

作者	生姜 DrGinger
脚本	生姜 DrGinger
视频	崔崔 CuiCui
开源学习资源	https://github.com/Visualize-ML
平台	https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang https://space.bilibili.com/3546865719052873 https://space.bilibili.com/513194466

07 System of Linear Equations

线性方程组

从直线、平面的角度理解更容易

7.1 二元一次方程组



- ▶ 线性方程组：将鸡兔同笼等问题转化为二元一次方程组形式。
- ▶ 代数方法求解：通过代入消元和逆矩阵法求解未知数。
- ▶ 几何角度：每个二元一次方程表示一条直线，解为直线交点。
- ▶ 解的情况：通过图像判断方程组是否有唯一解、无解或无数组解。
- ▶ 矩阵形式表达方程组：将线性方程组写成 $Ax = b$ 的矩阵乘法形式，简洁且利于计算。
- ▶ 利用行列式是否为 0 判断是否存在唯一解。
- ▶ 理解初等行变换作用：行交换、行数乘、行倍加。
- ▶ 使用 `numpy.linalg.inv()`、`numpy.linalg.solve()` 等函数解线性方程组。

本节介绍了如何利用线性方程组求解鸡兔同笼问题，并从代数和几何角度分析其解。我们首先建立二元一次方程组，并将其转换为矩阵乘法形式。接着，利用如逆矩阵法计算解，并验证其合理性。

随后，我们从几何视角解释二元一次方程，指出每个方程代表一条直线，解为两条直线的交点。我们探讨了不同情况下方程组的解的可能性，如唯一解、无解、无穷多解，并利用等高线图形象展示其几何特性。最后，我们讨论了不同类型的矩阵（单位矩阵、对角矩阵、上三角矩阵、下三角矩阵）如何影响方程组的求解。

鸡兔同笼

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

《孙子算经》中鸡兔同笼问题这样说，“今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？”

我们可以构造两个二元一次方程来描述上述问题。

二元一次方程 (linear equation in two variables) 是指含有两个未知数，且指数最高为 1 的代数方程，一般形式为：

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b \quad (1)$$

其中， x_1 、 x_2 是两个未知数； a_1 、 a_2 是系数 (a_1 、 a_2 可以是任意实数)； b 是常数 (任意实数)。

假设鸡的数量为 x_1 ，兔的数量为 x_2 。

鸡、兔的总数为 35，写成二元一次方程

$$x_1 + x_2 = 35 \quad (2)$$

鸡有 2 只脚，兔有 4 只脚，总数为 94，写成二元一次方程

$$2x_1 + 4x_2 = 94 \quad (3)$$

结合以上两个二元一次方程，鸡兔同笼问题可以写成线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 35 \\ 2x_1 + 4x_2 = 94 \end{cases} \quad (4)$$

