第六章 实数理论

笔记6.1 实数理论—相关基本概念.

一、确界

Def 1 称数集S上界集中的最小值为S的上确界，记为 sup S.

称数集S下界集中的最大值为S的下确界，记为 inf S.

Def 2 $\beta=\sup S \Leftrightarrow \begin{cases} ① \forall x\in S,\ x\le\beta \\ ② \forall \varepsilon>0.\ 均\exists x_0\in S\ 使\ x_0+\varepsilon>\beta \end{cases}$

$\alpha=\inf S \Leftrightarrow \begin{cases} ① \forall x\in S,\ x\ge\alpha \\ ② \forall \varepsilon>0.\ 均\exists x_0\in S\ 使\ x_0-\varepsilon<\alpha \end{cases}$

二、覆盖

Def 区间集：设J是由许多区间组成的集合. 用$\cup J$代表J中各区间的并集。$x\in\cup J \Leftrightarrow \exists I\in J,\ x\in I$.

Def 覆盖：设S是数集，J是区间集. 若对$\forall x\in S$ 均$\exists I\in J$ 使$x\in I$ （即 $S\subseteq \cup J$）.

则称J是S的一个覆盖，或J覆盖S.

Def ① 若J是S的覆盖，且J中所有元素均为开区间，则称J是S的开覆盖.

② 若J是S的覆盖，J_1也是S的覆盖且$J_1\subseteq J$. 则称 J_1是J的子覆盖.

③ 若J_1是J的子覆盖，且J_1是一个有限集合. 则称J_1是J的有限子覆盖.

三. 子列

定义 从数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 中按原有顺序选取无穷多项构成的数列称为 $\{x_n\}$ 的一个子列. 记为 $\{x_{n_k}\}$

<注> ① $\{x_{n_k}\}$ 下标为 k. $\{x_{n_k}\}\to a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=a$. ② $n_k \geq k$

定理1 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 则 $\{x_n\}$ 的任一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛, 且 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$.

证: ∵ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ ∴ 对 $\forall \varepsilon>0$ $\exists N>0$. $n>N$ 时 $|x_n-a|<\varepsilon$.

对 $\forall \varepsilon>0$. 取 $K=N$. 由于 $n_k\geq k>K=N$ ∴ $|x_{n_k}-a|<\varepsilon$ ∴ $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$.

<推论> 若 $\{x_n\}$ 的两子列收敛到不同值, 则 $\{x_n\}$ 发散.

定理2 若 $\{x_n\}$ 是无界数列. 则 $\{x_n\}$ 存在发散至无穷的子列 $\{x_{n_k}\}$

证: ∵ $\{x_n\}$ 无界 ∴ 对 $\forall M>0$. $\exists x_k$ 使 $|x_k|>M$.

- 取 $M_1=1$ ∴ $\exists n_1$ 使 $|x_{n_1}|>1$
- 取 $M_2=\max\{2,|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_{n_1}|\}$ $\exists n_2$ 使 $|x_{n_2}|>M_2$ ∴ $n_2>n_1$, $|x_{n_2}|>2$.
- 取 $M_3=\max\{3,|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_{n_2}|\}$ $\exists n_3$ 使 $|x_{n_3}|>M_3$ ∴ $n_3>n_2$, $|x_{n_3}|>3$.

……

得到 $\{x_n\}$ 子列 $\{x_{n_k}\}$, 满足 $x_{n_k}>k$ ∵ $\{k\}\to\infty$ ∴ $\{x_{n_k}\}\to\infty$.

定理3 若 $\{x_n\}$ 是某数列, $A\in\mathbb{R}$. 则: $\{x_n\}$ 有子列 $\{x_{n_k}\}\to A$ $\Leftrightarrow$ A 的任意邻域内包含 $\{x_n\}$ 无穷多项

证: $\Rightarrow$ ∵ $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=A$ ∴ 对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists K$, 当 $k>K$ 时 $|x_{n_k}-A|<\varepsilon$. 即 $x_{n_k}\in(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$

$\Leftarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$. 在 $(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$ 中存在 $\{x_n\}$ 无穷多项.

- 取 $\varepsilon_1=1$ $\exists n_1$, 使 $x_{n_1}\in(A-1,A+1)$.
- 取 $\varepsilon_2=\frac{1}{2}$ ∵ $(A-\varepsilon_2,A+\varepsilon_2)$ 中有 $\{x_n\}$ 无穷多项 ∴ $\exists n_2>n_1$, 使 $x_{n_2}\in(A-\frac{1}{2},A+\frac{1}{2})$

……

得到 $\{x_n\}$ 子列 $\{x_{n_k}\}$. 满足 $|x_{n_k}-A|<\frac{1}{k}$ ∴ $x_{n_k}\to A$.

定理4 若对$\{x_n\}$的任意子列$\{x_{n_k}\}$，均存在一个$\{x_{n_k}\}$的子列收敛于A，则$\{x_n\}$也收敛于A.

（每一个子列都存在一个二级子列，且它们极限值相等，则原数列也收敛于此极限）

证：假设$\{x_n\}$发散或极限不为A，则$\exists \varepsilon_0>0$ 对$\forall N\in \mathbb{N}^*$，$\exists n>N$ 使$|x_n-A|\geq\varepsilon_0$.

$\therefore \{x_n\}$存在子列$\{x_{n_k}\}$满足$|x_{n_k}-A|\geq\varepsilon_0$ 即在A的ε_0邻域内不含$\{x_{n_k}\}$任一项.

$\because \{x_{n_k}\}$存在收敛于A的子列. 由定理3. A的任意邻域内存在$\{x_{n_k}\}$无穷多项.

矛盾！ $\therefore x_n\to A$.

定理5 有界数列$\{x_n\}$发散 $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$含有两个收敛于不同极限的子列.

充分性：已知数列含有两个收敛于不同极限的子列. 假设此数列收敛.
则此数列的任意子列都收敛至相同的极限，与已知矛盾
$\therefore$假设不成立，数列发散.

必要性：已知某数列有界且发散. 由致密性定理，此数列必有收敛子列.
假设此数列不含两个收敛于不同极限的子列，
即$\exists A\in\mathbb{R}$，使得原数列的任意收敛子列极限均为A.
在有界数列中任意子列仍是有界数列
由致密性定理，原数列的任意子列包含极限为A的收敛子列.
[由上题结论] 整个数列收敛于A. 与数列发散矛盾！
$\therefore$原数列至少含有两个收敛于不同极限的子列.

四. 开区间与闭区间的互换

1、非空闭区间之间的交集可能是开区间。

2、非空开区间之间的交集可能是闭区间。

3、一非空集合与其子集之间的交集可能是空集。

$$\bigcap_{n=3}^{\infty}\left[1+\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right]=(1,2) \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}\right)=[1,2]$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0,\frac{1}{n}\right)=\varnothing$$

补充1 证明 $(0,1)\cap(0,\frac{1}{2})\cap\cdots\cap(0,\frac{1}{n})=\phi$

记 $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}(0,\frac{1}{n})$, $A_k=(0,\frac{1}{k})$. 以下证明对 $\forall x\in(0,1)$, $x\notin A$.

对 $\forall x\in(0,1)$ 取 $k=[\frac{1}{x}]+1$ 则 $x>\frac{1}{k}$.

$\therefore x\notin A_k$. $\therefore x\notin A$ $\because$ 对 $\forall x\in(0,1)$, $x\notin A$ $\therefore A=\phi$.

补充2 证明 $[1,+\infty)\cap[2,+\infty)\cap\cdots\cap[n,+\infty)=\phi$

记 $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}[n,+\infty)$, $A_k=[k,+\infty)$

对 $\forall x\in(-\infty,1)$, 显然 $x\notin A$

对 $\forall x\in[1,+\infty)$ 取 $k=[x]+1$ 则 $x\notin A_k$ $\therefore x\notin A$.

$\because$ 对 $\forall x\in R$, $x\notin A$ $\therefore A=\phi$.

补充3：求证 $[\frac{4}{3},\frac{5}{3}]\cup[\frac{5}{4},\frac{7}{4}]\cup\cdots\cup[1+\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}]=(1,2)$ $(n\geqslant 3)$

· 对于 $\forall n\in N^*$，$\because 1+\frac{1}{n}>1$，$2-\frac{1}{n}<2$

$\therefore \forall[1+\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}]\subseteq(1,2)$ $\quad\therefore \bigcup_{n=3}^{\infty}[1+\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}]\subseteq(1,2)$

· 取 $(1,2)$ 中任一 ξ，设 $\xi=1+\eta_1$，$\xi=2-\eta_2$ $(\eta_1>0,\eta_2>0)$

取 $N=\max\{[\frac{1}{\eta_1}]+1,[\frac{1}{\eta_2}]+1\}$ $\quad\therefore \xi\in[1+\frac{1}{N},2-\frac{1}{N}]$

对于 $(1,2)$ 中每个元素 ξ 都能找出一 N 使 $\xi\in[1+\frac{1}{N},2-\frac{1}{N}]$ $\quad\therefore (1,2)\subseteq\bigcup_{n=3}^{\infty}[1+\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}]$

综上：$\bigcup_{n=3}^{\infty}[1+\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}]=(1,2)$

补充4 证明 $\bigcap_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n})=[1,2]$

记 $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n})$，$A_i=(1-\frac{1}{i},2+\frac{1}{i})$，$B=[1,2]$

$\{a_n\}=\{a_n|a_n=1-\frac{1}{n},n=1,2,\cdots\}$，$\{b_n\}=\{b_n|b_n=2+\frac{1}{n},n=1,2,\cdots\}$

① $\because 1-\frac{1}{n}<1$，$2+\frac{1}{n}>2$ $\quad\therefore [1,2]\subseteq A_i$ $\quad\therefore [1,2]\subseteq A$

② 以下证明 $\bigcap_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n})\cap\left((-\infty,1)\cup(2,+\infty)\right)=\phi$：

1° 若 $x\leqslant 0$ 则显然 $x\notin\forall A_i$ $\quad x\notin A$

2° 若 $0<x<1$：设 $x=1-\xi_1$ $(0<\xi_1<1)$ 取 $k=[\frac{1}{\xi_1}]+1$ $\quad\therefore 1-\frac{1}{k}>1-\xi_1=x$ $\quad\therefore x\notin A_k$ $\quad\therefore x\notin A$

3° 若 $2<x<3$，设 $x=2+\xi_2$ $(0<\xi_2<1)$ 取 $m=[\frac{1}{\xi_2}]+1$ $\quad\therefore 1-\frac{1}{m}>1-\xi_2=x$ $\quad\therefore x\notin A_m$ $\quad\therefore x\notin A$

4° 若 $x\geqslant 3$ 则显然 $x\notin\forall A_i$ $\quad x\notin A$

综上：对于 $\forall x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$，$x\notin A$，命题得证 $\quad\therefore A\subseteq[1,2]$

$\therefore A=[1,2]$

南開大學 作业纸

系别______ 班级______ 姓名______ 第 页

笔记6.2 实数理论公理体系

① 确界原理　有上界的非空数集必有上确界.

