{8} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{\pi(8-h)^2}{8} \cdot \frac{dh}{dt}.$$

将 $h = 6\text{m}$, $\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi}\text{m/min}$ 代入上式得 $\frac{dV}{dt} = 2\text{m}^3/\text{min}$.

3 证明题 (每小题 6 分, 共 12 分)

15. **Proof.** 取对数, 即证 $\ln \frac{1-x}{1+x} < -2x (0 < x < 1)$.

令 $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x} + 2x$, 则 $f'(x) = -\frac{2}{1-x^2} + 2 = -\frac{2x^2}{1-x^2} < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减.

因为 $f(0) = 0$, 所以当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < f(0) = 0$, 即 $\frac{1-x}{1+x} < e^{-2x}$.

16. **Proof.** 设 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$, 则函数 $f(x), g(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续, 在 (x_1, x_2) 内可导, 且 $g(x) \neq 0$.

由 Cauchy 中值定理, 存在 ξ 介于 x_1 与 x_2 之间, 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} = \frac{\frac{\ln x_2}{x_2} - \frac{\ln x_1}{x_1}}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}} = \frac{\frac{\frac{1}{\xi} \cdot \xi - \ln \xi}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}} = \ln \xi - 1,$$

化简得 $x_1 \ln x_2 - x_2 \ln x_1 = (\ln \xi - 1)(x_1 - x_2)$.