第五章 导数应用

§5.1 微分中值定理

- Rolle 定理
- Lagrange 中值定理
- cauchy 中值定理

$\Big\}$ 闭区间连续，开区间可导

证明

- 达布定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导且 $f'(a)\neq f'(b)$，则对介于 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 间任意 $\eta\in\mathbb{R}$，$\exists\,\xi\in[a,b]$ 使 $f'(\xi)=\eta$

§5.2 函数的单调性与极值

- 不可导点也可能是极值点
- 设 $f(x)$ 在 x_0 二次可导且 $f'(x_0)=0$，$\begin{cases} f''(x_0)<0 \Rightarrow \text{极大值点} \\ f''(x_0)>0 \Rightarrow \text{极小值点} \end{cases}$

§5.3 函数的凸性与拐点

- 下凸定义：$\forall x_0,x_1\in I$，$x_0<x_1$，$\forall t\in(0,1)$ 有 $f((1-t)x_0+tx_1)\leq(1-t)f(x_0)+tf(x_1)$ 
- $f''(x)\geq 0$，$[a,b]$ $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 下凸 $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ 在 (a,b) 递增 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall x\in[a,b]$，$f(x)\geq f'(a)\cdot(x-a)+f(a)$
- 拐点定义：在两侧有相反的凸性
- $f(x)$ 在 x_0 三次可导，且 $f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$，则 x_0 是 $f(x)$ 拐点。

§5.4 洛必达法则

- 适用于：$\frac{0}{0}$，$\frac{A}{\infty}$
- △证明

§5.5 泰勒公式

- $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$
- 余项 $\begin{cases} \text{peano 余项} \quad o(x-x_0)^n \\ \text{Lagrange 余项} \quad R_n(x-x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \xi\in x\text{ 与 }x_0\text{ 间} \\ \text{cauchy 余项} \quad R_n(x-x_0)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^{n+1}\cdot(1-\theta)^n \qquad 0<\theta<1 \\ \text{积分余项} \quad R_n(x-x_0)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\,dt \end{cases}$

- 求 Maclaurin 公式可以进行代入：$f(g(x))$，先将 $g(x)$ 代入 $f(x)$ 展式中，再展开 $g(x)$。

- 常见函数的 taylor 公式：

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+\cdots,x\in(-1,1]$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots,x\in(-1,1)$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots,x\in(-1,1)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,x\in(-1,1)$$

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots,x\in[-1,1]$$

练习5.1

1. 设ξ_1、$\xi_2\in(0,\pi)$为$f(x)$的两个零点 即$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$

在(ξ_1,ξ_2)上应用Rolle定理 ∴$\exists\,\xi\in(\xi_1,\xi_2)$使$f'(\xi)=0$.

又∵$f'(x)=-a_1\sin x-2a_2\sin 2x-\cdots-na_n\sin nx$ ∴$f'(0)=f'(\pi)=0$

在$(0,\xi)$与(ξ,π)上分别应用Rolle定理.

∴$\exists\,\lambda_1\in(0,\xi)$, $\lambda_2\in(\xi,\pi)$使$f''(\lambda_1)=f''(\lambda_2)=0$ 即$f''(x)$在$(0,\pi)$内至少有两个零点.

2. 令$g(x)=xf(x)$. ∵$f(x)$在$\mathbb{R}$上可导 ∴$g(x)$在$\mathbb{R}$上可导. ∵$g'(x)=xf'(x)+f(x)\neq0$

故$g(x)$在$\mathbb{R}$上无极值点 又∵$g(x)$在$\mathbb{R}$上连续 ∴$g(x)$在$\mathbb{R}$上单调.

∵$g(0)=0$ ∴由$g(x)$在$\mathbb{R}$单调知$x\neq0$时$g(x)\neq0$ ∴$x\neq0$时$xf(x)\neq0$ 即$f(x)\neq0$.

3. 设$f(a^+)=f(b^-)=A$. 令 $g(t)=f(\tan x)=\begin{cases}A & t=\arctan a\text{ 或 }\arctan b\\ f(\tan t) & \arctan a<t<\arctan b\end{cases}$

∵$g(t)$在$[\arctan a,\arctan b]$连续. 在$(\arctan a,\arctan b)$可导

由罗尔中值定理, $\exists\,\xi_1\in(\arctan a,\arctan b)$使$g'(\xi_1)=0=f'(\tan\frac{1}{\xi_1})\cdot\frac{1}{\cos^2\xi_1}$ $\neq0$

∴ $f'(\tan\frac{1}{\xi_1})=0$ ∴$\exists\,\xi=\tan\frac{1}{\xi_1}$ 使$f'(\xi)=0$.

〈意义〉对Rolle定理作推广. 删去"$[a,b]$连续"的条件. 只保留"(a,b)可导"

4. (1) 不妨设 $x>y$. 则 $|\sin x-\sin y|\le|x-y| \Leftrightarrow -1\le\frac{\sin x-\sin y}{x-y}\le 1$

令 $f(x)=\sin x$. 在 (x,y) 内应用 lagrange 中值定理:

$\exists\xi\in(x,y)$ 使 $f'(\xi)=\cos\xi=\frac{\sin x-\sin y}{x-y}$ $\because -1\le\cos\xi\le 1$ $\therefore -1\le\frac{\sin x-\sin y}{x-y}\le 1$

(2) 令 $f(x)=\arctan x$. 在 (a,b) 上应用 lagrange 中值定理:

$\exists\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=\frac{1}{1+\xi^2}=\frac{\arctan b-\arctan a}{b-a}$

$\because a<\xi<b$ $\therefore \frac{1}{1+b^2}<\frac{1}{1+\xi^2}<\frac{1}{1+a^2}$ $\therefore \frac{b-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\frac{b-a}{1+a^2}$

(3) 令 $f(x)=\ln(1+x)$ $g(x)=\arcsin x$. 在 $(0,x)$ 上应用 cauchy 中值定理:

$\exists\xi\in(0,x)$ 使 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}$ 即 $\frac{\ln(1+x)}{\arcsin x}=\frac{\frac{1}{1+\xi}}{\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}}=\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\in\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},1\right)$.

5. 命题错误. 反例:

取 $f(x)=x^3$. $\xi=0$. $f'(\xi)=0$. $\because f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上递增. 不存在 x_1,x_2 使 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)=0$.

<意义> Lagrange 中值定理逆命题不正确.

6. $\because \alpha>1$ $\therefore \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\le M\cdot|b-a|^{\alpha-1}$ 取 $b=a+\Delta x$.

$\Delta x\to 0$ 时 $\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|=\lim\limits_{x\to a}\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|=\lim\limits_{x\to a}f'(a)\le M\cdot|x-a|^{\alpha-1}$

$\because \lim\limits_{x\to a}M|x-a|^{\alpha-1}=0$ $(\alpha>1)$ $\therefore \lim\limits_{x\to a}|f'(a)|=0$ 即对 $\forall a\in\mathbb{R}$. $f'(x)=0$ 均成立

$\therefore f(x)\equiv \text{const}$

7. 令 $g(x)=f(x)-kx$. $g'(x)=f'(x)-k=0$ $\therefore g(x)=b$ (b为常数) $\therefore f(x)=kx+b$

8. 假设 $f'(x)$ 有界: $|f'(x)|\le M$ 取 $x_0=\frac{a+b}{2}$

对 $\forall x\in(a,b)$. 在 (x_0,x) 或 (x,x_0) 上应用 Lagrange 中值定理:

$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)\cdot(x-x_0)$. 即 $f(x)=f(x_0)+f'(\xi)\cdot(x-x_0)$ 其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间. 即 $\xi\in(a,b)$

$\because |f'(\xi)|\le M$ $\therefore f(x_0)-M(a-x_0)\le f(x_0)+f'(\xi)\cdot(x-x_0)\le f(x_0)+M(b-x_0)$

即 $f(x)$ 有界. 与 $f(x)$ 在 (a,b) 无界矛盾.