② 单调收敛定理　单调有界数列必收敛.
$$\begin{cases} \{x_n\}\text{单增且有上界，则 } x_n \to \sup x_n \\ \{x_n\}\text{单减且有下界，则 } x_n \to \inf x_n \end{cases}$$

③ 闭区间套定理　对闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 若满足: ① $[a_{n+1},b_{n+1}] \subseteq [a_n,b_n]$　② $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

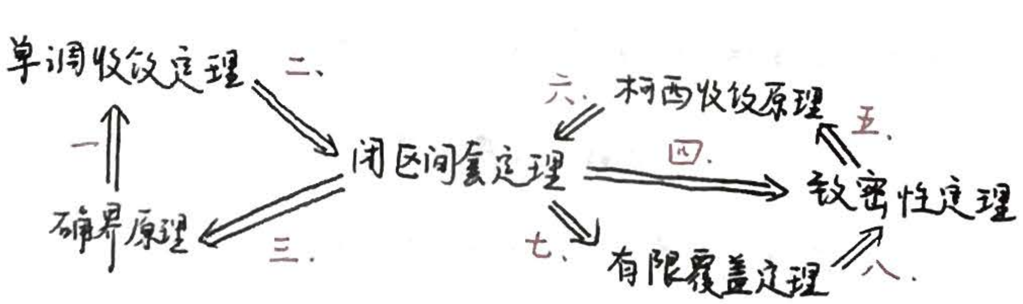
则有: ① 区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ 存在唯一公共点 ξ.　② $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

④ 致密性定理　任意有界数列必有收敛子列.

⑤ 柯西收敛原理　数列 $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $m,n > N^*$ 时 $|x_m - x_n| < \varepsilon$

⑥ 有限覆盖定理　闭区间的任意开覆盖都存在有限子覆盖.

〈公理体系〉



六条定理具有等价性. 承认任一条为公理，可证明其余五条.

一、确界原理 ⇒ 单调收敛定理

设数列 $\{x_n\}$ 递增且有上界.

由确界原理 $\{x_n\}$ 有上确界. 记 $A=\sup\{x_n\}$. 则: $\begin{cases} \forall n,\ x_n \le A \\ \forall \varepsilon>0.\ \exists N.\ x_N+\varepsilon>A \end{cases}$.

∴ 对 $\forall \varepsilon>0$. $\exists N\in\mathbb{N}^*$. $n>N$ 时. $A-\varepsilon<\underbrace{x_N\le x_n}_{\{x_n\}\text{递增}}\le A<A+\varepsilon$ 即 $|x_n-A|<\varepsilon$.

∴ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$. $\{x_n\}$ 收敛. 单调收敛定理得证.

二、单调收敛定理 ⇒ 闭区间套定理

设 $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 满足: ① $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$ ② $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

显然 $\{a_n\}$ 递增且上界为 b_1, $\{b_n\}$ 递减且下界为 a_1

由单调收敛定理 $\{a_n\}$. $\{b_n\}$ 均收敛. ∵ $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ ∴ 记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$

∵ $\{a_n\}$ 递增. $\{b_n\}$ 递减. ∴ $a_n\le\xi\le b_n$ 对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 均成立. ∴ $\xi\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$.

即 ξ 是区间列的公共点. 关于其唯一性:

设 $\xi'\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$. 即对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n\le\xi'\le b_n$ 均成立.

两边令 $n\to\infty$ ∵ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$ ∴ $\xi=\xi'$.

即 ξ 是区间列的唯一公共点. 闭区间套定理得证.

三、闭区间套定理 $\Rightarrow$ 确界原理

设 S 是有上界的非空数集. 若其存在最大值, 则 $\max S=\sup S$. 不妨设其不存在最大值.

任取 $a_1\in S$. 设 b_1 是 S 的一个上界.

① 将 $[a_1,b_1]$ 等分为 $[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$ 与 $[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$.
$\begin{cases}\text{若 } \frac{a_1+b_1}{2} \text{ 是 } S \text{ 的上界. 记 } [a_2,b_2]=[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}].\\ \text{若 } \frac{a_1+b_1}{2} \text{ 不是 } S \text{ 的上界. 记 } [a_2,b_2]=[\frac{a_1+b_1}{2},b_1].\end{cases}$

② 将 $[a_2,b_2]$ 等分为 $[a_2,\frac{a_2+b_2}{2}]$ 与 $[\frac{a_2+b_2}{2},b_2]$
$\begin{cases}\text{若 } \frac{a_2+b_2}{2} \text{ 是 } S \text{ 的上界 记 } [a_3,b_3]=[a_2,\frac{a_2+b_2}{2}]\\ \text{若 } \frac{a_2+b_2}{2} \text{ 不是 } S \text{ 的上界. 记 } [a_3,b_3]=[\frac{a_2+b_2}{2},b_2]\end{cases}$

....

由此得一区间列 $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. 满足: ① $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$. ② $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$. (由于 $b_n-a_n=\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}$)

区间列中, $\forall b_n$ 均为 S 的上界. $\forall a_n$ 均不为 S 的上界

由闭区间套定理. ξ 是区间列的唯一公共点 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$.

① 因为任意 b_n 均是 S 的上界 $\therefore$ 对 $\forall x\in S$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $x\le b_n \Rightarrow x\le\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$.

② $\because \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$. $\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N\in\mathbb{N}^*$, $n>N$ 时 $|a_n-\xi|<\varepsilon$. 因为任意 a_n 均不是 S 的上界

$\therefore \exists x_0\in S$ 使 $x_0>a_n$. 又 $\because \xi-\varepsilon<a_n<\xi+\varepsilon$ $\therefore x_0>a_n>\xi-\varepsilon$.

由①②知 ξ 是 S 的上确界. 确界原理得证.

四、闭区间套定理 ⇒ 致密性定理

设$\{x_n\}$是一个有界数列，对$\forall n$，$a\le x_n\le b$.

① 把$[a,b]$等分为$[a,\frac{a+b}{2}]$与$[\frac{a+b}{2},b]$. $\begin{cases}若[a,\frac{a+b}{2}]中含有\{x_n\}无穷多项，记[a_1,b_1]=[a,\frac{a+b}{2}]\\ 若[\frac{a+b}{2},b]中含有\{x_n\}无穷多项，记[a_1,b_1]=[\frac{a+b}{2},b]\end{cases}$

② 把$[a_1,b_1]$等分为$[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$与$[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$. $\begin{cases}若[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]中含有\{x_n\}无穷多项，记[a_2,b_2]=[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]\\ 若[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]中含有\{x_n\}无穷多项，记[a_2,b_2]=[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]\end{cases}$

……

得到区间列$\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$，满足：① $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$. ② $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$. （由$b_n-a_n=\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}$）

其满足：$\forall[a_n,b_n]$中均含有$\{x_n\}$无穷多项.

由闭区间套定理，$\xi=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$.

下证$\{x_n\}$存在某个收敛于ξ的子列$\{x_{n_k}\}$:

① ∵$[a_1,b_1]$中含有$\{x_n\}$无穷多项，取$x_{n_1}\in[a_1,b_1]$

② ∵$[a_2,b_2]$中含有$\{x_n\}$无穷多项，取$x_{n_2}\in[a_2,b_2]$且满足$n_2>n_1$.

……

得到$\{x_n\}$子列$\{x_{n_k}\}$，且$a_k\le x_{n_k}\le b_k$.　$(k=1,2,\cdots)$

∵$\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}b_k=\xi$，由两边夹定理 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$.

即$\{x_n\}$存在收敛子列，致密性定理得证.

五、致密性定理 ⇒ 柯西收敛原理

⇐ 已知 对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in \mathbb{N}^*$，$m,n>N$ 时，$|x_m-x_n|<\varepsilon$。 求证 $\{x_n\}$ 收敛：

(1) 先证 $\{x_n\}$ 有界：记 $\varepsilon=1$，$\exists N_0$，$m,n>N_0$ 时 $|x_m-x_n|<1$ 取 $m=N_0+1$。 $\therefore |x_n-x_{N_0+1}|<1$

$\therefore |x_n|-|x_{N_0+1}|<|x_n-x_{N_0+1}|<1$ 即 $x_n<|x_{N_0+1}|+\varepsilon$ 对 $\forall n>N_0$ 均成立.

记 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_{N_0}|,|x_{N_0+1}|,|x_{N_0+1}|+1\}$。则对 $\forall n$，$|x_n|\le M$。 $\{x_n\}$ 有界.

由致密性定理. $\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$。 设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=A$.

(2) 再证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$：$\because x_{n_k}\to A$ $\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists K\in\mathbb{N}^*$，$k>K$ 时 $|x_{n_k}-A|<\varepsilon$.

对上述的 $\varepsilon>0$。由已知。$\exists N\in\mathbb{N}^*$，$m,n>N$ 时 $|x_n-x_m|<\varepsilon$.

对上述的 N、K。取 $k_0=\max\{K+1,N+1\}$

$\because k_0>K$。 $\therefore |x_{n_{k_0}}-A|<\varepsilon$。 $\because n_{k_0}\ge k_0>N$ $\therefore |x_n-x_{n_{k_0}}|<\varepsilon$.

$\therefore |x_n-A|<|x_n-x_{n_{k_0}}|+|x_{n_{k_0}}-A|<2\varepsilon$。 $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$。 $\{x_n\}$ 收敛.

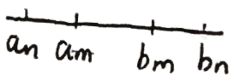
⇒ 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$。即对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^*$，$n>N$ 时 $|x_n-A|<\varepsilon$.

$\therefore m,n>N$ 时. $|x_n-x_m|<|x_n-A|+|x_n-A|<2\varepsilon$。 得证.

六、柯西收敛原理 ⇒ 闭区间套定理

设闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 满足：① $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$ ② $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

$\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$。$\exists N\in\mathbb{N}^*$，$n>N$ 时. $|b_n-a_n|<\varepsilon$.



不妨设 $m>n$。对 $\forall m,n>N$，$\because |b_n-b_m|\le|b_n-a_n|<\varepsilon$，$|a_n-a_m|\le|a_n-b_n|<\varepsilon$

由柯西收敛原理. $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 均收敛且极限相等. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$.

$\because a_n\le\xi\le b_n$ 对 $\forall n$ 成立 $\therefore \xi=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$ 关于其唯一性：

不妨设 $\xi'\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$。由 $a_n\le\xi'\le b_n$。两边 $n\to\infty$，$\therefore \xi'=\xi$.

七、闭区间套定理 ⇒ 有限覆盖定理

设 $S=[a,b]$. J 是开区间集且 J 覆盖 S. 反设 $[a,b]$ 不能被 J 中有限个开区间所覆盖.

① 将 $[a,b]$ 等分为 $[a,\frac{a+b}{2}]$ 与 $[\frac{a+b}{2},b]$. $\begin{cases} \text{若 } [a,\frac{a+b}{2}] \text{ 不能被 } J \text{ 中有限个开区间所覆盖. 记 } [a_1,b_1]=[a,\frac{a+b}{2}] \\ \text{else} \Rightarrow \text{记 } [a_1,b_1]=[\frac{a+b}{2},b] \end{cases}$

② 将 $[a_1,b_1]$ 等分为 $[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$ 与 $[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$ $\begin{cases} \text{若 } [a_1,\frac{a_1+b_1}{2}] \text{ 不能被 } J \text{ 中有限个开区间所覆盖. 记 } [a_2,b_2]=[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}] \\ \text{else} \Rightarrow \text{记 } [a_2,b_2]=[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]. \end{cases}$

……

有此得到闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. 满足: ① $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$. ② $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$. $(b_n-a_n=\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}})$

由闭区间套定理. $\exists!\ \xi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$, 且 $\xi=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$.