线性方程组 (system of linear equations) 是由多个线性方程组成的方程组。

求解

求解 (4) 这个线性方程组，很容易。

(3) 两边同时除以 2，得到

$$x_1 + 2x_2 = 47 \quad (5)$$

等式 (5) 左侧、右侧分别减去 (2) 左侧、右侧，得到

$$x_1 + 2x_2 - (x_1 + x_2) = 47 - 35 \quad (6)$$

得到

$$x_2 = 12 \quad (7)$$

将 (7) 代入 (2) 整理得到

$$x_1 = 23 \quad (8)$$

求得笼子里有 23 只鸡，12 只兔，即

$$\begin{cases} x_1 = 23 \\ x_2 = 12 \end{cases} \quad (9)$$

几何视角

从几何角度来看，如下二元一次方程表示一条直线

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b \quad (10)$$

不同系数组合会影响直线的形态，让我们看几种情况。

当 $a_2 = 0$ 时，方程 (10) 变成

$$a_1x_1 = b \quad (11)$$

如图 1 (a) 所示，上式表示竖直直线。比如， $x_1 = -1$ 、 $x_1 = 2$ 。

当 $a_1 = 0$ 时，方程 (10) 变成

$$a_2x_2 = b \quad (12)$$

如图 1 (b) 所示，上式表示水平直线。比如， $x_2 = 1$ 、 $x_2 = -2$ 。

如图 1 (c) 所示，当 a_1 、 a_2 均不为 0 时，(10) 是斜率不为零的直线。

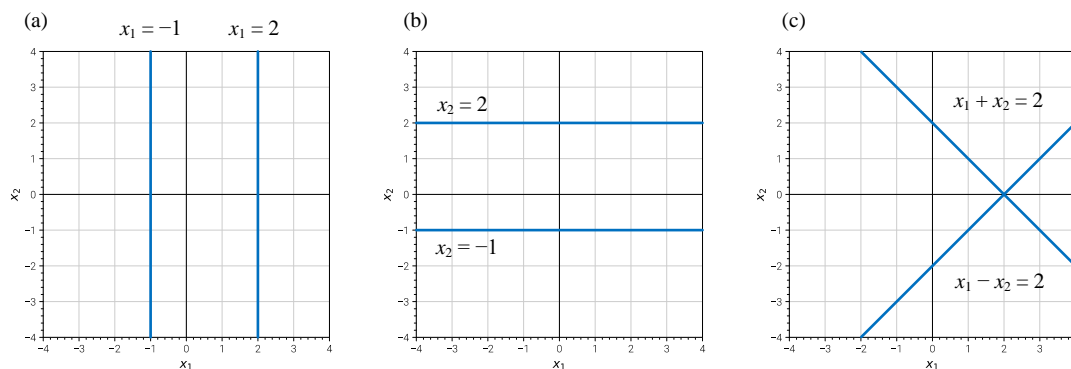


图 1. 几何视角看二元一次方程

图解鸡兔同笼

有了几何视角，我们可以用图解法求解鸡兔同笼问题。

如图 2 所示，红色线代表 $x_1 + x_2 = 35$ ，这意味着红色线上所有的点都满足 $x_1 + x_2 = 35$ 。

蓝色线代表 $2x_1 + 4x_2 = 94$ 。

两个未知数对应两个线性方程，未知数的个数与方程的数量相等。红色线、蓝色线的交点就是鸡兔同笼的解。

⚠ 注意，鸡兔同笼还有一个隐含条件，鸡的数量 x_1 、兔数量 x_2 都是非负整数。

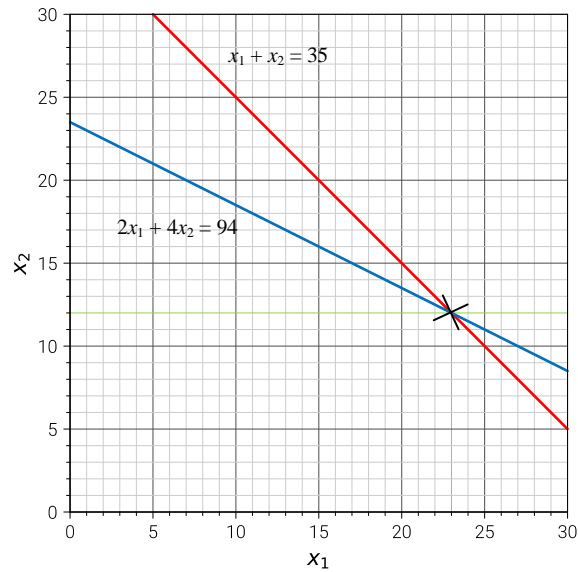


图 2. 图解鸡兔同笼问题

写成矩阵乘法形式

如图 3 (a) 所示, (4) 中第一个等式写成矩阵运算形式, 得到

$$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 35 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \end{bmatrix} \quad (13)$$

如图 3 (b) 所示, (4) 第二个等式也写成类似形式

$$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 94 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 94 \end{bmatrix} \quad (14)$$

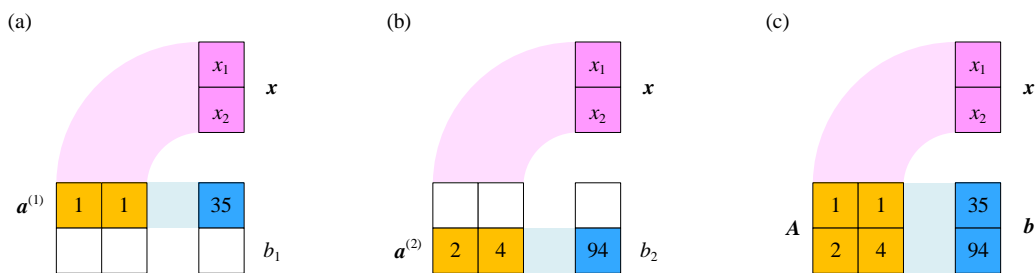


图 3. 把线性方程组写成矩阵乘法形式

如图 3 (c) 所示, 结合 (13) 和 (14), 我们使用矩阵形式写出了鸡兔同笼问题的线性方程组

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 35 \\ 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 94 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 94 \end{bmatrix} \quad (15)$$

(15) 可以写成

$$Ax = b \quad (16)$$

其中,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 35 \\ 94 \end{bmatrix} \quad (17)$$

矩阵 \mathbf{A} 叫系数矩阵 (coefficient matrix), \mathbf{b} 叫常数列向量 (vector of constant terms)。