<在开区间上可导且无界的函数, 其导函数在此区间上也无界>

9. (1) $f'_+(a)=\lim\limits_{h\to0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to0+}f'(a+\xi_h)$ (其中 $0<\xi_h<h$)

$\because \lim\limits_{h\to0^+}\xi_h=0$. 由海涅定理, 上式 $=f'(a+)$.

(2) $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1+}\frac{\arctan\frac{1+x}{1-x}}{x-1}$ 不存在. 同理 $f'_-(1)$ 不存在.

$\because f'(x)=\frac{2}{2+2x^2}=\frac{1}{1+x^2}$ $(x\ne1)$ $\therefore \lim\limits_{x\to1}f'(x)=\frac{1}{2}$

<注1> 右导数: $f'_+(x_0)=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

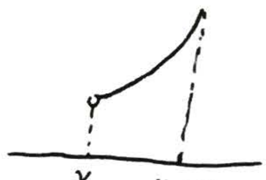
导函数的右极限: $f'(x_0+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$

是不同的概念. 当 $f(x)$ 不连续时, 两者不相等.

南開大學 作业纸

系别__________ 班级________ 姓名__________ 第 页

10. 若x_0为$f'(x)$的可去或跳跃间断点



则 $f'(x_0+) \neq f'(x_0)$ 即 $\lim\limits_{h\to 0^+} f'(x_0+h) \neq f'(x_0)$

∴ $\exists\, \varepsilon_0>0$. 对任意充分小的$\delta$. 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $|f'(x)-f'(x_0)|\geq\varepsilon_0$. 与达布定理矛盾.

<若函数在开区间内可导且导函数在此区间上间断. 则此间断点必为第二类间断点>

11. 取 $F(x)=(b^2-a^2)f(x)-[f(b)-f(a)]x^2$ ∴ $F'(x)=(b^2-a^2)f'(x)-2\cdot[f(b)-f(a)]x$

∵ $F(b)=F(a)=b^2f(a)-a^2f(b)$ 在(a,b)上应用Rolle中值定理:

$\exists\, \xi\in(a,b)$ 使 $F'(\xi)=0$ 即 $(b^2-a^2)f'(\xi)=2\xi[f(b)-f(a)]$

练习5.2

1. (1) $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)}$ $y'=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\cdot\left(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)=x\ln(1+x)\cdot\frac{x-(x+1)\ln(1+x)}{x^2(x+1)}$

$=\frac{\ln(1+x)}{x(x+1)}\cdot\left(h(x+1)-1\right)$ $(x>0)$ 其中 $h(x)=x(1-\ln x)$.

∵ $h'(x)=-\ln x$. ∴ $x>1$ 时 $h'(x)<0$. $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 递减

∵ $h(1)=1$ ∴ $h(x+1)-1<h(1)-1=0$ 在 $x>0$ 恒成立

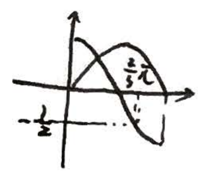
又∵ $x>0$ 时 $\frac{\ln(1+x)}{x(x+1)}>0$ ∴ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$, $y'<0$ ∴ y 在 $(0,+\infty)$ 递减

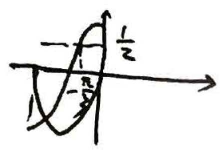
(2) ∵ $y=x+|\sin 2x|=\begin{cases}x+\sin 2x & k\pi\le x<(k+\frac{1}{2})\pi\\ x-\sin 2x & (k-\frac{1}{2})\pi\le x<k\pi\end{cases}$

∴ $y'=\begin{cases}1+2\cos 2x & k\pi\le x<(k+\frac{1}{2})\pi\\ 1-2\cos 2x & (k-\frac{1}{2})\pi\le x<k\pi\end{cases}$

$1+2\cos 2x$ → $(k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi)$ 增; $(\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$ 减

$1-2\cos 2x$ → $(-\frac{\pi}{3}+k\pi,k\pi)$ 减; $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,-\frac{\pi}{3}+k\pi)$ 增





2. (1) $p'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1$

∴ $p'(x)$ 有 k 个根 $(k\le n-1)$. 设为 $x_1\le x_2\le\cdots\le x_k$.

在 $x<x_1$ 时, $p'(x)$ 不变号. $x>x_k$ 时 $p'(x)$ 也不变号

取 $x_0=\max\{|x_1|,|x_k|\}$ 则 $p(x)$ 在 $(-\infty,-x_0]$ 与 $[x_0,+\infty)$ 上严格单调.

(2) 若 n 为偶数 ∵ $a_n>0$ ∴ $\lim\limits_{x\to+\infty}p'(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}p'(x)=-\infty$

∴ $P(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 递减 $(x_k,+\infty)$ 递增

∴ $P(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的最小值即为 $P(x)$ 在 $[x_1,x_k]$ 上的最小值.

由闭区间上连续函数性质. 这个最小值必定存在.

3. (1) 令 $f(x)=\sin x-x$ $\quad\because f'(x)=\cos x-1\le 0$ $\quad\therefore f(x)$在$(-\infty,0)$递减

$\therefore f(x)>f(0)=0$ 即 $\sin x>x$

令 $g(x)=x-\frac{x^3}{6}-\sin x$ $\quad\therefore g'(x)=1-\frac{x^2}{2}-\cos x$ $\quad\therefore g''(x)=\sin x-x=f(x)>0$

$\therefore g'(x)$在$(-\infty,0)$递增 $\quad\therefore g'(x)<g'(0)=0$ $\quad\therefore g(x)$在$(-\infty,0)$递减

$\therefore g(x)>g(0)=0$ 即 $x-\frac{x^3}{6}>\sin x$ $\quad$ 综上: $x-\frac{x^3}{6}>\sin x>x \quad (x<0)$

(2) 令 $f(x)=\tan x-x-\frac{x^3}{3}$

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2x}-1-x^2=\frac{1-(1+x^2)\cos^2x}{\cos^2x}=\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{\cos^2x}=\frac{(\sin x+x\cos x)(\sin x-x\cos x)}{\cos^2x}$$

$$=\frac{\sin x+x\cos x}{\cos x}\cdot(\tan x-x).$$

$\because x\in(0,\frac{\pi}{2})$ $\quad\therefore \tan x>x.$ $\quad\therefore f'(x)>0$

$\therefore f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$递增 $\quad\therefore f(x)>f(0)=0$ 即 $\tan x>x+\frac{x^3}{3}$

(3) 令 $f(x)=x^p+(1-x)^p$

$f'(x)=px^{p-1}-p(1-x)^{p-1}$ $\quad$ 令 $f'(x)\ge 0.$ 即 $x^{p-1}\ge(1-x)^{p-1}$ $\quad$ 当$x=0$时. $f'(x)\ge 0$ ✓ $\quad x=1$时 $f'\ge 0$ ✗

当$x\in(0,1)$时 $f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{1-x}\right)^{p-1}\ge 1 \Leftrightarrow (p-1)\ln\frac{x}{1-x}\ge 0$ $\overset{\because p>1}{\Longleftrightarrow} \ln\frac{x}{1-x}\ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{x}{1-x}\ge 1 \Leftrightarrow x\ge\frac{1}{2}$