且 $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 满足: 其中的任一个闭区间均不能被 J 中有限个区间所覆盖.

$\because \xi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$ $\therefore \xi\in[a,b]$. $\because J$ 是 $[a,b]$ 的覆盖.

$\therefore \exists(\alpha,\beta)\in J$. 使 $\xi\in(\alpha,\beta)$. 又 $\because a_n<\xi<b_n$ 对 $\forall n$ 均成立. 且 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi$.

$\therefore \exists N\in\mathbb{N}^*$. $n>N$ 时. $[a_n,b_n]\subseteq(\alpha,\beta)$. (注: $[a_n,b_n]$ 可以无限收缩于 ξ)

这与 $\{[a_n,b_n]\}$ 中任一个区间均不能被 J 中的有限区间覆盖所矛盾.

$\therefore [a,b]$ 能被 J 中有限个开区间所覆盖. 即 $[a,b]$ 的任意开覆盖存在有限子覆盖.

八、有限覆盖定理 ⇒ 致密性定理.

设 $\{x_n\}$ 满足 $a \le x_n \le b$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$. 由笔记6.1 定理3.

只需证 $\exists \xi \in [a,b]$, 使 ξ 的任意邻域内存在 $\{x_n\}$ 的无穷多项.

反设对 $\forall \xi \in [a,b]$. $\exists \varepsilon_\xi > 0$. 在 $(\xi - \varepsilon_\xi, \xi + \varepsilon_\xi)$ 内仅有 $\{x_n\}$ 有限项.

记 $J = \{(\xi - \varepsilon_\xi, \xi + \varepsilon_\xi) \mid \xi \in [a,b]\}$. 则 J 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖.

由有限覆盖定理. J 存在有限子覆盖 $J_1 = \{(\xi_1 - \varepsilon_{\xi_1}, \xi_1 + \varepsilon_{\xi_1}), \cdots, (\xi_m - \varepsilon_{\xi_m}, \xi_m + \varepsilon_{\xi_m}) \mid \xi_1, \cdots, \xi_m \in [a,b]\}$.

即 $[a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (\xi_i - \varepsilon_{\xi_i}, \xi_i + \varepsilon_{\xi_i})$. 又 $\because$ J_1 中每个开区间内仅有 $\{x_n\}$ 有限项.

$\therefore$ 对 $i = 1, 2, \cdots, m$. $\exists N_i \in \mathbb{N}^*$. $n > N_i$ 时 $x_n \notin (\xi_i - \varepsilon_{\xi_i}, \xi_i + \varepsilon_{\xi_i})$.

取 $N = \max\{N_1, \cdots, N_m\}$ 则 $n > N$ 时. $x_n \notin \bigcup_{i=1}^{m} (\xi_i - \varepsilon_{\xi_i}, \xi_i + \varepsilon_{\xi_i})$. $\therefore x_n \notin [a,b]$

这与 $a \le x_n \le b$ 矛盾. $\therefore$ $\exists \xi \in [a,b]$ 使 ξ 的任意邻域内存在 $\{x_n\}$ 无穷多项.

即 $\{x_n\}$ 存在收敛于 ξ 的子列.

笔记6.3 闭区间上连续函数的性质

一、闭区间上连续函数有界定理.

证明：$\because f(x)\in C[a,b]$. $\therefore$ 对 $\forall \xi\in[a,b]$. $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta_\xi>0$ $x\in(\xi-\delta_\xi,\xi+\delta_\xi)\cap[a,b]$ 时 $|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$

取 $\varepsilon=1$. $\therefore |f(x)|<|f(\xi)|+1$ 对 $\forall x\in(\xi-\delta_\xi,\xi+\delta_\xi)$ 均成立.

记 $J=\{(\xi-\delta_\xi,\xi+\delta_\xi)\,|\,\xi\in[a,b]\}$. J是 $[a,b]$ 的开覆盖.

由有限覆盖定理. J存在有限子覆盖 $J_1=\{(\xi_1-\delta_{\xi_1},\xi_1+\delta_{\xi_1}),\cdots,(\xi_m-\delta_{\xi_m},\xi_m+\delta_{\xi_m})\,|\,\xi_1,\cdots\xi_m\in[a,b]\}$

即 $[a,b]\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{m}(\xi_i-\delta_{\xi_i},\xi_i+\delta_{\xi_i})$ 　　又$\because$ 在 $(\xi_i-\delta_{\xi_i},\xi_i+\delta_{\xi_i})$ 上 $|f(x)|<|f(\xi_i)|+1$.

$\therefore$ 取 $M=\max\{|f(\xi_1)|+1,|f(\xi_2)|+1,\cdots,|f(\xi_m)|+1\}$. 则 $|f(x)|\le M$ 对 $\forall x\in[a,b]$ 均成立

二、最大最小值定理（闭区间上连续函数必能取到最大值与最小值）

证明：$\because f(x)\in C[a,b]$. 由闭区间连续函数有界定理. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

由确界原理 $f(x)$ 有上确界和下确界. 记 $\alpha=\inf\limits_{[a,b]}f(x)$, $\beta=\sup\limits_{[a,b]}f(x)$.

由上确界定义. $\forall n\in\mathbb{N}^*$. $\exists x_n\in[a,b]$ 使 $\beta-\frac{1}{n}<f(x_n)\le\beta$

$\because x_n\in[a,b]$. 由致密性定理 $\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$. 设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi\in[a,b]$.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\beta$ 且 $\{f(x_{n_k})\}$ 是 $\{f(x_n)\}$ 的子列 　$\therefore \lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\beta$

由 $f(x)$ 连续 　$\therefore \lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k})$ 即 $f(\xi)=\beta$. 即存在 $\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=\sup\limits_{[a,b]}f(x)$.

关于下确界，同证.

三、根的存在定理（$f(x)$在$[a,b]$连续且$f(a)\cdot f(b)<0$，则$f(x)=0$在(a,b)内必有根ξ存在）

证明：不妨设$f(a)<0$，$f(b)>0$.

①将$[a,b]$等分为$[a,\frac{a+b}{2}]$与$[\frac{a+b}{2},b]$. $\begin{cases}\text{若} f(\frac{a+b}{2})=0. & \xi=\frac{a+b}{2}\text{是}f(x)\text{的根}.\\ \text{若} f(\frac{a+b}{2})>0. & \text{记}[a_1,b_1]=[a,\frac{a+b}{2}]\\ \text{若} f(\frac{a+b}{2})<0 & \text{记}[a_1,b_1]=[\frac{a+b}{2},b].\end{cases}$ $f(a_1)<0$ $f(b_1)>0$

②将$[a_1,b_1]$等分为$[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$与$[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$，$\{\cdots$

由此得到闭区间列$\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. 其满足：①$[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$ ②$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

- 若$\exists f(\frac{a_n+b_n}{2})=0$. 则$\xi=\frac{a_n+b_n}{2}$是$f(x)$的根.
- 若对$\forall n$，$f(\frac{a_n+b_n}{2})\neq0$. 则对区间列中任一$[a_n,b_n]$，$a_n<0<b_n$.

此外由闭区间套定理. 有$\xi=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$. $\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

由$f(x)$在ξ连续 $\therefore f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)\le0$，$f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)\ge0$ $\therefore f(\xi)=0$.

四、介值定理（$f(x)\in C[a,b]$且$f(a)\neq f(b)$. 则对任意介于$f(a)$与$f(b)$之间实数C，$\exists\,\xi\in(a,b)$使$f(\xi)=C$.）

证明：令$g(x)=f(x)-C$. 则$g(x)$在$[a,b]$连续且$g(a)\cdot g(b)<0$.

由根的存在定理. $\exists\,\xi\in(a,b)$使$g(\xi)=0$ 即$f(\xi)=C$.

笔记6.4 一致连续

一、一致连续的定义

Df 对$\forall \varepsilon>0$. $\exists \delta>0$. $\forall x_1,x_2\in I$. 只要$|x_1-x_2|<\delta$ 有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 则称$f(x)$在$I$上一致连续.

连续: $\forall \varepsilon>0$. $\exists \delta>0$ $\forall x_0\in I$ 当$|x-x_0|<\delta$时 有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 则称$f(x)$在I上连续.

<一致连续与连续的区别>

①在连续定义中. δ与x_0和ε均有关. 一致连续定义中只和ε有关.

②连续描述的是逐点的局部性质. 一致连续描述的是区间段上的全局性质.

<非一致连续的定义>

Df1 $\exists \varepsilon_0>0$. $\forall \delta>0$. $\exists x_1,x_2\in I$ 且$|x_1-x_2|<\delta$, 使$|f(x_1)-f(x_2)|\geq \varepsilon_0$

Df2 $\exists \varepsilon_0>0$. 及两数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}\subseteq I$. $x_n-y_n\to 0$, 而$|f(x_n)-f(y_n)|\geq \varepsilon_0$

二、一致连续性定理: 闭区间上的连续函数必一致连续

证明: 反设$f(x)$在$[a,b]$连续但非一致连续. 即$\exists \varepsilon_0>0$. $\forall \delta>0$. $\exists x_1,x_2\in[a,b]$, $|x_1-x_2|<\delta$ 使$|f(x_1)-f(x_2)|\geq \varepsilon_0$

取$\delta_n=\frac{1}{n}>0$ $(n=1,2,\cdots)$ 因而有数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}\subseteq[a,b]$, $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$ 且$|f(x_n)-f(y_n)|\geq \varepsilon_0$.

$\because a\leq x_n\leq b$. 由致密性定理, $\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$. 设$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=\xi$. 则$\{x_{n_k}\}$的任一子列收敛于$\xi$.

$\because a\leq y_n\leq b$ $\therefore\{y_{n_k}\}$有界. 由致密性定理. $\{y_{n_k}\}$有收敛子列$\{y_{n_{k_l}}\}$.

$\because \lim\limits_{l\to\infty} x_{n_{k_l}}=\xi$. $|x_{n_{k_l}}-y_{n_{k_l}}|<\frac{1}{n_{k_l}}$ $\therefore \lim\limits_{l\to\infty}(x_{n_{k_l}}-y_{n_{k_l}})=0$ $\therefore y_{n_{k_l}}\to\xi$. $(l\to\infty)$.

此时由$f(x)$在ξ连续 $\therefore \lim\limits_{x\to\xi} f(x)=f(\xi)$ $\therefore \lim\limits_{l\to\infty} f(x_{n_{k_l}})=\lim\limits_{l\to\infty} f(y_{n_{k_l}})=f(\xi)$

$\therefore \lim\limits_{l\to\infty}|f(x_{n_{k_l}})-f(y_{n_{k_l}})|=0$ 与$|f(x_{n_{k_l}})-f(y_{n_{k_l}})|\geq\varepsilon_0$ 矛盾.