\mathbf{x} 是未知变量构成的列向量, \mathbf{A} 为方阵且可逆, \mathbf{x} 可以利用下式求得

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (18)$$

计算 (17) 中方阵 \mathbf{A} 的行列式, $\det(\mathbf{A}) = 2$; 所以方阵 \mathbf{A} 可逆。

代入具体数值计算得到 \mathbf{x}

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 35 \\ 94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -0.5 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35 \\ 94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 12 \end{bmatrix} \quad (19)$$

代码 1 计算矩阵 \mathbf{A} 的逆, 然后求解线性方程组。

下面聊聊代码 1 中关键语句。

a 创建二维数组, 代表鸡兔同笼问题中的系数矩阵。矩阵 \mathbf{A} 的每一列分别对应不同的未知数, 例如鸡和兔的数量, 每一行对应一个方程。

b 创建二维数组, 代表鸡兔同笼问题中的常数列向量。数组的两个元素分别代表头数、脚数。

c 使用 `numpy.linalg.inv(A)` 计算 \mathbf{A} 的逆矩阵。

请大家在这句之前加上一句, 用 `numpy.linalg.det()` 判断矩阵 \mathbf{A} 是否可逆。

d 这两句用来验证矩阵、逆矩阵, 逆矩阵、矩阵的乘积都为单位矩阵。

e 用 `A_inv @ b` 计算出的结果就是 \mathbf{x} , 也就是问题的最终答案, 包含了鸡的数量和兔的数量。

代码 1. 逆矩阵求解线性方程组 |  LA_Ch07_01_01.ipynb

```
## 初始化
import numpy as np

## 鸡兔同笼系数矩阵
a A = np.array([[1, 1],
                [2, 4]])

## 常数列向量
b b = np.array([[35],
                [94]])

## 矩阵A的逆
c A_inv = np.linalg.inv(A)

# 验证
d A_inv @ A
A @ A_inv

## 求解
e A_inv @ b
```



LA_07_01_02.ipynb 用 `numpy.linalg.solve()` 求解鸡兔同笼问题, LA_07_01_03.ipynb 用 `SymPy` 求解这个问题, 请大家自行学习。

大家可能好奇, 为什么要用矩阵乘法形式表示线性方程组?

矩阵乘法形式表示线性方程组有多个优点。首先, 它使方程组的书写更加紧凑, 避免反复列出所有变量; 尤其在变量较多时, 能够显著简化表达。其次, 矩阵的性质提供了重要的信息, 例如通过分析矩阵 A 的秩, 可以迅速判断方程组是否有唯一解、无解或无穷多个解。此外, 矩阵表示还能推广到更复杂的线性代数问题, 如超定方程组的求解、特征值分解和线性变换等。最后, 在计算机计算中, 矩阵运算比逐个求解方程更高效, 能大幅提升计算速度和精度。

两个二元一次方程

有两个二元一次方程, 我们可以写成

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (20)$$

将其写成矩阵乘法形式:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

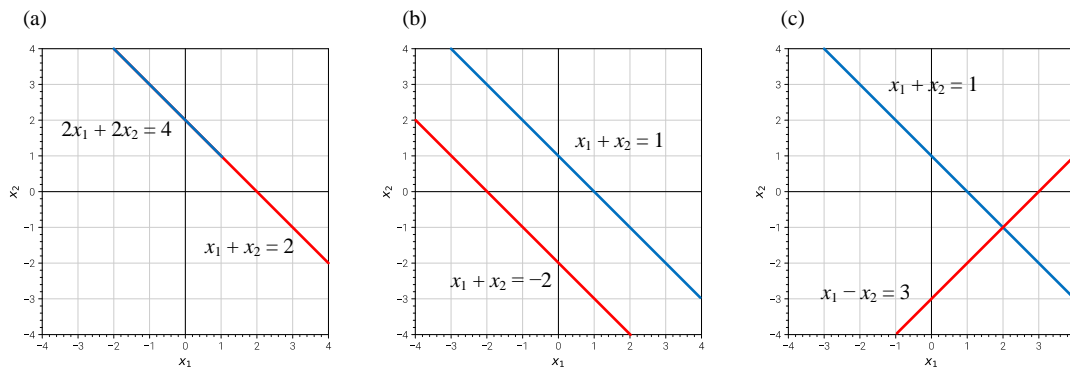


图 4. 不同解的数量

如图 4 (a) 所示, 两条直线完全重合, 方程组有无数解, 即

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}}_b \quad (22)$$

实际上是同一条直线，有无数解。上式矩阵 A 的行列式 $\det(A) = 0$ 。

如图 4 (b) 所示，两条直线平行，方程组无解，即

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_b \quad (23)$$

两条直线没有交点。我们发现上式矩阵 A 的行列式也是 0，即 $\det(A) = 0$ 。

如图 4 (c) 所示，如下两条直线相交，有一个解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_b \quad (24)$$