综上: $f(x)$在$(0,\frac{1}{2})$递减, $(\frac{1}{2},1]$递增. $\because f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2^{p-1}}.$ $\quad f(0)=f(1)=1$

$\therefore \frac{1}{2^{p-1}}\le x^p+(1-x)^p\le 1.$

南開大學 作业纸

系别______ 班级______ 姓名______ 第 页

4. $xD(x)=\begin{cases} x & x\in Q \\ 0 & x\notin Q \end{cases}$ 无理数：极小值点

有理数：非极值点

$R(x)=\begin{cases} \frac{1}{q} & x=\frac{p}{q} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ 无理数：极小值点

有理数：非极值点

<注意> 极值点与函数连续性没有关系

5. $\because f(x)$是偶函数 $\therefore f(x)=f(-x)$ $\therefore f'(x)=-f'(-x)$. 代入$x=0$ $\therefore f'(0)=0$

又：$f''(0)\neq 0$ $\therefore f(0)$是$f(x)$的极值

练习5.3

1. 要证：$f(g((1-t)x_0+tx_1)) \le (1-t)f(g(x_0))+tf(g(x_1))$ 对 $\forall t\in(0,1)$ 均成立.

$\because g$ 是下凸函数 $\therefore g((1-t)x_0+tx_1) \le (1-t)g(x_0)+tg(x_1)$

$\because f$ 递增、且 f 是下凸函数 $\therefore f[g((1-t)x_0+tx_1)] \le f[(1-t)g(x_0)+tg(x_1)] \le (1-t)f(g(x_0))+t\cdot f(g(x_1))$

得证. 即 $f\circ g$ 也是下凸函数.

2. 以下由数学归纳法证明:

$n=2$ 时. $f(p_1x_1+p_2x_2) \le p_1f(x_1)+p_2f(x_2)$ $(p_1+p_2=1)$ 由下凸函数定义知其显然成立.

$n=k$ 时 假设 $f(\sum_{i=1}^{k}p_ix_i) \le \sum_{i=1}^{k}p_i\cdot f(x_i)$ 成立

$n=k+1$ 时. $\because \sum_{i=1}^{k+1}p_i=1$ $\therefore \sum_{i=1}^{k}p_i=1-p_{k+1}$ 不妨设 $1-p_{k+1}\neq 0$ $\therefore \sum_{i=1}^{k}\frac{p_i}{1-p_{k+1}}=1$

记 $\lambda_i=\frac{p_i}{1-p_{k+1}}\geq 0$ $\therefore \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$

由下凸定义

$\therefore f(\sum_{i=1}^{k}p_ix_i)=f((1-p_{k+1})\sum_{i=1}^{k}\lambda_ix_i+p_{k+1}x_{k+1}) \le (1-p_{k+1})f(\sum_{i=1}^{k}\lambda_ix_i)+p_{k+1}f(x_{k+1})$

由假设 $\le (1-p_{k+1})\sum_{i=1}^{k}(\lambda_if(x_i))+p_{k+1}f(x_{k+1})=\sum_{i=1}^{k}p_if(x_i)+p_{k+1}f(x_{k+1})=\sum_{i=1}^{k+1}p_if(x_i)$.

得证.

3. (1) 要证 $a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\le\frac{a}{p}+\frac{b}{q}$ 只需证 $\frac{\ln a}{p}+\frac{\ln b}{q}\le\ln\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}\right)$

∵ $\ln x$ 是上凸函数且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 由上凸函数定义，显然成立.

(2) ∵ $\ln x$ 是上凸函数. $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}=1$

∴ $\frac{x}{x+y}\ln\frac{a}{x}+\frac{y}{x+y}\ln\frac{b}{y}\le\ln\left(\frac{x}{x+y}\cdot\frac{a}{x}+\frac{y}{x+y}\cdot\frac{b}{y}\right)=\ln\frac{a+b}{x+y}\Rightarrow x\ln\frac{x}{a}+y\ln\frac{y}{b}\geqslant(x+y)\ln\frac{x+y}{a+b}$

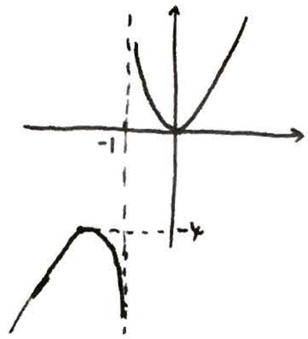
(3) ∵ $\ln x$ 是上凸函数 $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=1$

∴ $\frac{a}{a+b}\ln a+\frac{b}{a+b}\ln b\geqslant\ln\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)\geqslant\ln\frac{a+b}{2}$ $\left(\because\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}\right)$

∴ $a\ln a+b\ln b\geqslant(a+b)\ln\frac{a+b}{2}$ ∴ $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}\le a^a b^b$

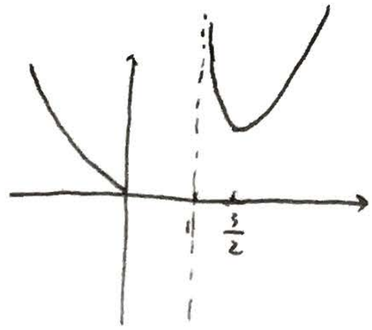
4. (1) $f'(x)=\frac{x(x+2)}{(1+x)^2}$ $f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$ $\lim_{x\to-1^+}f(x)=+\infty\Rightarrow x=-1$ 是竖直渐近线

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	+	+	+
$f(x)$	↗	−4, 极大	↘	↘	0, 极小	↗
	上凸	上凸	上凸	下凸	下凸	下凸



(2) 定义域 $(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$ $f'(x)=\frac{2x-3}{2(x-1)}\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ $f''(x)=\frac{3}{4(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x}}$ $\lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty\Rightarrow x=1$ 是竖直渐近线

	$(-\infty,0)$	$(1,\frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2},+\infty)$
$f'(x)$	−	−	0	+
$f''(x)$	+	+	+	+
$f(x)$	↘	↘	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$, 极小	↗
	下凸	下凸	下凸	下凸



练习5.4

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2x}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{2\sin x\cos x}{\cos^4x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{\cos^3x}=2$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+1+x\cdot e^x-2\cdot e^x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(x-1)e^x+1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot e^x}{6x}=\frac{1}{6}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\arctan^2x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2x-x^2}{x^2\tan^2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin y+y\cos y}{y}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin y-y\cos y}{y^3}$

$=\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin y}{y}+\lim\limits_{x\to0}\cos y\right)\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos y-\cos y+y\sin y}{3y^2}=2\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin y}{3y}=\frac{2}{3}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{e^{\ln x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{-\frac{1}{x^2}-\ln x}=e^{-\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}+\ln x\right)}$

∵ $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}+\ln x\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}\right)=+\infty$

∴ $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to0}e^{-\infty}=0$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(\tan\frac{\pi}{2+x}\right)^{x}=e^{\lim\limits_{x\to0}x\cdot\ln\left(\tan\frac{\pi}{2+x}\right)}$

而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(\tan\frac{\pi}{2+x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2+x}\right)}\cdot\frac{-\pi}{(x+2)^2}}{\tan\left(\frac{\pi}{2+x}\right)}\cdot(-x^2)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\pi}{(x+2)^2}\cdot\frac{x^2}{\sin\left(\frac{\pi}{2+x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\pi}{(x+2)^2}\frac{2x}{\cos\left(\frac{\pi}{2+x}\right)\cdot\left[-\frac{\pi}{(x+2)^2}\right]}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{-2x}{\cos\left(\frac{\pi}{2+x}\right)}\right)=0$ ∴ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=e^0=1$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\ln x}}$