笔记6.5 上极限与下极限.

一、上、下极限的定义

Def 1. $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{n\geq k}\{x_n\}$ $\qquad$ $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{k\to\infty} \inf\limits_{n\geq k}\{x_n\}$

Def 2.

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = H \iff \begin{cases} \text{对}\forall\varepsilon>0,\ (H-\varepsilon, H+\varepsilon)\text{内有}\{x_n\}\text{无限项 而}[H+\varepsilon,+\infty)\text{中仅有有限项}\ (H\text{为有限数时}) \\ \text{对}\forall M>0\ \ (M,+\infty)\text{内有}\{x_n\}\text{无限项}\ \ (H=+\infty\text{时}) \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty \quad (H=-\infty\text{时}). \end{cases}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = h \iff \begin{cases} \text{对}\forall\varepsilon>0\ \ (h-\varepsilon, h+\varepsilon)\text{内含有}\{x_n\}\text{无限项 而}(-\infty,h-\varepsilon]\text{中仅存有限项}\ (h\text{为有限数时}) \\ \text{对}\forall M>0.\ (-\infty,-M)\text{内有}\{x_n\}\text{无限项}\ \ (h=-\infty\text{时}) \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty \quad (h=+\infty\text{时}) \end{cases}$$

Def 3. 记 $A=\{a \mid \{x_n\}$存在某个收敛于a的子列$\}$. A中可含$\pm\infty$.

则 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \sup A$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \inf A$

二、上下极限与极限的关系

定理. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \iff \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = A$. ($A$可为$\pm\infty$).

练习6.1

1. (1) $\{-1, -2, -3, \cdots\}$

(2) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$

(3) $\{x \mid x = \sin\frac{n}{2}\pi \cdot \frac{n}{n+1}, n \in N^*\}$

2. ∵对$\forall x \in X$均存在$y \in Y$，使$x \le y$，且Y有上确界$\sup Y$

∴$x \le \sup Y$恒成立，∴$\sup Y$是X的上界

∵X是非空实数集 ∴X有上确界，设之为$\sup X$

以下反设$\sup X > \sup Y$，设$\sup X = \sup Y + C$（C为正的常数）

∵对$\forall \varepsilon > 0$，有$x \in X$使

$$x > \sup X - \varepsilon$$

取$\varepsilon = C$，∴$\exists x_0 \in X$ s.t.

$x_0 > \sup X - C = \sup Y \ge y$（$y$为$Y$中任意元素）

∴对于x_0，在Y中找不到元素y使$x \le y$，矛盾

∴$\sup X \le \sup Y$

南開大學 作业纸

系别＿＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿ 第 页

3. ∵

①先证 X 存在上确界：

假设 X 无上界 则对 $\forall M\in R$. $\exists x_0\in X$ 使 $x_0>M$.

∴取 Y 中一元素 y_0 则有 $x_0>y_0$

与 $x\le y$ 恒成立矛盾，∴ X 有上界

∵ X 是非空数集 ∴ X 存在上确界 $\sup X$

②再证 Y 存在下确界：

∵又对 $\forall x\in X$, $\forall y\in Y$. 有 $y\geq x$ 成立.

而 $x\le \sup X$ 恒成立 ∴ $y\geq \sup X$

∴ Y 有下界. 又 Y 是非空数集 ∴ Y 存在下确界 $\inf Y$.

③证明 $\sup X\le \inf Y$:

假设 $\sup X>\inf Y$, 设 $\sup X=\inf Y+C$ $(C>0)$.

∵对 $\forall \varepsilon_1>0$. $\exists y_1\in Y$ s.t. $y_1-\varepsilon_1<\inf Y$.

取 $\varepsilon_1=C$ ∴ $y_1<\inf Y+C=\sup X$. 设 $y_1=\sup X-C_2$ $(C_2>0)$

又∵对 $\forall \varepsilon_2>0$ $\exists x_1\in X$ s.t. $x_1+\varepsilon_2>\sup X$.

取 $\varepsilon_2=C_2$,

则 $x_1>\sup X-C_2=y_1$

与 $\forall x,y$ 有 $x\le y$ 矛盾 ∴ $\sup X\le\inf Y$.

4. (1)

$\because$ 对$\forall x$. $x \le \sup X$ $\therefore a>0$时 $ax \le a\sup X$.

$\because$对$\forall \varepsilon>0$ $\exists x$ 使 $x+\varepsilon>\sup X$

$\therefore a>0$时 $ax+a\varepsilon > a\sup X$.

令 $a\varepsilon=\eta$, η可取遍全体正数

$\therefore$对$\forall\eta>0$, $\exists x$使$ax+\eta>a\sup X$.

对$\forall x$. $ax\le a\sup X$

$\Rightarrow a\sup X=\sup(aX)$

同理 $a\inf X=\inf(aX)$

(2) 对$\forall x$ $x\ge\inf X$ $\therefore a<0$时 $ax\le a\inf X$.

对$\forall\varepsilon>0$. $\exists x$ 使 $x-\varepsilon<\inf X$

取 $\varepsilon=\frac{\eta}{-a}$ $(\eta>0)$ $(a<0)$

$\therefore$ $ax+\eta>a\inf X$. (η为$\forall$正数)

$ax\le a\inf X$.

$\Rightarrow \sup(aX)=a\inf X$

同理 $\inf(aX)=a\sup X$.

南開大學 作业纸

系别＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 第 页

5.

①证 $\sup X \le \sup Y$:

假设 $\sup X > \sup Y$.

$\because X \subseteq Y$. $\therefore$ 对 $\forall x \in X$ 即 $x \in Y$.

有 $x \le \sup Y$.

且对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in X$ 使 $x + \varepsilon > \sup X > \sup Y$.

$\therefore \sup X = \sup Y$. 与 $\sup X > \sup Y$ 矛盾

$\therefore \sup X \le \sup Y$.

②证 $\inf X \ge \inf Y$.

假设 $\inf X < \inf Y$.

$\because X \subseteq Y$ 对 $\forall x \in X$ 即 $x \in Y$

有 $x \ge \inf Y$

且对 $\forall \varepsilon > 0$. $\exists x \in X$ 使 $x - \varepsilon < \inf X < \inf Y$.

$\therefore \inf X = \inf Y$. 与 $\inf X < \inf Y$ 矛盾

$\therefore \inf X \ge \inf Y$.

6.(1) $\sup A=1$, $\inf A=-1$

下为证明: $\frac{(-1)^n n+1}{n+2}=\begin{cases}\frac{-n+1}{n+2}=\frac{3}{n+2}-1 & n\text{为奇}\\ \frac{n+1}{n+2}=1-\frac{1}{n+2} & n\text{为偶}\end{cases}$

显然对 $\forall x\in A$. 有 $-1<x<1$ 成立.

1° n 为奇时. 取 $N_1=\left[\frac{3}{\varepsilon+2}\right]$

当 $n>N_1$ 时. $\left|\frac{3}{n+2}-1-1\right|<\varepsilon$ 即 $|x-1|<\varepsilon$ (ε 为任意正数.

∴ 对 $\forall\varepsilon>0$ 有 $x+\varepsilon>1$.

取 $N_2=\left[\frac{3}{\varepsilon}\right]$ 当 $n>N_2$ 时 $\left|\frac{3}{n+2}-1+1\right|<\varepsilon$ 即 $|x+1|<\varepsilon$ ($\varepsilon>0$)

∴ 对 $\forall\varepsilon>0$ 有 $x-\varepsilon<-1$.

2° n 为偶时同理可证

∴ 以上可证得 $\sup A=1$, $\inf A=-1$.

6.(2)

$\sup B=1$. $\inf B=-1$.

先证 $-1\leq \frac{x^2\sin x}{x^2+1}\leq 1$:

当~~x~~ $\sin x\geq 0$ 时 $0<\frac{x^2\sin x}{x^2+1}\leq\frac{(x^2+1)\sin x}{x^2+1}=\sin x\leq 1$

当 $\sin x<0$ 时. $0>\frac{x^2\sin x}{x^2+1}>\frac{(x^2+1)\sin x}{x^2+1}=\sin x\geq -1$.

下证: 对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists x$ 使 $\frac{x^2\sin x}{x^2+1}+\varepsilon>1$.

即证 $\frac{\sin x}{x^2+1}<\varepsilon-1+\sin x$.

$\because \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$, $\sin x\in[-1,1]$ $\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x^2+1}=0$

$\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X$, $x>X$ 时有 $\left|\frac{\sin x}{x^2+1}\right|<\varepsilon$

在 $(X,+\infty)$ 上必存在至少一点 x_0 使 $\sin x_0-1=0$

$\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists x_0\in(X,+\infty)$ 使

$$\varepsilon>\frac{\sin x_0}{x_0^2+1}=\frac{\sin x_0}{x_0^2+1}+1-\sin x_0=1-\frac{x_0^2\sin x_0}{x_0^2+1}.$$

同理. 对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists x$ 使 $\frac{x^2\sin x}{x^2+1}-\varepsilon<-1$.

$\therefore$ $\sup B=1$, $\inf B=-1$.

练习6.2

1. 证明:

(1) ∵ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

由定理1, $\{a_n\}$任意子列均收敛于a

∴ $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$

(2) ∵ $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$

∴对$\forall \varepsilon>0$. $\exists N_1 \in N^*$, $n>N_1$时 $|a_{2n-1}-a|<\varepsilon$

对$\forall \varepsilon>0$. $\exists N_2 \in N^*$ $n>N_2$时 $|a_{2n}-a|<\varepsilon$

取 $N=\max\{2N_1-1, 2N_2\}$. 当$n>N$时 $|a_n-a|<\varepsilon$ 对$\forall \varepsilon>0$ 恒成立

由极限定义 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

2. 证明: (1) ∵ $\{a_n\}$收敛.

∴由定理1. $\{a_{2n-1}\}$、$\{a_{2n}\}$和$\{a_{3n}\}$都收敛.

(2) ∵ $\{a_{2n-1}\}$、$\{a_{2n}\}$和$\{a_{3n}\}$均收敛

∵ $\{a_{6n}\}$同为$\{a_{2n}\}$与$\{a_{3n}\}$子列 故$\{a_{6n}\}$收敛

且由极限唯一性 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{6n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{3n}$

∵ $\{a_{6n-3}\}$同为$\{a_{2n-1}\}$与$\{a_{3n}\}$子列 故$\{a_{6n-3}\}$收敛

且由极限唯一性 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{6n-3} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{3n}$

∴ $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1}$

由1可知$\{a_n\}$收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1}$

南開大學 作业纸

系别______ 班级______ 姓名______ 第 页

3. 证：$\because n_k \geq k$. 且$\{x_n\}$为单调数列.

若$\{x_n\}$递增 则 $x_{n_k} \geq x_k$

$\because \lim_{k\to\infty} x_{n_k}=a$ $\therefore \exists K, k>K$时 $|x_{n_k}-a|<\varepsilon$ 对$\forall\varepsilon>0$恒成立.