上式矩阵 A 的行列式为 -2，即 $\det(A) = -2$ ；这说明方阵 A 可逆。

显然矩阵 A 影响结果。下面让我们聊聊不同的 2×2 矩阵 A 形式对应的图形。

单位矩阵

如果矩阵 A 为单位矩阵，举个例子

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_b \quad (25)$$

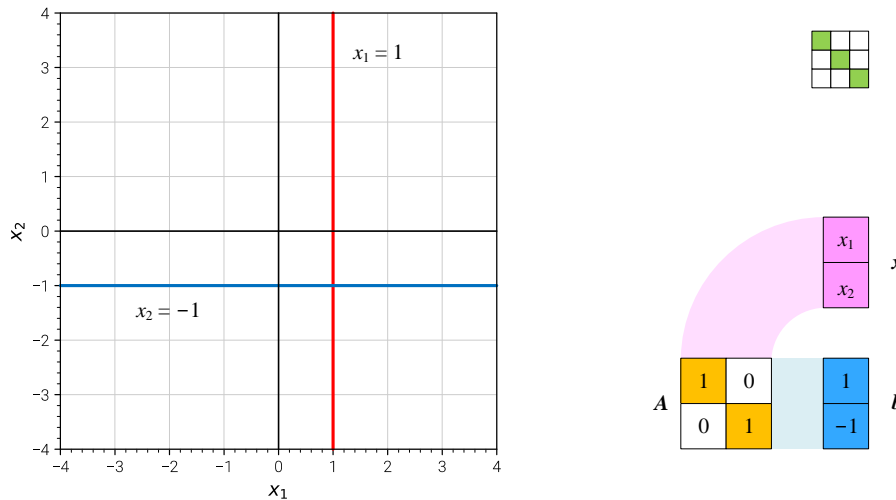
单位矩阵的逆为本身。

我们发现单位矩阵最“完美”！因为不要额外运算，列向量 b 本身线性方程组的解，即

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_b \quad (26)$$

也就是说，求解 $Ax = b$ 过程中，想办法把方阵 A 整理成单位矩阵便完成求解。

如图 5 所示， $x_1 = 1$ 对应图中竖直线 (红色)， $x_2 = -1$ 对应图中水平线 (蓝色)。两者的交点便是解。

图 5. 方阵 A 是单位矩阵

这也复合我们的期待，本节前文求解鸡兔同笼问题时，计算结果就可以写成

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 12 \end{bmatrix} \quad (27)$$

上式两个方程也分别对应竖直、水平直线。

交换 (25) 行，得到

$$\begin{cases} x_2 = -1 \\ x_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_b \quad (28)$$

图 6 所示为上式两个等式对应的图像。

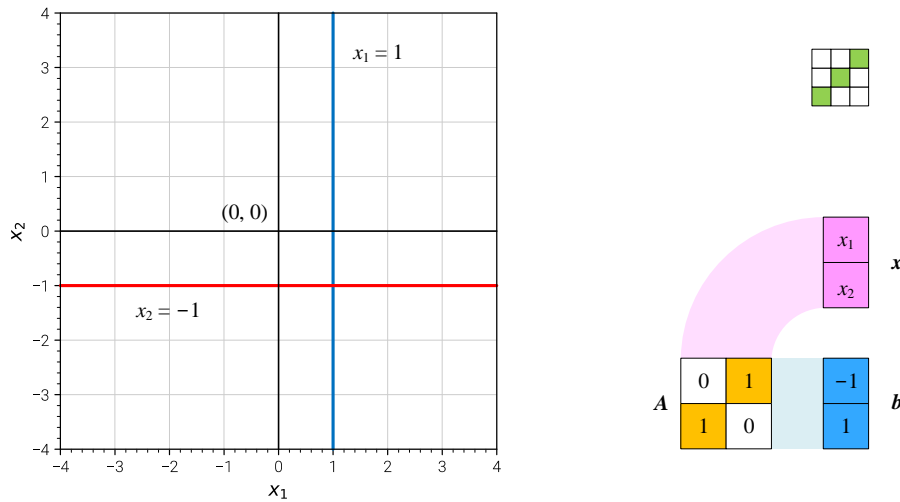
显然，**行交换** (row swapping) 方程，不影响结果。这是**初等行变换** (elementary row operations) 规则的一部分。

初等行变换是对矩阵的行完成的基本操作，包括**行交换**、**行数乘** (row scaling)、**行倍加** (row sum)。**初等行变换**的作用是通过行简化矩阵，特别是在求解线性方程组、计算矩阵的秩和求逆矩阵时常用。