$\because \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{(1+x^2)(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{(1+x^2)\cdot\tan(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{1+x^2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{1+x^2}=-1\quad\therefore\triangle=e^{-1}$

(7) $\lim\limits_{x\to0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{1-\cos x}}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-x\sin x}{\sin^2x+2x\sin x\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{\frac{\sin x}{x}+2\cos x}=-\frac{1}{3}\quad\therefore\triangle=e^{-\frac{1}{3}}$

(8) $\lim\limits_{x\to1^+}(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1})=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{2+\ln x}=\frac{1}{2}$

(9) $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{(x+1)e^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x}{(x+2)e^x}=\frac{1}{2}$

(10) $\lim\limits_{x\to0}(\cot x-\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x-x\cos x}{\sin x+\cos x-x\sin x}=0$

(11) $\lim\limits_{x\to0}[\frac{\ln(1+x)}{x}]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}[1-\frac{x}{2}+o(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1-\frac{x}{2})^{-\frac{2}{x}\cdot-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}$

(12) $\lim\limits_{x\to0}[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}(\frac{\ln(x+1)}{x}-1)}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\frac{1}{x+1}-1}{2x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{-1}{2(x+1)}}=e^{-\frac{1}{2}}$

南開大學 作业纸

练习5.5.

1.(1) $\because \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots\cdots + \frac{x^{2n}\cdot(-1)^n}{(2n)!} + o(x^{2n})$

$\therefore \cos x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{4n}}{(2n)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \cdot x^{4k}}{(2k)!} + o(x^{4n})$

(2) 由(1). $\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2x)^{2n}}{(2n)!}$

$\therefore \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!} - \frac{1}{2}o(x^{2n}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)^{k-1}\cdot(2x^2)^k}{(2k)!} - \frac{1}{2}o(x^{2n})$

(3). $\because \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$

$\therefore \ln(1-x^2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\cdot(-x^2)^{k+1} + o(x^{2k+2}) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+2}}{k+1} + o(x^{2n+2})$

(4) $\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)\cdots(-2-k+1)}{k!}\cdot x^k + o(x^n)$

$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k\cdot(k+1)!}{k!}\cdot x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\cdot(k+1)x^k + o(x^n)$

南開大學 作业纸

系别＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 第 页

2. (1) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(\tan x)'' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$ $(\tan x)''' = \frac{4\sin^2 x+2}{\cos^4 x}$

$\therefore f^{(0)}(0)=0.$ $f^{(1)}(0)=1$ $f^{(2)}(0)=0$ $f^{(3)}(0)=2.$ $\therefore \tan x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^3).$

(2). $f(x)=e^x\cos x$

$f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)$ $f''(x)=e^x(-2\sin x)$ $f'''(x)=-2e^x(\sin x+\cos x)$ $f''''(x)=-4e^x\cos x$

$\therefore f^{(0)}(0)=1,$ $f^{(1)}(0)=1$ $f^{(2)}(0)=0$ $f^{(3)}(0)=-2$ $f^{(4)}(0)=-4$

$\therefore e^x\cos x = 1+x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{6}+o(x^4)$

(3) $\because e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$ $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4).$

$$e^{\cos x} = e\cdot e^{\cos x-1} = e\left[1+(\cos x-1)+\frac{1}{2}(\cos x-1)^2+\cdots\right]$$

$$= e\left[1+\cancel{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)+\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{24}-\frac{x^2}{2}+o(x^4)\right]^2+o(x^4)\right]$$

$$= e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}\right)+o(x^4) = e-\frac{e}{2}x^2+\frac{e}{6}x^4+o(x^4)$$

(4) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $f''(x)=\frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ $f'''(x)=\frac{2x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

$\therefore f^{(0)}(0)=0$ $f^{(1)}(0)=1$ $f^{(2)}(0)=0$ $f^{(3)}(0)=-1$

$\therefore \ln(x+\sqrt{x^2+1}) = x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$

(5). $f(x)=\ln(1+x+x^2+x^3)$ $\ln(1+x+x^2+x^3) = \ln\left(\frac{1-x^4}{1-x}\right) = \ln(1-x^4)-\ln(1-x)$

$$= (-x^4)-\left[(-x)-\frac{1}{2}(-x)^2+\frac{1}{3}(-x)^3-\frac{1}{4}(-x^4)+\frac{1}{5}(-x)^5-\frac{1}{6}(-x)^6\right]+o(x^6)$$

$$= x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{3}{4}x^4+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}+o(x^6)$$

3. (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0.$

(2) $\because \ln(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o(x^{-3})$

$\therefore x\to+\infty$ 时. $x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})=x-[x-\frac{1}{2}+\frac{1}{3x}+o(x^{-1})]=x-x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]=\frac{1}{2}$

(3) $\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt{x^2-2x}=x(\sqrt[3]{1+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{2}{x}})$

$(1+\frac{3}{x^2})^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}+o(x^{-4})$, $(1-\frac{2}{x})^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+o(x^{-2})$

$\therefore \sqrt[3]{1+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{2}{x}}=\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}+o(x^{-2})$ $\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\triangle=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2})+o(x^{-1})=1$

(4). $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-\frac{x^3}{6})(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6})-x(1+x)}{x^3}+o(x)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{6}-\frac{x^5}{12}-\frac{x^6}{36}-x-x^2}{x^3}+o(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2+\frac{x^3}{3}-x-x^2}{x^3}+o(x)$

$=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{3}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})=\frac{1}{3}$

(5). $\because \cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$ $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$

$\therefore \cos(\sin x)=1-\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{1}{24}\sin^4 x+o(\sin^4 x)=1-\frac{1}{2}(x-\frac{x^3}{6})^2+\frac{1}{24}(x-\frac{x^3}{6})^4+o(x^4)$

$=1-\frac{1}{2}(x^2-\frac{x^4}{3})+\frac{1}{24}(x^4)+o(x^4)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}[\frac{1}{6}+o(x)]=\frac{1}{6}$

4.

证：根据泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+o[(x-x_0)^2]$$

代入 $x=x_0+h$.

$$\therefore f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0)+o(h^2).$$

$$f(x_0-h)=f(x_0)-hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0)+o(h^2)$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2f''(x_0)+o(h^2)}{h^2}=f''(x_0)+\lim_{h\to 0}o(h)=f''(x_0)$$

5.

证：根据泰勒公式

$$f(x+r)=f(x)+rf^{(1)}(x)+\frac{r^2}{2}f^{(2)}(x)+\frac{r^3}{6}f^{(3)}(x)+\cdots+\frac{r^n}{n!}f^{(n)}(x)+o(r^{n+1})$$

$$\therefore \frac{r^n}{n!}f^{(n)}(x)=f(x+r)-f(x)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{r^k}{k!}f^{(k)}(x)-o(r^{n+1})$$

$$\le f(x+r)-f(x) \quad \cdots\cdots [由于 r>0.\ f^{(n)}(x)>0]$$

$$\le |f(x+r)-f(x)| \le |f(x+r)|+|f(x)| \le 2M$$

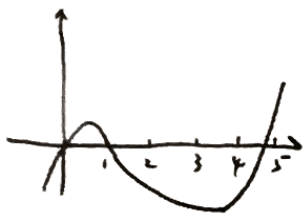
$$\therefore f^{(n)}(x)\le \frac{2Mn!}{r^n}$$

南開大學 作业纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 页

习题5(A)

1. $f(-1)=\frac{1}{2}-2<0$. $f(0)=f(1)=0$ $f(2)=f(4)<0$. $f(3)<0$. $f(5)>0$. $f(x)$ 有三零点 $0, 1, x_0$ $(x_0\in(4,5))$