$\therefore \varepsilon > x_{n_k}-a \geq x_k-a$ $\therefore x_k-a \leq \varepsilon$ 取$\varepsilon=1$

$\therefore x_k \leq a+1$ 对$\forall k>K$均成立

令$M=\max\{x_1, x_2, \cdots, x_K, a+1\}$ $\therefore$ 对$\forall n$, $x_n \leq M$.

$\therefore \{x_n\}$递增且有上界. 由单调收敛定理$\{x_n\}$收敛.

设$\lim_{n\to\infty} x_n=b$. 假设$b\neq a$.

由定理1, $\{x_n\}$的任一个子列均收敛于b. 与$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=a\neq b$矛盾

$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n=a$.

($\{x_n\}$递减时, 同理)

4. $\because \lim_{n\to\infty} x_n=0$ $\therefore$ 对$\forall\varepsilon>0$. $\exists N\in N^*$, 当$n>N$时 $|x_n|<\varepsilon$.

$\because x_n>0$恒成立. $\therefore x_n<\varepsilon$. 当$n=N+1>N$时. 取$\varepsilon=x_N>0$.

$\therefore x_{N+1}<x_N$. 当$n=N+2>N$时. 取$\varepsilon=x_{N+1}>0$

$\therefore x_{N+2}<x_{N+1}$. …… 可得数列$\{x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots\}$

满足$x_N>x_{N+1}>x_{N+2}>\cdots$

令$x_{n_k}=x_{N+k-1}$ 显然$\{x_{n_k}\}$为严格递减的数列

$\because \{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$子列 且$\lim_{n\to\infty} x_n=0$ $\therefore \lim_{n\to\infty} x_{n_k}=0$.

5. $\because a \leq x_n \leq b$.

$\therefore \{x_n\}$存在一收敛子列$\{x_{n_k}\}$ 设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi \in [a,b]$

$\because \{f(x_{n_k})\}$是$\{f(x_n)\}$的子列，而 $f(x_n) \to A$.

$\therefore \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

$\because f(x)$在$[a,b]$上连续. $\therefore f(\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(\xi) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = A$

$\therefore \exists \xi \in [a,b]$ s.t. $f(\xi) = A$

练习6.4

1、证明：∵ f在$[a,b]$上没有第二类间断点 ∴ $\forall x\in[a,b]$. $\lim\limits_{y\to x^-}f(x)$、$\lim\limits_{y\to x^+}f(x)$ 均存在.

设 $R_x=\lim\limits_{y\to x^+}f(x)$, $L_x=\lim\limits_{y\to x^-}f(x)$. $\forall x\in[a,b]$.

∴ 对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta_x>0$ $y\in(x,x+\delta_x)$时 $|f(y)-R_x|<\varepsilon$.

对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists\xi_x>0$. $y\in(x-\xi_x,x)$时. $|f(y)-L_x|<\varepsilon$.

取 $\varepsilon=1$. $\eta_x=\min\{\delta_x,\xi_x\}$. 令 $M_x=\max\{|R_x|+1,|L_x|+1,|f(x)|+1\}$.

∴ 对 $\forall x\in[a,b]$. $y\in(x-\eta_x,x+\eta_x)$时, $|f(y)|<M_x$.

∵ $J=\{(x-\eta_x,x+\eta_x)\mid x\in[a,b]\}$ 是 $[a,b]$的一个开覆盖.

由有限覆盖定理其存在有限子覆盖 $J_1=\bigcup\limits_{i=1}^{m}(x_i-\eta_{x_i},x_i+\eta_{x_i})$.

J_1是$[a,b]$的覆盖.

∴ 取 $M=\max\{M_{x_1},M_{x_2},\cdots,M_{x_m}\}$

∴ 对 $\forall y\in[a,b]$ 即有 $y\in J_1$ ∴ $|f(y)|\le M$. ∴ $f(x)$在$[a,b]$有界.

练习6.5

1. 必要性：$\because f(x)$ 在 I 上一致连续、 对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$

$\therefore$ 对 $\forall a、b \in I$，只要 $|a-b|<\delta$ 即 $|f(a)-f(b)|<\varepsilon$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$, $\{x_n\}、\{y_n\} \subseteq I$

$\therefore \exists N_1 \in n^*$, $k>N_1$ 时 $|x_k-y_k|<\varepsilon_0$ （ε_0 为任意正数）

且此时 $x_k、y_k \in I$

取 $\varepsilon_0=\delta$. 则 $|x_k-y_k|<\delta$.

$\therefore k>N_1$ 时 $|f(x_k)-f(y_k)|<\varepsilon$ （ε 为任意正数）

即 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0$

充分性：反设 $f(x)$ 在 I 上不一致连续.

即 $\exists \varepsilon_0>0$ 对 $\forall \delta>0$, $\exists \{x_n\}、\{y_n\} \subseteq I$.

取 $\delta=\frac{1}{n}$, 当 $|x_n-y_n|<\delta=\frac{1}{n}$, 即 $|x_n-y_n|\to 0$ 时.

$|f(x_n)-f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0$ $(n\to\infty)$

与前提条件 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0$ 矛盾. 假设不成立

$\therefore f(x)$ 在 I 上一致连续.

2、由条件. 对 $\forall \varepsilon>0$:

$\exists \delta_1>0$. 使 $x', x'' \in (a,b]$ 且 $|x'-x''|<\delta_1$ 时 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

$\exists \delta_2>0$. 使 $x', x'' \in [b,c)$ 且 $|x'-x''|<\delta_2$ 时. $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. 当 $x', x'' \in (a,c)$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时:

① 若 $x', x'' \in (a,b]$. 则 $|x'-x''|<\delta \le \delta_1$. $\therefore |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

② 若 $x', x'' \in [b,c)$ 则 $|x'-x''|<\delta \le \delta_2$ $\therefore |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

③ 若 $a<x'<b<x''<c$. $\because |x'-b|<|x'-x''|$, $|x''-b|<|x'-x''|$.

$$\therefore \left.\begin{array}{l} |x'-b|<|x'-x''|<\delta\le\delta_1 \text{ 因而 } |f(x')-f(b)|<\varepsilon \\ |x''-b|<|x'-x''|<\delta\le\delta_2 \text{ 因而 } |f(x'')-f(b)|<\varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x')-f(x'')| \le |f(x')-f(b)|+|f(b)-f(x'')|<2\varepsilon$$

综上: 对 $\forall \varepsilon>0$. $\exists \delta$. 当 $x', x'' \in (a,c)$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时. $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 即 $f(x)$ 在 (a,c) 一致连续

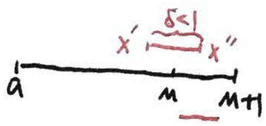
3. 对 $\forall \varepsilon>0$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$: $\exists M>a$. 当 $x>M$ 时 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

由一致连续性定理: f 在 $[a,M+1]$ 一致连续 $\therefore \exists \delta>0$. 当 $x', x'' \in [a,M+1]$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

不妨设上述 $\delta<1$. 当 $x', x'' \in [a,+\infty)$ 且 $|x'-x''|<\delta<1$ 时.

x', x'' 要么均在 $[a,M+1]$ 内. 要么均 $>M$.



① 若 $x', x'' \in [a,M+1]$ $\because |x'-x''|<\delta$ $\therefore |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

② 若 $x', x''>M$. 则 $|f(x')-f(x'')| \le |f(x')-A|+|f(x'')-A|<2\varepsilon$.

综上: 对 $\forall \varepsilon>0$. $\exists \delta$. $x', x'' \in [a,+\infty)$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时. $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ $\therefore f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续

4. <引理> 有界区间上的一致连续函数必有界.

证明: 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续

对 $\forall \varepsilon>0$. $\exists \delta>0$. $x_1, x_2 \in (a,b)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

取 $\varepsilon=1$. 则 $|f(x_1)-f(x_2)|<1$ 将 (a,b) 划分为 $(a, a+\frac{\delta}{2}]$、$[a+\frac{\delta}{2}, b-\frac{\delta}{2}]$、$[b-\frac{\delta}{2}, b)$.

① 在 $[a+\frac{\delta}{2}, b-\frac{\delta}{2}]$ 上: $\because f$ 一致连续 故连续. 因而有界. 设 $|f(x)|\le M$

② 在 $(a, a+\frac{\delta}{2}]$ 上: $|x-(a+\frac{\delta}{2})|\le\frac{\delta}{2}<\delta$ $\therefore |f(x)-f(a+\frac{\delta}{2})|<1$ $\therefore |f(x)|<|f(a+\frac{\delta}{2})|+1$

③ 在 $[b-\frac{\delta}{2}, b)$ 上: 同理 $|f(x)|<|f(b-\frac{\delta}{2})|+1$

令 $M_0=\max\{M, |f(a+\frac{\delta}{2})|+1, |f(b-\frac{\delta}{2})|+1\}$. $\therefore \forall x\in(a,b)$ $|f(x)|\le M_0$.

$\because f(x)$、$g(x)$ 在 (a,b) 一致连续. 由引理, $|f(x)|\le M_1$, $|g(x)|\le M_2$.

此外. $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta_1>0$. $x', x''\in(a,b)$ 且 $|x'-x''|<\delta_1$ 时. $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

$\exists\delta_2>0$ $x', x''\in(a,b)$ 且 $|x'-x''|<\delta_2$ 时. $|g(x')-g(x'')|<\varepsilon$.

$\therefore$ 取 $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$. $x', x''\in(a,b)$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时.

$|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')|\le|f(x')|\cdot|g(x')-g(x'')|+|g(x'')|\cdot|f(x')-f(x'')|<(M_1+M_2)\varepsilon$.

$\therefore f(x)\cdot g(x)$ 在 (a,b) 一致连续.

<反例> 在 $\mathbb{R}$ 上. $f(x)=x$. $g(x)=\sin x$ 均一致连续, 但 $f\cdot g=x\sin x$ 非一致连续.

<充分条件> f 与 g 在 I 上均有界. 且各自一致连续. 则 fg 在 I 一致连续.

[补] $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 连续 $\Leftrightarrow$ $xf(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 一致连续

5. (1) ✓ (2) ✗ (3) ✗ (4) ✓ (5) ✗ (6) ✗

练习6.6.

1. (1) $x_n=\begin{cases}\frac{1}{n} & 奇\\ 2n & 偶\end{cases}$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=+\infty$ $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n=0$

(2) $x_n=\{\frac{\sqrt{2}}{2}-1, 2, \frac{\sqrt{2}}{2}-1, 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}-1, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}-1, 1, \cdots\}$ (以此为周期).