(28) 矩阵 A 为置换矩阵，左乘 x 的作用就是“行交换”。这个方阵的行列式为 -1 。

(28) 的第一行记号为 R_1 ，第二行记号为 R_2 ；这两行的交换记作， $R_1 \leftrightarrow R_2$ 。

可能大家已经发现，(28) 本身也是直接就是线性方程组的解，但是没有 (25) 那么“自然”。

图 6. 方阵 A 是置换矩阵

如下图所示，**行交换**仅仅改变直线展示的先后顺序。

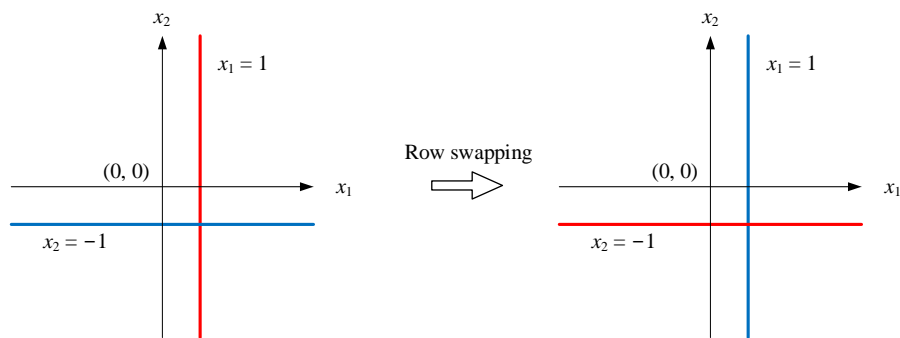


图 7. 行交换

对角方阵

如果矩阵 A 为对角方阵，举个例子

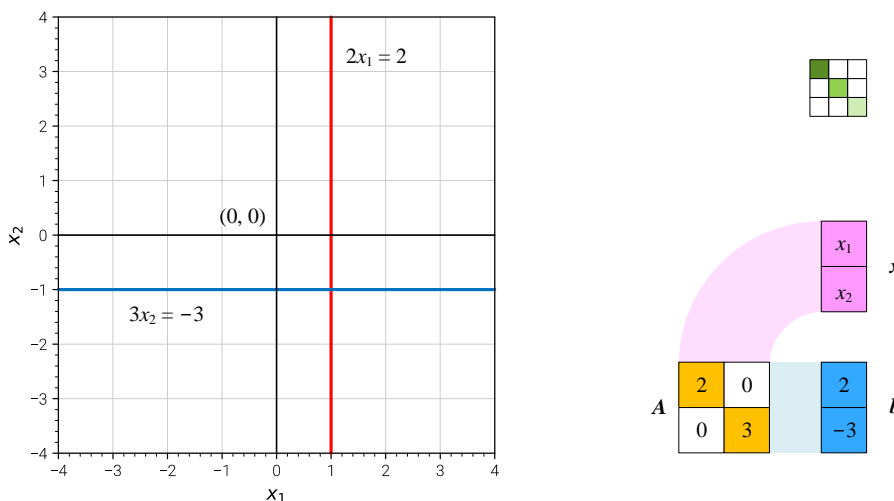
$$\begin{cases} 2x_1 = 2 \\ 3x_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}}_b \quad (29)$$

这个方阵的行列式为 6，方阵可逆。

想要求解 x ，需要对角方阵的逆

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}}_b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

如图 8 所示， $2x_1 = 2$ 对应竖直线 (红色)， $3x_2 = -3$ 对应水平线 (蓝色)。两者的交点便是解。

图 8. 方阵 A 是对角方阵

实际上，(29) 已经很接近二元一次方程组的解。仅仅需要对每个方程完成**行数乘** (row scaling)，将某一行的所有元素乘以一个**非零**标量，便可求得解。

如下图所示，**行数乘**并不改变直线位置、形状。

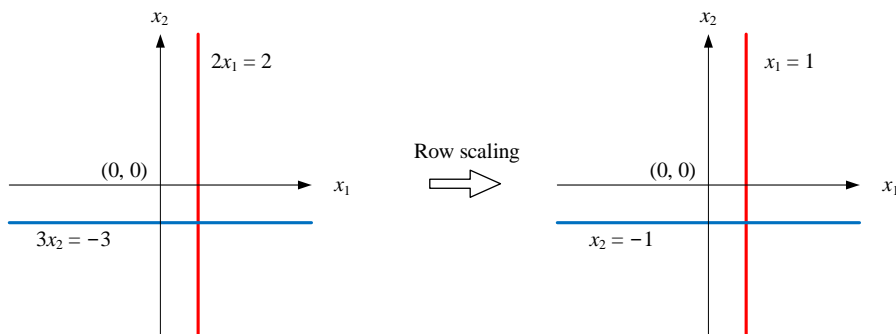


图 9. 行数乘

(29) 的第一行都除以 2，第二行都除以 3，得到

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

我们把这两步记作 $R_1/2 \rightarrow R_1$, $R_2/3 \rightarrow R_2$ 。而这两步运算也“藏在” (30) 的逆矩阵 A^{-1} 中！我们在逆矩阵 A^{-1} 中看到了 $1/2$ 和 $1/3$ 。