$f'(x)=2^x\ln 2-2x$

$f''(x)=2^x(\ln 2)^2-2$

$f'''(x)=2^x\cdot(\ln 2)^3>0$

假设 $f(x)$ 存在第四个零点 y. $\because f(0)=f(1)=f(x_0)=0$. 不失一般性. 设 $y>x_0$

在 $(0,1)$. $(1,x_0)$. (x_0,y) 上应用Rolle定理. $\therefore \exists\ 0<\xi_1<1<\xi_2<x_0<\xi_3<y$

使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$

在 (ξ_1,ξ_2) 与 (ξ_2,ξ_3) 上应用Rolle定理 $\therefore \exists\ \xi_1<\eta_1<\xi_2<\eta_2<\xi_3$ 使 $f''(\eta_1)=f''(\eta_2)=0$

在 (η_1,η_2) 上应用Rolle定理. $\therefore \exists\rho\in(\eta_1,\eta_2)$ 使 $f'''(\rho)>0$. 与 $f'''(x)>0$ 矛盾.

$\therefore f(x)$ 在实轴上仅有三个零点.

2. 注意到: $\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'\Big|_{x=\xi}=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$. 因此令 $g(x)=f(x)-\frac{x}{1+x^2}$

$\because 0\le f(x)\le\frac{x}{1+x^2}$ 取 $x=0$ $\therefore f(0)=0$ $\therefore g(0)=f(0)=0$

$\because \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^2}=0$ $\therefore$ 由两边夹定理 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ $\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$

由练习5.1(3). $\exists\ \xi\in(0,+\infty)$ 使 $g'(\xi)=0$ 即 $f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

南開大學 作业纸

系别______ 班级______ 姓名______ 第 页

3. 注意到 $g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ 的导函数 $g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

我们令 $F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)\right]$. 其满足 $F(a)=F(b)=0$，且 $F'(x)=g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

只需证 $\exists\xi$ 使 $F'(\xi)>0$ 即可：

∵ $F(a)=F(b)=0$，$F(x)$ 不是线性函数 ∴ $F(x)$ 在 (a,b) 上不恒为零. 即 $\exists x_1\in(a,b)$ 使 $F(x_1)\neq 0$

• 若 $F(x_1)<0$ ∵ $F(x_1)<F(b)$ ∴ 在 (x_1,b) 上 $\exists\xi$ 使 $F'(\xi)=\frac{F(b)-F(x_1)}{b-x_1}>0$.

• 若 $F(x_1)>0$ ∵ $F(x_1)>F(a)$ ∴ 在 (a,x_1) 上 $\exists\xi$ 使 $F'(\xi)=\frac{F(x_1)-F(a)}{x_1-a}>0$.

4. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=2A$.

① 若 $A>0$. ∴ $\exists x_0$. 当 $x>x_0$ 时 $f'(x)>A$. 设 $g(x)=A(x-x_0)+f(x_0)$. 过 $(x_0,f(x_0))$，斜率为 A 的直线

记 $F(x)=f(x)-g(x)$ ∵ $F'(x)=f'(x)-A$ ∴ $x>x_0$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 递增.

∴ $x>x_0$ 时. $F(x)>F(x_0)=0$ 即 $f(x)>g(x)$

注意：$g(x)$ 是线性函数. $A>0$ ∴ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ ∴ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. 矛盾！

② 若 $A<0$ 同理可得矛盾

∴ $A=0$

<注1> 建议记忆本题结论：设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可导 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 均存在，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

<注2> 逆命题不成立. 反例如 $f(x)=\ln x$. $f'(x)\to 0$. 但 $f(x)\to+\infty$

<注3> $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在不能推出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在. 反例如 $f(x)=\frac{\sin x^2}{x}$. 其导数 $f'(x)=2\cos x^2-\frac{\sin x^2}{x^2}$

[模型] $f(x)$ 极限或有界时. $f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ 是重要的辅助函数. 我们可以使用反证法证明一些结论：基于上述辅助函数构造某个线性的函数 $g(x)$. 满足 $f(x)>g(x)$ 恒成立 得到与 f 极限/有界矛盾.

5. 不一定有界. 反例如 $f(x)=\begin{cases}|x|^{\frac{3}{2}}\cdot\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ $f'(x)=\frac{3}{2}\cdot|x|^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{x}-|x|^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{x}$.

$f'(x)$在0处剧烈震荡. 证明如下:

$x\to 0$时, $\frac{3}{2}|x|^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{x}\to 0$ 而对于$\to 0$子列$\{x_n\mid x_n=\frac{1}{2n\pi}\}$ $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos\frac{1}{x_n}=\sqrt{2n\pi}\to\infty$

$\therefore f'(x)$在$[-1,1]$无界.

<记忆> 闭区间上可导 $\not\Rightarrow$ 导函数在闭区间上有界

6. (1) 不一定. 反例如 $f(x)=x$

(2) 不一定. 反例如 $f(x)=\sin(x^2)$.

<记忆> 函数的有界性与其导函数的有界性没有关系

<补充题> $f(x)$在$[a,b]$上二阶可微且$f(a)=f(b)=0$. 求证: $\forall x\in(a,b)$, $\exists\xi$使 $f(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\cdot(x-a)(x-b)$.

7. 若$f'(x)$在(a,b)不连续. 设(a,b)上有间断点x_0.

① $f'(x)$递增 $\therefore x_0$为可去或第一类间断点

② 练习5.1(10): 导函数若间断, 只能有第二类间断点. 矛盾!

<记忆> 导函数若在开区间内单调, 则必连续

南開大學 作业纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 页

8. 要证 $\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(\xi)-\xi f'(\xi)$ 即证 $\frac{1}{a-b}\cdot\left(af(b)-bf(a)\right) = f(\xi)-\xi\cdot f'(\xi)$

即证 $\dfrac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} = f(\xi)-\xi\cdot f'(\xi)$; 记 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$. $h(x)=\frac{1}{x}$

$\because a>0$ $\therefore \frac{1}{x}$ 在 $[a,b]$ 上有定义 对 $g(x)$ 与 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用 cauchy 中值定理

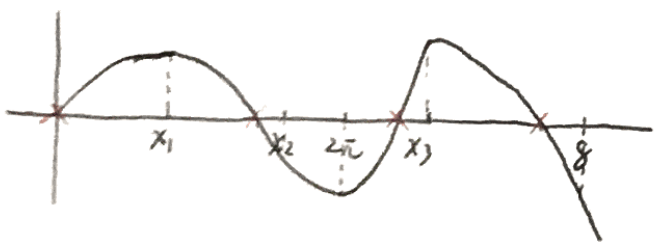
$\exists\xi\in(a,b)$ 使 $\dfrac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} = \dfrac{g'(\xi)}{h'(\xi)} = f(\xi)-\xi\cdot f'(\xi)$. 得证.

9. 由费马定理 $f'(x_0)=0$. 在 $[0,x_0]$ 与 $[x_0,a]$ 分别应用 Lagrange 中值定理:

$$\begin{cases} f'(x_0)-f'(0) = f''(\xi_1)\cdot(x_0-0) \\ f'(a)-f'(x_0) = f''(\xi_2)\cdot(a-x_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = -x_0\cdot f''(\xi_1) \\ f'(a) = (a-x_0)\cdot f''(\xi_2) \end{cases} \quad (0<\xi_1<x_0<\xi_2<a).$$

$\therefore |f'(0)|+|f'(a)| = |f''(\xi_1)|\cdot x_0 + |f''(\xi_2)|\cdot(a-x_0) \le M(x_0+a-x_0) = Ma$.