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=2$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $x_n=\begin{cases}1-\frac{1}{n} & n为奇\\ \frac{1}{n} & n为偶\end{cases}$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=1$ $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=0$

(4) $x_n=\frac{n^2}{1+n^2}\cdot y_n$. 其中 $\frac{n^2}{1+n^2}\to 1$. $y_n\in\{0,-1,0,1\}$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=1$ $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=-1$

2. (1)

左式：$\{x_n\}$中存在子列$\{x_{n_k}\}$使$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$. $\because\{y_{n_k}\}$是$\{y_n\}$子列 $\therefore\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n\le\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}y_{n_k}$

$\therefore\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n\le\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}+\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}y_{n_k}$

$\because\{y_{n_k}\}$有子列$\{y_{n_{k_j}}\}$使$\lim\limits_{j\to\infty}y_{n_{k_j}}=\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}y_{n_k}$ $\because\{x_{n_{k_j}}\}$是$\{x_{n_k}\}$子列 $\therefore\lim\limits_{j\to\infty}x_{n_{k_j}}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$

$\therefore\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n\le\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}+\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}y_{n_k}=\lim\limits_{j\to\infty}x_{n_{k_j}}+\lim\limits_{j\to\infty}y_{n_{k_j}}=\lim\limits_{j\to\infty}(x_{n_{k_j}}+y_{n_{k_j}})\le\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)$

右式：$\{x_n+y_n\}$存在子列$\{x_{n_k}+y_{n_k}\}$. 使$\lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k}+y_{n_k})=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)$

$\because\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$子列、$\{y_{n_k}\}$是$\{y_n\}$子列 $\therefore\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n\ge\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}x_{n_k}+\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}y_{n_k}$ ①

$\because\{x_{n_k}\}$存在子列$\{x_{n_{k_j}}\}$使$\lim\limits_{j\to\infty}x_{n_{k_j}}=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}x_{n_k}$ 又$\{y_{n_{k_j}}\}$是$\{y_{n_k}\}$的子列 $\therefore\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}y_{n_k}\ge\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}y_{n_{k_j}}$

$\therefore\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}x_{n_k}+\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}y_{n_k}\ge\lim\limits_{j\to\infty}x_{n_{k_j}}+\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}y_{n_{k_j}}$ ②

$\because\{y_{n_{k_j}}\}$存在子列$\{y_{n_{k_{j_i}}}\}$使$\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}y_{n_{k_j}}=\lim\limits_{i\to\infty}y_{n_{k_{j_i}}}$ $\because\{x_{n_{k_{j_i}}}\}$是$\{x_{n_{k_j}}\}$子列 $\therefore\lim\limits_{j\to\infty}x_{n_{k_j}}=\lim\limits_{i\to\infty}x_{n_{k_{j_i}}}$

$\therefore\lim\limits_{j\to\infty}x_{n_{k_j}}+\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}y_{n_{k_j}}=\lim\limits_{i\to\infty}x_{n_{k_{j_i}}}+\lim\limits_{i\to\infty}y_{n_{k_{j_i}}}=\lim\limits_{i\to\infty}(x_{n_{k_{j_i}}}+y_{n_{k_{j_i}}})=\lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k}+y_{n_k})=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)$ ③

由①②③得$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\le\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$.

(2) 左式：$\{x_n+y_n\}$ 存在子列 $\{x_{n_k}+y_{n_k}\}$ 使 $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k}+y_{n_k})=\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$.

$\because$ $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 子列. $\{y_{n_k}\}$ 是 $\{y_n\}$ 子列 $\therefore$ $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n\le\varliminf\limits_{k\to\infty}x_{n_k}+\varliminf\limits_{k\to\infty}y_{n_k}$ ①

$\because$ $\{x_{n_k}\}$ 存在子列 $\{x_{n_{k_j}}\}$ 使 $\lim\limits_{j\to\infty}x_{n_{k_j}}=\varliminf\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$ 又 $\{y_{n_{k_j}}\}$ 是 $\{y_{n_k}\}$ 子列 $\Rightarrow\varliminf\limits_{k\to\infty}y_{n_k}\le\varliminf\limits_{j\to\infty}y_{n_{k_j}}$.

$\therefore$ $\varliminf\limits_{k\to\infty}x_{n_k}+\varliminf\limits_{k\to\infty}y_{n_k}\le\lim\limits_{j\to\infty}x_{n_{k_j}}+\varliminf\limits_{j\to\infty}y_{n_{k_j}}$ ②

$\because$ $\{y_{n_{k_j}}\}$ 存在子列 $\{y_{n_{k_{j_i}}}\}$ 使 $\varliminf\limits_{j\to\infty}y_{n_{k_j}}=\lim\limits_{i\to\infty}y_{n_{k_{j_i}}}$ $\because$ $\{x_{n_{k_{j_i}}}\}$ 是 $\{x_{n_{k_j}}\}$ 子列 $\Rightarrow\lim\limits_{j\to\infty}x_{n_{k_j}}=\lim\limits_{i\to\infty}x_{n_{k_{j_i}}}$

$\therefore$ $\lim\limits_{j\to\infty}x_{n_{k_j}}+\varliminf\limits_{j\to\infty}y_{n_{k_j}}=\lim\limits_{i\to\infty}x_{n_{k_{j_i}}}+\lim\limits_{i\to\infty}y_{n_{k_{j_i}}}=\lim\limits_{i\to\infty}(x_{n_{k_{j_i}}}+y_{n_{k_{j_i}}})=\lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k}+y_{n_k})=\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$. ③

由①②③可得 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n\le\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$.

右式：$\{y_n\}$ 中存在子列 $\{y_{n_k}\}$ 使 $\lim\limits_{k\to\infty}y_{n_k}=\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n$. $\because$ $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 子列 $\therefore$ $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n\ge\varlimsup\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$

$\therefore$ $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n\ge\varlimsup\limits_{k\to\infty}x_{n_k}+\lim\limits_{k\to\infty}y_{n_k}$

$\because$ $\{x_{n_k}\}$ 有子列 $\{x_{n_{k_j}}\}$ 使 $\lim\limits_{j\to\infty}x_{n_{k_j}}=\varlimsup\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$ $\because$ $\{y_{n_{k_j}}\}$ 是 $\{y_{n_k}\}$ 子列 $\therefore$ $\lim\limits_{j\to\infty}y_{n_{k_j}}=\lim\limits_{k\to\infty}y_{n_k}$

$\therefore$ $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n\ge\varlimsup\limits_{k\to\infty}x_{n_k}+\lim\limits_{k\to\infty}y_{n_k}=\lim\limits_{j\to\infty}x_{n_{k_j}}+\lim\limits_{j\to\infty}y_{n_{k_j}}=\lim\limits_{j\to\infty}(x_{n_{k_j}}+y_{n_{k_j}})\ge\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$

3. 1) 左式：任意固定的 n，对 $\forall k\geq n$，有：$\inf\limits_{j\geq n} x_j \leq x_k$，$\inf\limits_{j\geq n} y_j \leq y_k$

∵ $x_n\geq 0$，$y_n\geq 0$ ∴ $\inf\limits_{j\geq n} x_j\geq 0$，$\inf\limits_{j\geq n} y_j\geq 0$ ∴ $(\inf\limits_{j\geq n} x_j)(\inf\limits_{j\geq n} y_j)\leq x_k y_k$.

上式左式为常数，右式 $k\geq n$ 任意 ∴ $(\inf\limits_{j\geq n} x_j)\cdot(\inf\limits_{j\geq n} y_j)\leq \inf\limits_{k\geq n}(x_k y_k)$

由于上式对一切 n 成立，令 $n\to\infty$ ∴ $\lim\limits_{n\to\infty}(\inf\limits_{j\geq n} x_j)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(\inf\limits_{j\geq n} y_j)\leq \lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\geq n}(x_k y_k)$.

即 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n\cdot \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leq \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n y_n$

右式：利用 $\inf\limits_{k\geq n} x_k y_k \leq x_k y_k \leq x_k\cdot \sup\limits_{k\geq n} y_k$ $(\forall k\geq n)$ 得 $\inf\limits_{k\geq n} x_k y_k \leq (\inf\limits_{k\geq n} x_k)\cdot(\sup\limits_{k\geq n} y_k)$. 同理可证.

2) 与 1) 类似，略.

南開大學 作业纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 页

习题6 (A)

1. ∵ $X\cup Y$ 显然也是非空有界数集 ∴ $X\cup Y$ 的上确界存在.

⇒ 对 $\forall a\in X\cup Y$ 有 $a\in X$ 或 $a\in Y$ ∴ $a\le \sup X$ 或 $a\le \sup Y$ 即 $a\le \max\{\sup X, \sup Y\}$

∴ $\sup(X\cup Y)\le \max\{\sup X, \sup Y\}$

⇐ 对 $\forall a\in X$. 有 $a\in X\cup Y$. ∴ $a\le \sup(X\cup Y)$. ∴ $\sup X\le \sup(X\cup Y)$ 同理 $\sup Y\le \sup(X\cup Y)$

∴ $\sup(X\cup Y)\ge \max\{\sup X, \sup Y\}$

综上: $\sup(X\cup Y)=\max\{\sup X, \sup Y\}$

2. (2) 对 $\forall x\in X$, $x\le \sup X$. $\forall y\in Y$. $y\le \sup Y$. ∵ $Z=\{x+y|x+y|x\in X, y\in Y\}$.

∴ 对 $\forall z\in Z$. $\exists x_1, y_1$ 分别来自 X, Y. 使 $z=x_1+y_1\le \sup X+\sup Y$. ①

对 $\forall \varepsilon>0$. $\exists x_0\in X, y_0\in Y$ 使 $x_0+\varepsilon>\sup X$, $y_0+\varepsilon>\sup Y$. ∴ $x_0+y_0>\sup X+\sup Y-2\varepsilon$. ②

由①② 可知 $\sup Z=\sup X+\sup Y$.

(1). 记 $-A=\{-a|a\in A\}$, $A+B=\{a+b|a\in A, b\in B\}$ ∴ $-Z=(-X)+(-Y)$

由(2)中已证明结论 $\sup(-Z)=\sup(-X)+\sup(-Y)$.

由练习6.1 (4). $\sup(-A)=\inf A$ ∴ $\inf Z=\inf X+\inf Y$.

南開大學 作业纸

系别＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 第 页

3. (2) 先证 $\sup Z \le \sup X \cdot \sup Y$:

$\because \forall x\in X,\ \forall y\in Y.\ x\le \sup X,\ y\le \sup Y.$ 又$\because X$与Y均为非负集

$\therefore xy \le \sup X\cdot \sup Y$ 即 $\sup X\cdot\sup Y$ 为 Z 的上界 $\therefore \sup Z\le \sup X\cdot \sup Y$.

再证 $\sup Z \ge \sup X\cdot \sup Y$:

$\because$ 对 $\forall \varepsilon>0$ (不妨设 $\varepsilon<1$). $\exists x_0\in X,\ y_0\in Y$. 使 $x_0+\varepsilon>\sup X,\ y_0+\varepsilon>\sup Y$.

$\because x_0y_0\in Z$ $\therefore \sup Z\ge x_0y_0>(\sup X-\varepsilon)(\sup Y-\varepsilon)=\sup X\cdot\sup Y-(\sup X+\sup Y)\varepsilon+\varepsilon^2$

$$>\sup X\cdot \sup Y-\underbrace{(\sup X+\sup Y+1)\varepsilon}_{>0}$$ 任意小正数

由ε任意性. $\sup Z\ge \sup X\cdot\sup Y$.

综上 $\sup Z=\sup X\cdot \sup Y$.

(1). 同理可证.