也就是说，哪怕 A 已经是对角方阵，我们也需要把 A 整理成单位矩阵。

上三角矩阵

如果矩阵 A 为上三角矩阵，举个例子

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_b \quad (32)$$

这个方阵的行列式为 1，存在逆。

要求解 x ，需要求上三角矩阵的逆

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

如图 10 所示， $x_1 + x_2 = 0$ 对应斜线（红色）， $x_2 = -1$ 对应水平线（蓝色）。两者的交点便是解。

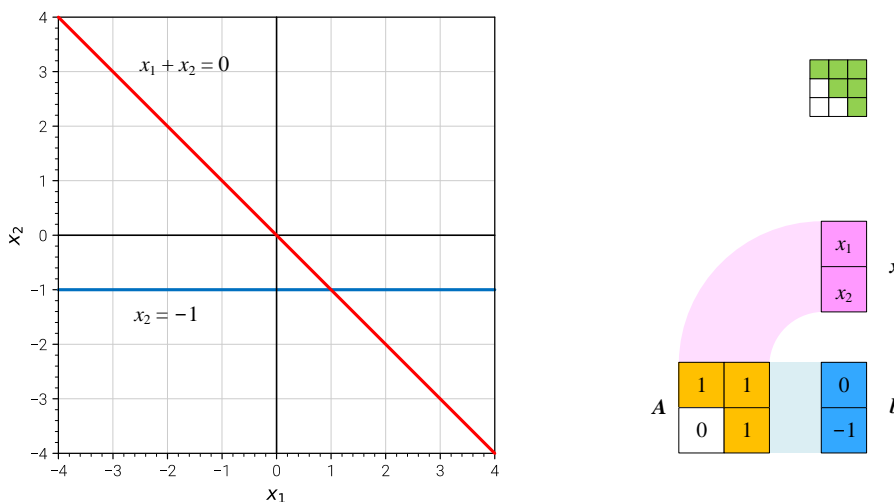


图 10. 方阵 A 是上三角矩阵

观察 (32)，通过第二行 R_2 ，我们已经知道了 x_2 的解；第一行 R_1 减去第二行 R_2 ，替换 R_1 ，便是 x_1 的解。这个过程记作 $R_1 - R_2 \rightarrow R_1$ 。这个操作叫做**行倍加** (row sum)，一行的非零倍数加到另一行。这个操作实际上也在 (33) 中的逆矩阵 A^{-1} 。

这个过程也是把上三角矩阵转化为单位矩阵！

如下图所示，**行倍加**改变直线的形状、位置。

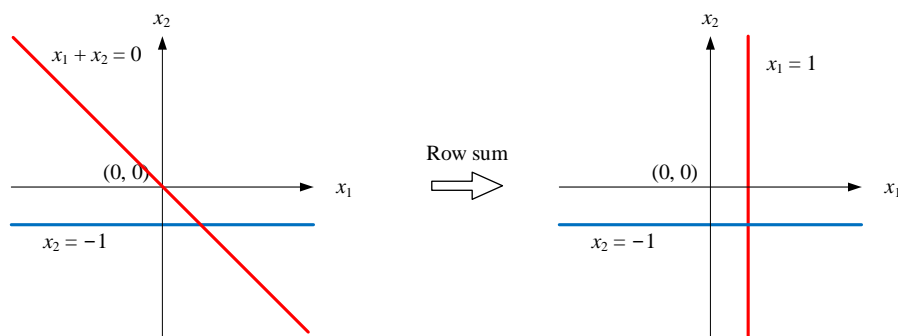


图 11. 行倍加

下三角矩阵

如果矩阵 A 为下三角矩阵，举个例子

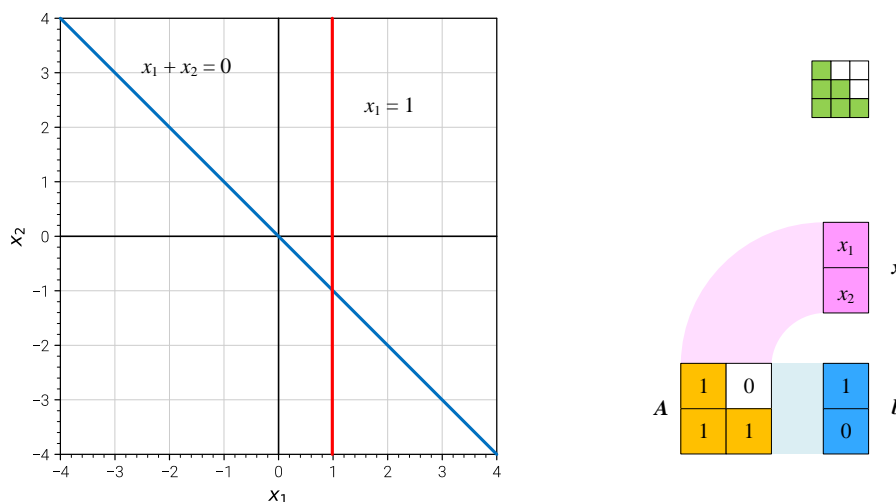
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_b \quad (34)$$