10. 令 $f(x)=\sin x-\frac{x}{8}$ 其为奇函数 $|x|>8$ 时 $f(x)\neq 0$.



$f'(x)=\cos x-\frac{1}{8}$

$x_1=\arccos\frac{1}{8}\approx 1.45$

$x_2=2\pi-\arccos\frac{1}{8}\approx 4.83$ $\quad f(x_2)<0$

$x_3=2\pi+\arccos\frac{1}{8}\approx 7.7$

由图象. 结合对称性. $f(x)$ 有 7 个实根.

11. $\Rightarrow$ 若$f(x)$在$[a,b]$严格递增，显然 $f'(x)\geq 0$ 在(a,b)上成立（条件1满足）

反设 $\exists (c,d)\subseteq(a,b)$，$\forall \xi\in(c,d)$有 $f'(\xi)\leq 0$，即$f'(\xi)=0$

$\therefore$ $f(x)$在(c,d)内恒为常数，与$f(x)$严格递增矛盾 （条件2满足）

$\Leftarrow$ $\because$ $f'(x)\geq 0$ 在(a,b)成立 $\therefore$ $f(x)$在(a,b)递增，即对$\forall x',x''$: $a\leq x'<x''\leq b$，$f(x')\leq f(x'')$

反设$f(x)$在(a,b)不严增，即$\exists x_1,x_2\in[a,b]$，$x_1<x_2$ 使 $f(x_1)=f(x_2)$

由$f(x)$单调性，对$\forall x\in[x_1,x_2]$，$f(x_1)=f(x)=f(x_2)$，即$f(x)$在(x_1,x_2)内恒为常数

$\therefore$ $x\in(x_1,x_2)$时，$f'(x)=0$ 与条件2矛盾 $\therefore$ $f(x)$在$[a,b]$严增。

<注1> 本题描述了函数严格单调的充要条件

<注2> "$f'(x)>0$" 只是$f(x)$严增的充分条件，但不是必要条件 （$f(x)=x^3$，$f'(0)=0$）

12. 对$\forall x>0$，在$(0,x)$上对$f(x)$应用Lagrange中值定理，$\exists \xi\in(0,x)$使 $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{f(x)}{x}=f'(\xi)$

$\because$ $0<\xi<x$，$f'(x)$在$[0,+\infty)$递增 $\therefore$ $\frac{f(x)}{x}=f'(\xi)<f'(x)$

$\because$ $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x-0}=f'(0)=g(0)$ $\therefore$ $g(x)$在$x=0$处连续

又$x>0$时，$\because$ $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{f'(x)-\frac{f(x)}{x}}{x}=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x}>0$

$\therefore$ $g(x)$在$[0,+\infty)$上严格递增

13. (1) 令 $f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{\sqrt{1+x}}$. $f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{\sqrt{1+x}-\frac{x}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}=\frac{1}{1+x}-\frac{x+2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\sqrt{1+x}-x-2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$

$\therefore f'(x)=\frac{-(x+1)+2\sqrt{x+1}-1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{(\sqrt{1+x}-1)^2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}<0$ $(x>0)$. $\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减

$\therefore f(x)<f(0)=0$ $\therefore \ln(1+x)<\frac{x}{\sqrt{1+x}}$

(2) 只需证 $\frac{e^{a-b}-1}{a-b}<\frac{e^{a-b}+1}{2}$ 不妨设 $a>b$. 记 $x=a-b>0$.

即证 $\frac{e^x-1}{x}<\frac{e^x+1}{2}$ 即证 $2(e^x-1)-x(e^x+1)<0$.

令 $f(x)=2(e^x-1)-x(e^x+1)$ $f'(x)=2e^x-(e^x+1)-xe^x=(1-x)e^x-1$

$f''(x)=-x\cdot e^x<0$ $\therefore f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减 $\therefore f'(x)<f'(0)=0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减 $\therefore f(x)<f(0)=0$.

(3) 令 $t=\frac{b}{a}$. 只需证 $\ln t<\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}$ 及 $\frac{t-1}{t+1}<\frac{\ln t}{2}$ $(t>1)$

令 $f(t)=\ln t-\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}$. $f'(t)=\frac{-(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}}<0$ $\therefore f(t)<f(1)=0$. $\therefore \ln t<\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}$

令 $g(t)=\frac{\ln t}{2}-\frac{t-1}{t+1}$ $g'(t)=\frac{1}{2t}-\frac{2}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{2t(t+1)^2}>0$ $\therefore g(t)>g(1)=0$ $\therefore \frac{t-1}{t+1}<\frac{\ln t}{2}$

(4) 只需证 $\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{\beta}}<\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$ 记 $a=\frac{y}{x}$. 令 $\varphi(t)=(1+a^t)^{\frac{1}{t}}$ $t\in[\alpha,\beta]$.

$\varphi'(t)=\frac{d}{dt}e^{\frac{\ln(1+a^t)}{t}}=(1+a^t)^{\frac{1}{t}}\cdot\frac{a^t\ln a^t-(1+a^t)\ln(1+a^t)}{t^2(1+a^t)}<0$

$\because \varphi$ 严减 因此 $\varphi(\beta)<\varphi(\alpha)$. 得证.

南開大學 作业纸

系别______ 班级______ 姓名______ 第 页

14. 不一定．反例如 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}+cx & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}+c \to c-\cos\frac{1}{x}$ $(x\to 0$时$)$

当 $c\in(0,1)$ 时．对 $\forall\delta>0$．均 $\exists x_0\in B_\delta(x_0)$ 使 $f'(x)<0$

15. 不一定．反例如 $f(x)=\begin{cases} x^2\left|\sin\frac{1}{x}\right| & x\neq 0 \\ 0 & x=0. \end{cases}$ 由于其为偶函数．我们只研究 $(0,\delta)$：

$\because$ 对 $\forall k\in\mathbb{Z}^+$．$f(\frac{1}{k\pi})=0$ $(\frac{1}{k\pi}\to 0)$ $\therefore$ 对 $\forall\delta>0$．$\exists x_0\in(0,\delta)$ 使 $f(x_0)=0$．

$\because f(x)$ 不恒为 0，$f(0)=f(x_0)=0$． $\therefore f(x)$ 在 $[0,\delta)$ 上不单增，进而 $(-\delta,0]$ 上不单减

<记忆 14.15 两题的反例>．$f'(x_0)>0 \not\Rightarrow \exists B_\delta(x_0)$ 使 $f(x)$ 递增；

x_0 是连续函数 $f(x)$ 极小值点 $\not\Rightarrow \exists\delta>0$ 使 f 在 $(x_0-\delta,x_0)\downarrow$ 而 $(x_0,x_0+\delta)\uparrow$

16. 令 $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$． $G(x)=\frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}=\frac{F(x)+1}{F(x)-1}=1+\frac{2}{F(x)-1}$

由已知 $\frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}\geq\frac{f(x_0)+g(x_0)}{f(x_0)-g(x_0)}$ $\therefore g(x)f(x_0)\geq f(x)\cdot g(x_0)$

$\therefore \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\geq\frac{f(x)}{g(x)}$ 由 x 任意性．得证 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 x_0 取得极大值

南開大學 作业纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 页

17. 若$\exists x_1$使$f(x_1)>f(x_0)$. 不妨设$x_1>x_0$.

$\because x_0$是$f(x)$的极大值点 $\therefore \exists x_2\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，使$f(x_2)<f(x_0)$.