4. $\because f(x)\cdot g(x)$ 在X上非负有界 $\therefore \inf\limits_{x\in X} f(x)\ge 0,\ \inf\limits_{x\in X} g(x)\ge 0,\ \sup\limits_{x\in X} f(x)\ge 0,\ \sup\limits_{x\in X} g(x)\ge 0.$

若以上有一者为零, 结论显然成立. 不妨设以上四式均严格大于零. 又由 $f(x)\ge 0,\ g(x)\ge 0$ 故:

• $f(x)\cdot\inf\limits_{x\in X} g(x)\le f(x)\cdot g(x)\le f(x)\cdot \sup\limits_{x\in X} g(x) \Rightarrow \inf\limits_{x\in X}\{f(x)\cdot \inf\limits_{x\in X} g(x)\}\le \inf\limits_{x\in X}[f(x)g(x)]\le \inf\limits_{x\in X}\{f(x)\cdot\sup\limits_{x\in X} g(x)\}$

由 $\inf\limits_{x\in D}\{af(x)\}=a\inf\limits_{x\in D} f(x)$. (练习6.1(4)). $\therefore \inf\limits_{x\in X} f(x)\cdot\inf\limits_{x\in X} g(x)\le \inf\limits_{x\in X}[f(x)g(x)]\le \inf\limits_{x\in X} f(x)\cdot \sup\limits_{x\in X} g(x)$

• 同理. $g(x)\cdot\inf\limits_{x\in X} f(x)\le f(x)g(x)\le g(x)\cdot\sup\limits_{x\in X} f(x)\Rightarrow \sup\limits_{x\in X}\{g(x)\cdot\inf\limits_{x\in X} f(x)\}\le \sup\limits_{x\in X}[f(x)g(x)]\le \sup\limits_{x\in X}\{g(x)\cdot\sup\limits_{x\in X} f(x)\}$

由 $\sup\limits_{x\in D}\{af(x)\}=a\sup\limits_{x\in D} f(x)$ (练习6.1(4)) $\therefore \inf\limits_{x\in X} f(x)\cdot\sup\limits_{x\in X} g(x)\le \sup\limits_{x\in X}[f(x)g(x)]\le \sup\limits_{x\in X} f(x)\cdot\sup\limits_{x\in X} g(x)$

南開大學 作业纸

系别______ 班级______ 姓名______ 第 页

5. 注意到 $\delta_1<\delta_2$ 时. $B_{\delta_1}(x_0)\subseteq B_{\delta_2}(x_0)$ $\therefore W_{x_0}(\delta_1)\le W_{x_0}(\delta_2)$ 即 $w(x)$ 单调递增.

$\Rightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta>0$. 当 $|x-x_0|<\delta$ 时. $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 对于 $x_1,x_2\in B_\delta(x_0)$.

$|f(x_1)-f(x_2)|\le|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_0)|<2\varepsilon$ $\therefore W_{x_0}\delta \triangleq \sup\limits_{x_1,x_2\in B_\delta(x_0)}|f(x_1)-f(x_2)|\le 2\varepsilon$

当 $0<\eta<\delta$ 时. $0\le W_{x_0}(\eta)\le W_{x_0}(\delta)<2\varepsilon$ $\therefore \lim\limits_{\delta\to0^+}W_{x_0}(\delta)=0$

$\Leftarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta>0$. 当 $0<\eta<\delta$ 时 $W_{x_0}(\eta)<\varepsilon$.

取 $\eta=\frac{\delta}{2}$ 则 $W_{x_0}(\delta)=\sup\limits_{x_1,x_2\in B_{\frac{\delta}{2}}(x_0)}|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

特别地. 当 $x_1\in B_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$ 时. $|f(x_1)-f(x_0)|<\varepsilon$ 由极限定义: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 故连续

6. 注意 $W_f(\delta)$ 也是递增的.

$\Rightarrow$ $\because f(x)$ 在 I 上一致连续 $\therefore\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta_1>0$. 当 $x',x''\in I$. $|x'-x''|<\delta_1$ 时 $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\therefore W_f(\delta_1)=\sup\limits_{\substack{x',x''\in I\\|x'-x''|<\delta_1}}|f(x')-f(x'')|\le\frac{\varepsilon}{2}$ $\therefore 0<\delta<\delta_1$ 时. $0\le W_f(\delta)\le W_f(\delta_1)\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{\delta\to0^+}W_f(\delta)=0$

$\Leftarrow$ $\because\lim\limits_{\delta\to0^+}W_f(\delta)=0$ $\therefore\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta_1>0$ 使 $0\le W_f(\delta_1)<\varepsilon$. $\therefore$ 当 $x',x''\in I$, $|x'-x''|<\delta_1$ 时. 有:

$|f(x')-f(x'')|\le\sup\limits_{\substack{x',x''\in I\\|x'-x''|<\delta_1}}|f(x')-f(x'')|=W_f(\delta_1)<\varepsilon$ $\therefore f(x)$ 在 I 上一致连续.

7. ∵ $a_n \geq 0$. ∴ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq 0$. ∴ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 要么为有限数A. 要么为$+\infty$

反设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq +\infty$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ ∴ $\{a_n\}$任一子列收敛于A. 矛盾.

8. 若对$\{x_n\}$的任意子列$\{x_{n_k}\}$, 均存在一个$\{x_{n_k}\}$的子列收敛于A. 则$\{x_n\}$也收敛于A.

(每一个子列都存在一个二级子列,且它们极限值相等,则原数列也收敛于此极限)

证: 假设$\{x_n\}$发散或极限不为A. 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 对 $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\exists n > N$ 使 $|x_n - A| \geq \varepsilon_0$.

∴ $\{x_n\}$存在子列$\{x_{n_k}\}$ 满足 $|x_{n_k} - A| \geq \varepsilon_0$ 即在A的ε_0邻域内不含$\{x_{n_k}\}$任一项.

∵ $\{x_{n_k}\}$存在收敛于A的子列 由定理3. A的任意邻域内存在$\{x_{n_k}\}$无穷多项.

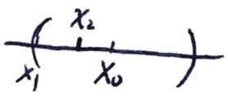
矛盾! ∴ $x_n \to A$.

9. 原题不够严谨. 修正为"$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \{x_n\}\ x_n \neq x_0,\ x_n \to x_0$ 且 $x_n \neq x_m\ (n \neq m)$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k) = A$". !!!

⇒ 已知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ ∵ $x_n \to x_0$ ∴ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ ∴ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k) = A$

⇐ 反设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq A$ 即 $\exists \varepsilon_0 > 0$. 对 $\forall \delta > 0$. $\exists x_\delta$, $0 < |x_\delta - x_0| < \delta$ 且 $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$

① 取$\delta_1 = 1$. $\exists x_1$. 使 $0 < |x_1 - x_0| < 1$ 且 $|f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0$



② 取$\delta_2 = \min\{\frac{1}{2}, |x_1 - x_0|\}$. $\exists x_2$ 使 $0 < |x_2 - x_0| < \delta_2 \leq \frac{1}{2}$, 且 $|f(x_2) - A| \geq \varepsilon_0$.

③ 取$\delta_3 = \min\{\frac{1}{2^2}, |x_1 - x_0|, |x_2 - x_0|\}$ $\exists x_3$ 使 $0 < |x_3 - x_0| < \delta_3 \leq \frac{1}{2^2}$, 且 $|f(x_3) - A| \geq \varepsilon_0$

......

找到一列$\{x_n\}$两两不等. $|x_n - x_0| < \frac{1}{2^n}$, $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$

必存在子列$\{x_{n_k}\}$. $x_{n_k} \to x_0$ 且使 $f(x_{n_k}) - A \geq \varepsilon_0$ 或 $f(x_{n_k}) - A \leq -\varepsilon_0$ 恒成立.

不妨设 $f(x_{n_k}) - A \geq \varepsilon_0$ ∴对 $\forall m \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m} f(n_i) \geq A + \varepsilon$. 与 $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{m} f(n_i) = A$ 矛盾.

习题6(A)-10

必要性: 根据致密性定理显然成立

充分性: 以下使用反证法证明:

若$\{a_n\}$任一子列都存在收敛子列. 且$\{a_n\}$无界

即: 对 $\forall M>0$ $\exists n_M$ s.t. $|a_{n_M}|>M$

① 对于$M_1=1$. $\exists n_1$ s.t. $|a_{n_1}|>1$.

(取n_1使$|a_n|>1$的最小自然数) $\Rightarrow$ 使$n_1<n_2$

② 对于$M_2=\max\{|a_{n_1}|,2\}$. $\exists n_2$ s.t. $|a_{n_2}|>M_2$

[以此往复 ---]

存在子列$\{a_{n_k}\}$ s.t. $|a_{n_k}|>M_k\geq k$

$\therefore \{a_{n_k}\}$中不含收敛子列. 矛盾

$\therefore \{a_n\}$有界.

(A) 11. $\because a \le f(a)$, $\therefore a \in A$，其中 $A = \{x \in [a,b] \mid x \le f(x)\}$

$\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 递增 $\therefore A \subseteq [f(a), f(b)]$

$\because A$ 非空有界

由确界原理，A 有上确界. 记 $\xi = \sup A$.

$\therefore$ 对 $\forall x \in A$. $x \le \xi$. $\because f$ 递增 $\therefore f(x) \le f(\xi)$

且有 $x \le f(x) \le f(\xi)$ $(x \in A)$

$\therefore f(\xi)$ 是 A 的上界

$\because \xi = \sup A$ 是 A 的最小上界 $\therefore \xi \le f(\xi)$

$\because f$ 递增 $\therefore f(\xi) \le f(f(\xi))$

$\therefore f(\xi) \in A$ $\because \xi$ 是 A 的上确界

$\therefore f(\xi) \le \xi$

$\therefore f(\xi) = \xi$.

命题得证，存在 $\xi = \sup\{x \in [a,b] \mid x \le f(x)\}$ 符合条件

南開大學 作业纸

系别______ 班级______ 姓名______ 第 页

(A) 12.

要证原命题，即证对 $\forall\ a<x_1<x_2<b$，有 $f(x_1)\le f(x_2)$ 成立.

作集合 $S=\{x\in[x_1,x_2]:f(x_1)\le f(x)\}$

① 显然 $x_1\in S$. $\Rightarrow S\ne\emptyset$

② 显然 S 有界.

由①②，集合 S 存在上确界 z. $z=\sup S$

① $\because S\subseteq[x_1,x_2]$ $\therefore z\le x_2$

② 由上确界性质： $\exists\{z_n\}$，其中 $z_i\in S$，且 $\{z_n\}$ 收敛于 z.

$\because f(x_1)\le f(z_n)$. 由 f 的连续性

$$f(x_1)\le\lim_{n\to\infty}f(z_n)=f(\lim_{n\to\infty}z_n)=f(z)$$

$\therefore z\in S$.

以下证明 $z=x_2$.

反证：假设 $z<x_2$. 由题意条件 对于 z 和 $\varepsilon=x_2-z>0$

$\therefore\exists\ \xi\in(z,x_2)$ s.t. $f(\xi)\ge f(z)\ge f(x_1)$

$\therefore\xi\in S$. 与 $z=\sup S$ 矛盾.

$\therefore z=x_2$.