上式方阵 A 的行列式为 1，方阵存在逆。

想要求解 x ，需要求下三角矩阵的逆

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

如图 12 所示， $x_1 = 1$ 对应竖直线 (红色)， $x_1 + x_2 = 0$ 对应斜线 (蓝色)。两者的交点便是解。

图 12. 方阵 A 是下三角矩阵

观察 (34)，第一行 R_1 给了 x_1 的解；第二行 R_2 减去第一行 R_1 ，替换 R_2 ，便是 x_2 的解。这个过程记作 $R_2 - R_1 \rightarrow R_2$ 。显然，这个过程也是把上三角矩阵转化为单位矩阵！

一般方阵，行列式不为 0

如果矩阵 A 一般方阵，如果其行列式不为 0，说明 A 可逆，方程组存在唯一解，比如下例。

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_b \quad (36)$$

上式方阵 A 的行列式为 8，方阵存在逆。

想要求解 x ，需要求方阵的逆

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \\ -0.5 & 0.25 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

如图 13 所示， $x_1 - x_2 = 2$ 对应红色斜线， $2x_1 + 2x_2 = 0$ 对应蓝色斜线。两者的交点便是解。

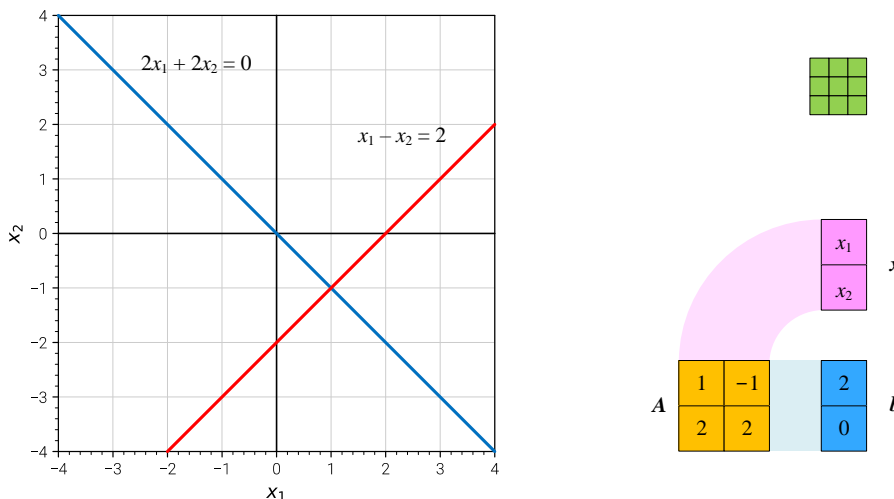


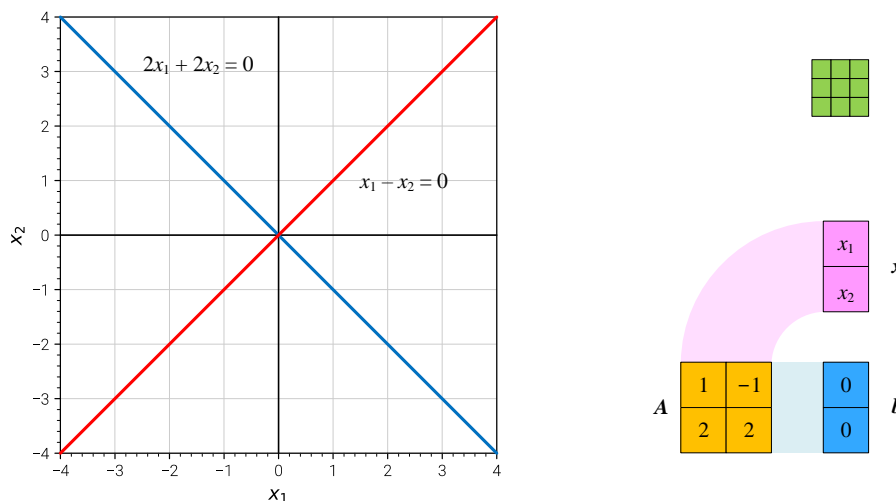
图 13. 方阵 A 行列式不为 0, $Ax = b$

? 请大家自己思考如何求解 (36)。提示，先把 A 处理成上三角或下三角，然后再获得对角阵，最后获得单位阵。

如下线性方程组叫**齐次线性方程组** (homogeneous linear system)。齐次线性方程组指的是常数项全部为零 (b 为零向量 0) 的线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_0 \quad (38)$$