不妨设$x_2\in(x_0,x_0+\delta)$. 由δ任意性，将δ取充分小使$x_0<x_2<x_0+\delta<x_1$.

$\therefore f(x_2)<f(x_0)<f(x_1)$. 由介值定理，$\exists x_3\in(x_2,x_1)$使$f(x_3)=f(x_0)$.

其中$x_3>x_2>x_0$ $\because f(x_0)=f(x_3)$ 由Rolle定理，$\exists x_4\in(x_0,x_3)$使$f'(x_4)=0$.

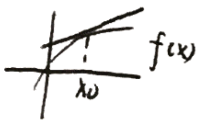
与$f(x)$只有x_0一个驻点矛盾. 故不存在x_1使$f(x_1)>f(x_0)$，即$f(x_0)$是f在I上的最大值.

18. <与习题5A-4思路相似>

假设对$\forall x\in\mathbb{R}$，$f''(x)\neq0$. 对$f'(x)$应用达布定理：$f''(x)$要么恒正，要么恒负.

不妨设$f''(x)<0$恒成立 $\therefore f$在$\mathbb{R}$上严格上凸. 取点x_0满足$f'(x_0)\neq0$

由f上凸，$f(x)<f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.



$$\begin{cases}\text{若 } f'(x_0)>0 & \text{取 } x\to-\infty \quad \therefore \text{右式}\to-\infty \quad \therefore f(x)=\text{左式}\to-\infty\\ \text{若 } f'(x_0)<0 & \text{取 } x\to+\infty \quad \therefore \text{右式}\to-\infty \quad \therefore f(x)=\text{左式}\to-\infty\end{cases}$$

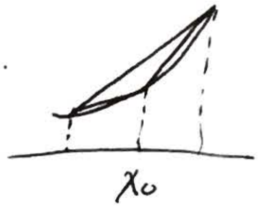
与$f(x)$有界矛盾.

$\therefore \exists x_0$使$f''(x)=0$.

南開大學 作业纸

系别______ 班级______ 姓名______ 第 页

19. 设 $0<h_1<h_2$. 则对 $x_0<x_0+h_1<x_0+h_2$. (h_2 取充分小, 令 $x_0+h_2\in I$)



由引理1(P141)得 $\dfrac{f(x_0+h_1)-f(x_0)}{h_1}\le\dfrac{f(x_0+h_2)-f(x_0)}{h_2}$.

令 $F(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 由上式可知 F 为增函数 ∴ $x\to x_0^+$ 时 F 减少

任取 $x'\in I$ 且 $x'<x_0$. 则对 $\forall h>0$. 只要 $x_0+h\in I$. 也有:

$\dfrac{f(x_0)-f(x')}{x_0-x'}\le\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=F(h)$ ∴ $h>0$ 时. 在 $x\to x_0^+$ 过程中 $F(h)$ 有下界

由<引理> $F(h)$ 极限存在. 即 $f_+'(x_0)$ 存在. 同理 $f_-'(x_0)$ 存在, $f_-'(x_0)\le f_+'(x_0)$.

<引理> 设 f 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 上单调有界. 则 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在.

proof: 不妨设 f 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 上递增 ∴ f 在其上有界 ∴ 由确界存在定理 $\inf\limits_{(x_0,x_0+\delta)}f(x)$ 存在.

记 $A=\inf\limits_{(x>x_0)}f(x)$. 下证 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

对 $\forall\varepsilon>0$ 由 inf 定义 $\exists x'\in(x_0,x_0+\delta)$ 使 $f(x')<A+\varepsilon$.

取 $\delta_1=x'-x_0>0$ 由 f 递增 对 $\forall x\in(x_0,x_0+\delta_1)$ 有 $f(x)\le f(x')<A+\varepsilon$.

此外. 由 $A\le f(x)$. 有 $A-\varepsilon<f(x)$. ∴ 对 $\forall x\in(x_0,x_0+\delta_1)$ 有 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$

∴ $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

20. (1) 令 $f(t)=\ln\frac{\sin t}{t}$ ∴ $f'(t)=\frac{t\cos t-\sin t}{t\sin t}=t\cdot\cot t-\frac{1}{t}$ $t\in(0,\frac{\pi}{2})$

∴ $f''(t)=-\frac{1}{\sin^2 t}+\frac{1}{t^2}=\frac{\sin^2 t-t^2}{t^2\sin^2 t}<0$ ∴ f 严格上凸.

由Jenson不等式 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\le f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}fx_i)$ 得 $\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{\sin x_i}{x_i}\le n\ln\frac{\sin x}{x}$ 即 $\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin x_i}{x_i}\le\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$

(2) 令 $f(t)=\frac{1}{1+e^t}$ $f'(t)=-\frac{e^t}{(1+e^t)^2}$ $f''(t)=\frac{2e^{2t}-e^t(1+e^t)}{(1+e^t)^3}=\frac{e^t(e^t-1)}{(1+e^t)^3}<0$ $(t<0)$

∴ $f(t)$在$(-\infty,0)$严格上凸 由Jenson不等式 $\frac{1}{1+e^{\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\ln x_i}}\ge\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+e^{\ln x_i}}$ 即 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+x_i}\le\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_i}}$

(3) 令 $x_i=\frac{a_i}{(a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}}$ $y_i=\frac{b_i}{(b_1^q+b_2^q+\cdots+b_n^q)^{\frac{1}{q}}}$ 只需证 $x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n\le 1$.

由Young不等式(P149-练习5.3(1)): 对于 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的p,q, $ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$

∴ $x_iy_i\le\frac{x_i^p}{p}+\frac{y_i^q}{q}$ ∴ $\sum x_iy_i\le\frac{\sum x_i^p}{p}+\frac{\sum y_i^q}{q}$

∵ $\sum x_i^p=\frac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{a_1^p+\cdots+a_n^p}=1$, $\sum y_i^q=\frac{b_1^q+\cdots+b_n^q}{b_1^q+\cdots+b_n^q}=1$ ∴ $\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\le\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 得证.

(4). 取 $\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}$. 由Hölder不等式:

$\sum_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)^{\frac{p}{q}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}$, $\sum_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)^{\frac{p}{q}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}$

∴ $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{p(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\cdot(a_i+b_i)^{\frac{p}{q}}=\sum_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)^{\frac{p}{q}}+\sum_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)^{\frac{p}{q}}$

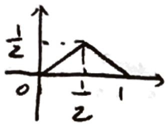
$\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}=\left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}$

∴ $\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$

南開大學 作业纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 页

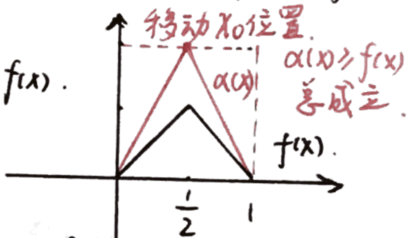
21. 记 $f(x)=\min\{x,1-x\}$. 在 $[0,1]$ 上图像为:



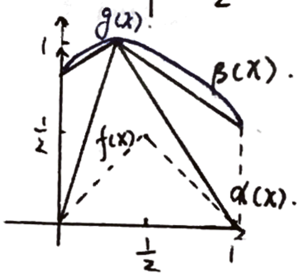
若 $\max\limits_{[0,1]} u(t)=0$. 则 $u(t)\equiv 0$, $t\in[0,1]$. 结论显然成立. 不妨设 $\max\limits_{[0,1]} u(t)>0$.