13. $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$x_1,x_2\in(a,b)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

取 $\varepsilon=1$，则 $|f(x_1)-f(x_2)|<1$ 将 (a,b) 划分为 $(a,a+\frac{\delta}{2}]$、$[a+\frac{\delta}{2},b-\frac{\delta}{2}]$、$[b-\frac{\delta}{2},b)$。

① 在 $[a+\frac{\delta}{2},b-\frac{\delta}{2}]$ 上：$\because f$ 一致连续 故连续 因而有界 设 $|f(x)|\le M$

② 在 $(a,a+\frac{\delta}{2}]$ 上：$|x-(a+\frac{\delta}{2})|\le\frac{\delta}{2}<\delta$ $\therefore |f(x)-f(a+\frac{\delta}{2})|<1$ $\therefore |f(x)|<|f(a+\frac{\delta}{2})|+1$

③ 在 $[b-\frac{\delta}{2},b)$ 上：同理 $|f(x)|<|f(b-\frac{\delta}{2})|+1$

令 $M_0=\max\{M,|f(a+\frac{\delta}{2})|+1,|f(b-\frac{\delta}{2})|+1\}$。 $\therefore \forall x\in(a,b)$ $|f(x)|\le M_0$.

14. 设 f 有周期 $T>0$. 将 $\mathbb{R}$ 分为 $[kT,(k+1)T]$ $(k\in\mathbb{Z})$.

由 Cantor 定理，f 在 $[-T,2T]$ 上一致连续

即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$ 当 $|x'-x''|<\delta$、$x',x''\in[-T,2T]$ 时 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

在 $\mathbb{R}$ 上，对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\{\delta_1,T\}$，在 $|x'-x''|<\delta$ 时，即有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ $\therefore f$ 在 $\mathbb{R}$ 一致连续

15. 反设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$，设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}=a<1$。 $\therefore [a+\varepsilon,+\infty)$ 中只含 $\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\}$ 的有限项.

$\therefore \exists N$，$n>N$ 时 $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$ 即 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减 又 $\because x_n>0$，由单调收敛定理 $\{x_n\}$ 收敛

设 $A=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\lim\limits_{k\to\infty}\inf\limits_{n\ge k}\{x_n\}\ge\inf\limits_{n\ge k}\{x_n\}>0$ $\therefore \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{A}{A}=1$. 矛盾.

16. $\because x_n>0$ 恒成立 $\therefore \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\lim\limits_{k\to\infty}\inf\limits_{n\ge k}\{x_n\}=\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\sup\limits_{n\ge k}\{\frac{1}{x_n}\}}\right)=\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{n\ge k}\{\frac{1}{x_n}\}}=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n}}$

$\therefore \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n}=1 \Rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n/\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=1$ 即 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$ $\therefore \{x_n\}$ 收敛

17. 记$A=\{x_i \mid x_i$ 严格小于 $x_1,x_2,\cdots,x_{i-1}\}$. 反设A是有限集.

即 $\exists N$. 对 $\forall n>N$, $x_n \notin A$. 即对 $\forall n>N$. $\exists m_n\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 使 $x_n \geq x_{m_n}$.

记 $x_0=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_N\}>0$

$\because x_{N+1}\notin A$ $\quad\therefore x_{N+1}\geq N_0$ (若 $x_{N+1}<N_0$, 说明 $x_{N+1}<x_1,x_2,\cdots,x_N$. 则 $x_{N+1}\in A$. 矛盾).

$\therefore x_{N+2}\geq \min\{x_0,x_{N+1}\}=N_0$

$x_{N+3}\geq\min\{x_0,x_{N+1},x_{N+2}\}=N_0$

$\cdots\cdots$

$\therefore$ 对 $\forall n>N$. $x_n\geq x_0$ $\quad$ 即在 $(-x_0,x_0)$ 内. 只包含 $\{x_n\}$ 的有限项 $x_1,x_2,\cdots,x_N$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 矛盾.

18. [引理] 若 $\{a_n\}$. $\{b_n\}$ 均有界且 $a_n\geq b_n$ 则 $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n\geq\underline{\lim}_{n\to\infty}b_n$. proof: $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{k\to\infty}\inf\limits_{n\geq k}a_n\geq\lim\limits_{k\to\infty}\inf\limits_{n\geq k}b_n=\underline{\lim}_{n\to\infty}b_n$

设 $\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n=h$. 则 $(-\infty,h-\varepsilon]$ 内只有 $\{x_n\}$ 的有限项 $\therefore\exists N$. 当 $n>N$ 时 $x_n>h-\varepsilon$.

$\therefore \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq\dfrac{x_1+\cdots+x_N}{n}+\dfrac{(n-N)}{n}(h-\varepsilon)$ $\qquad$ 又 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{x_1+\cdots+x_N}{n}+\dfrac{(n-N)}{n}(h-\varepsilon)\right]=h-\varepsilon$

由引理 $\underline{\lim}_{n\to\infty}\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}\geq\underline{\lim}_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_1+\cdots+x_N}{n}+\dfrac{(n-N)}{n}(h-\varepsilon)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}+\dfrac{(n-N)}{n}(h-\varepsilon)\right]=h-\varepsilon$

由 ε 任意性. $\underline{\lim}_{n\to\infty}\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}\geq h=\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n$

同理可证 $\overline{\lim}_{n\to\infty}\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}\leq\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n$

$\therefore \underline{\lim}_{n\to\infty}x_n\leq\underline{\lim}_{n\to\infty}\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}\leq\overline{\lim}_{n\to\infty}\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}\leq\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n$

19. 对于 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}$:

① 若 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}=+\infty$ 显然成立

② 若 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}=H<+\infty$ $(H>0)$ $\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N$. $n\geq N$ 时 $\frac{x_{n+1}}{x_n}<H+\varepsilon$

$\therefore$ 当 $n\geq N$ 时 $\frac{x_n}{x_N}=\frac{x_n}{x_{n-1}}\cdot\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\cdots\cdots\frac{x_{N+1}}{x_N}<(H+\varepsilon)^{n-N}$

$\therefore x_n^{\frac{1}{n}}<x_N^{\frac{1}{N}}\cdot(H+\varepsilon)^{n-N}$ 故 $\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n^{\frac{1}{n}}\le\overline{\lim_{n\to\infty}}x_N^{\frac{1}{N}}\cdot(H+\varepsilon)^{\frac{n-N}{n}}=H+\varepsilon$.

由 ε 任意性. $\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n^{\frac{1}{n}}\le H=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

同理可证 $\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}\geq\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}$. $\therefore$ $\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}\le\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n\le\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}$

习题6(B)

证：设$f(x)$的所有周期构成集合M.

对于$\forall T\in M$. 显然$T\geqslant 0$. $\because M$有下界，$\therefore$其有下确界.

设$T_0=\inf M$. $T_0\geqslant 0$.

使用反证法证明. 假设$f(x)$没有最小正周期. 即$T_0\notin M$.

即T_0是M的极限，M中可取一列$\{T_n\}$ s.t. $T_n\to T_0$.

① 当$T_0>0$时. 对$\forall x\in\mathbb{R}$.

有$f(x+T_n)=f(x)$. $(n=1,2,\cdots)$.

$\because f(x)$的连续性 $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}f(x+T_n)=f(x+\lim\limits_{n\to\infty}T_n)=f(x+T_0)=f(x)$.

$\therefore T_0$为$f(x)$的周期. 与$T_0\notin M$矛盾.

② 当$T_0=0$时.

对$\forall n\in\mathbb{N}$，可把x写为$k_nT_n+x_n$的形式 ($\forall x\in\mathbb{R}$).

其中：$k_n\in\mathbb{Z}$，$0\leq x_n<T_n$. (类比：任一整数可写为某整数的整数倍加余数)

$\because T_n\to T_0=0$ $\therefore x_n\to 0$

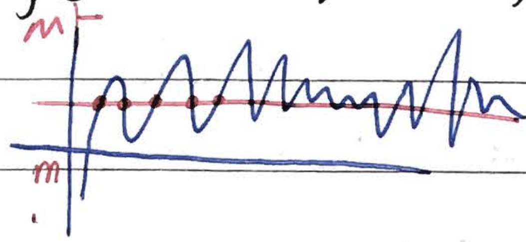
$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x=\lim\limits_{n\to\infty}(k_nT_n+x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}k_nT_n$

由$f(x)$连续性. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(k_nT_n)=f(\lim\limits_{n\to\infty}k_nT_n)=f(0)$.

即$f(x)$恒为常值. 与题设矛盾.

综上：假设不成立. $f(x)$存在最小正周期.

6 (B) 3. 已知 $f\in C[0,+\infty)$ $m\le f(x)\le M$



令 $A_1=m,\ B_1=M$.

对于 $\lambda=\frac{A_1+B_1}{2}$ $f=\lambda$ 有有限个根.

由 ∴ $\exists X_1$, $x>X_1$ 时 $f(x)$ 恒 $>\lambda$ 或 恒 $<\lambda$ (中介值定理).

$\begin{cases} \text{若 } f(x)>\lambda \text{ 恒成立} \Rightarrow \text{取 } A_2=\frac{A_1+B_1}{2},\ B_2=B_1 \\ \text{若 } f(x)<\lambda \text{ 恒成立} \Rightarrow \text{取 } A_2=A_1\quad B_2=\frac{A_2+B_2}{2} \end{cases}$

$\exists X_2$. $x>X_2$ 时. $f(x)$ 恒 $>\frac{A_2+B_2}{2}$ 或 恒 $<\frac{A_2+B_2}{2}$

$\begin{cases} \text{若 } f(x)>\frac{A_2+B_2}{2} \text{ 恒成立} \Rightarrow \text{取 } A_3=\frac{A_2+B_2}{2},\ B_3=B_2 \\ \text{若 } f(x)<\frac{A_2+B_2}{2} \text{ 恒成立} \Rightarrow \text{取 } A_3=A_2,\ B_3=\frac{A_2+B_2}{2} \end{cases}$

。。。。。。。。。。

得到 $\{[A_n,B_n]\}$ 满足
$\begin{cases} ① [A_{n+1},B_{n+1}]\subseteq[A_n,B_n] \\ ② B_{n+1}-A_{n+1}=\frac{1}{2}(B_n-A_n) \\ ③ \exists X_n.\ x>X_n \text{ 时}.\ f \text{ 恒} >\frac{A_n+B_n}{2} \text{ 或 } f \text{ 恒} <\frac{A_n+B_n}{2} \end{cases}$

且 $A_{n+1}\le f(x)\le B_{n+1}$.

由①② $\Rightarrow \exists\xi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[A_n,B_n]$

下证 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\xi$. ∵闭区间套定理使 $\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}B_n=\xi$.

∴ $\exists N$ 使 $|A_N-\xi|<\varepsilon$, $|B_N-\xi|<\varepsilon$ 对 $\forall\varepsilon>0$ 均成立

即 $\xi-\varepsilon<A_N<B_N<\xi+\varepsilon$

取 X_{N-1}. 当 $x>X_{N-1}$ 时 $\xi-\varepsilon<A_N\le f(x)\le B_N<\xi+\varepsilon$.

即 $|f(x)-\xi|<\varepsilon$. 因此 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\xi$.