如图 14 所示，这两条直线均通过原点；两条直线的交点就是上述线性方程组的解。

图 14. 方阵 A 行列式不为 0, $Ax=0$ 

LA_07_01_04.ipynb 通过绘制等高线来可视化线性方程组的解，请大家自行学习。

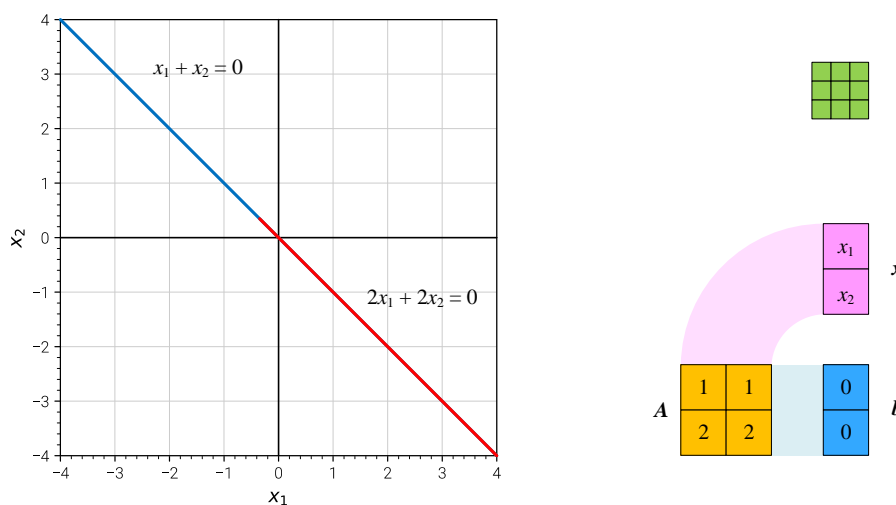
一般方阵，行列式为 0

下例中方阵 A 的行列式为 0,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_b \quad (39)$$

显然方阵 A 不存在逆。

如图 15 所示，代表上式的两条斜线重合，这意味着方程组有无数组解。

图 15. 方阵 A 行列式为 0, $Ax=b$ 无数组解

下例中方阵 A 的行列式也为 0,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}}_b \quad (40)$$

如图 16 所示，代表上式的两条斜线平行，这意味着方程组无解。

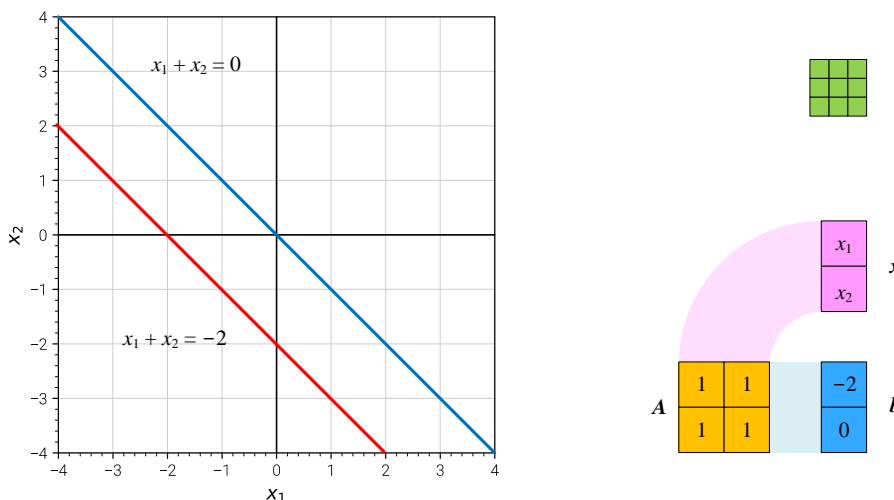


图 16. 方阵 A 行列式为 0, $Ax = b$ 无解

? 还有什么办法解释 (40) 呢?

大家是否还记得矩阵乘法第三视角? 用这个视角展开 (40) 中矩阵乘法

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

上式就是一个线性组合。大家已经发现 a_1 、 a_2 在同一条 (过原点) 直线上，即两者线性相关。然而， b 明显不在这条直线上!

这是帮助我们理解线性方程组的全新视角! 这是下一节的话题。



请大家用 DeepSeek/ChatGPT 等工具完成本节如下习题。

Q1. 把如下线性方程组写成矩阵乘法形式。

►
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 = 12 \end{cases}$$

►
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

►
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Q2. 请写 Python 求解上一题线性方程组。

Q3. 三元一次方程对应三维空间的平面，请大家思考如下图像对应的方程有怎样的形式。