令 $g(x)=\dfrac{u(x)}{\max\limits_{[0,1]}u(x)}$. ∴在 $[0,1]$ 上. $0\le g(x)\le 1$ 且 $g(x)$ 连续上凸. 以下证明 $g(x)\ge f(x)$:

设 $g_{max}=g(x_0)=1$. $x_0\in[0,1]$. 令 $\alpha(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x_0} & 0\le x\le x_0\\ \dfrac{1-x}{1-x_0} & x_0<x\le 1\end{cases}$ 显然 $\alpha(x)\ge f(x)$.



取 $\theta_1=g(0)\ge 0$ $\theta_2=g(1)\ge 0$. 令 $\beta(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\theta_1}{x_0}x+\theta_1 & 0\le x\le x_0\\ \dfrac{1-\theta_2}{x_0-1}(x-1)+\theta_2 & x_0<x\le 1\end{cases}$



显然 $\beta(x)\ge\alpha(x)$. 由上凸性 $g(x)\ge\beta(x)$ ∴ $g(x)\ge\beta(x)\ge\alpha(x)\ge f(x)$ 成立.

22. 记 $\varphi(t)=f(x)-\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i$ ∴ $\varphi(x)=0$

由 Lagrange 定理. $R_n(x-x_0)=\varphi(x_0)=\varphi(x_0)-\varphi(x)=-\varphi'(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)$

$$\because \frac{d\varphi(t)}{dt}=\cancel{-f'(t)}-\left[f''(t)\cancel{(x-t)}-\cancel{f'(t)}\right]-\left[\frac{1}{2!}f'''\cancel{(t)}\cdot(x-t)^2-\frac{1}{2!}\cdot 2f''\cancel{(t)}(x-t)\right]$$
$$\left[\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n-\frac{n}{n!}\cdot f^{(n)}\cancel{(t)(x-t)^{n-1}}\right]=-\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n$$

$$\therefore R_n(x-x_0)=-\varphi'(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)=\frac{1}{n!}\cdot f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))\cdot(x-x_0-\theta(x-x_0))^n(x-x_0)$$
$$=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}$$

23. (1) $n=0$时. $\because f(\frac{1}{m})=0$. 由$f$连续, $f(0)=\lim_{m\to\infty} f(\frac{1}{m})=0$. 成立.

$n=1$时. $\because f(1)=f(\frac{1}{2})=0$. $\exists\, \xi_1\in(\frac{1}{2},1)$ 使 $f'(\xi_1)=0$

$\because f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{3})=0$ $\exists\, \xi_2\in(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ 使 $f'(\xi_2)=0$

......

构造点列$\{\xi_n\}$. $\frac{1}{n+1}<\xi_n<\frac{1}{n}$ 且 $f'(\xi_n)=0$

$\because \xi_n\to 0$. 由$f'(x)$连续性 $\therefore f'(0)=\lim_{n\to\infty} f'(\xi_n)=0$

$n=2$时. 构造点列$\{\eta_n\}$ $\eta_n\to 0$, $f''(\eta_n)=0$ 由$f''(x)$连续性 $f''(0)=\lim_{n\to\infty} f''(\eta_n)=0$

......

同理. 可知$f^{(n)}(0)=0$ 对$\forall n\in N$ 均成立.

(2). 在$x=0$处对$f(x)$ taylor展开.

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\cdots\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\cdot x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\cdot x^n=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\cdot x^n \quad (0<\xi<x)$$

$\therefore |f(x)|\le \frac{M}{n!}|x|^n$

$\because$ 对$\forall x$, $\lim_{n\to\infty}\frac{M}{n!}|x|^n=0$ $\therefore f(x)=0$. $\therefore f(x)\equiv 0$

南開大學 作业纸

系别______ 班级______ 姓名______ 第 页

24. peano余项展式：$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\cdot h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot h^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}\cdot h^{n+1}+o(h^{n+1})$

Lagrange余项展式：$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{n!}\cdot h^n$ $(0<\theta<1)$

两式对比 $\therefore \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot h^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}h^{n+1}+o(h^{n+1})=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{n!}\cdot h^n$

$\therefore f^{(n)}(x_0)+h\cdot\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n+1}+o(h)=f^{(n)}(x_0+\theta h)$

由Lagrange定理．$\exists\delta\in(0,\theta)$ 使 $h\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n+1}+o(h)=f^{(n)}(x_0+\theta h)-f^{(n)}(x_0)=\theta h\cdot f^{(n+1)}(x_0+\delta h)$

$\therefore \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n+1}+o(1)=\theta\cdot f^{(n+1)}(x_0+\delta h)$ 令 $h\to0^+$ $\therefore \lim_{h\to0}\theta=\frac{1}{n+1}$

25. $f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\cdot f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}f''(x_0)+\cdots+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f^{(n-1)}(x_0)+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(\xi)$. $(x_0<\xi<x)$

$\because f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ $\therefore f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$

显然 $f^{(n)}(\xi)\neq0$．（否则 $f(x)\equiv C$，$f^{(n)}(x)=0$．矛盾） $\therefore f'(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}\cdot(x-x_0)^{n-1}$ $(n\geq1$ 时$)$

(1) $\because n$为奇数 $\therefore n-1$为偶数 不妨设 $f^{(n)}(\xi)>0$.

$\because f'(x_0)=0$ 而 $\begin{cases}x>x_0\text{时} & f'(x)>0 & f\text{单增}\\ x<x_0\text{时} & f'(x)>0 & f\text{单增}\end{cases}$ $\therefore x_0$不是$f(x)$极值点．（$f^{(n)}(\xi)<0$时同理）

(2) 由 $f'(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$ 知 $f^{(n)}(x)=f^{(n)}(\xi)$ $\therefore f^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(\xi)$．此外$n-1$为奇数．

$\therefore$ 当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时 即 $f^{(n)}(\xi)>0$ $\therefore\begin{cases}x>x_0\text{时} & f'(x)>0 & f\text{单增}\\ x<x_0\text{时} & f'(x)<0 & f\text{单减}\end{cases}$

$\therefore x_0$是$f(x)$极小值点

当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时 同理 x_0是$f(x)$极大值点．

26. 由 $\begin{cases} f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\dfrac{h^2}{2}f''(\xi) \\ f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\dfrac{h^2}{2}f''(\eta) \end{cases} \xrightarrow{\text{相减}} f'(x)=\dfrac{1}{2h}\left[f(x+h)-f(x-h)+\dfrac{h^2}{2}\left(f''(\eta)-f''(\xi)\right)\right]$

$\therefore |f'(x)| \leq \dfrac{1}{2h}\left(|f(x+h)|+|f(x-h)|+\dfrac{h^2}{2}|f''(\eta)|+\dfrac{h^2}{2}|f''(\xi)|\right) \leq \dfrac{1}{2h}\left(2M_0+h^2M_2\right)=\dfrac{M_0}{h}+\dfrac{hM_2}{2}$

$\because$ 对 $\forall h>0$ 上式均成立. 且 $\dfrac{M_0}{h}+\dfrac{hM_2}{2} \geq \sqrt{2M_0M_2}$ $\therefore |f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

<记忆结论> ① $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上 2 次可导. $x\in(a,+\infty)$ 时. $|f(x)|\leq M_0$, $|f''(x)|\leq M_2 \Rightarrow |f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0M_2}$

② $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 2 次可导. 对 $\forall x\in\mathbb{R}$. $|f(x)|\leq M_0$, $|f''(x)|\leq M_2 \Rightarrow |f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$

27. 对 $\forall$ 固定的 $x\in[0,2]$

f 在 x 点作 taylor 展开: $f(t)=f(x)+f'(x)\cdot(t-x)+\dfrac{f''(\xi)}{2}(t-x)^2$

取 $t=0$. $t=2$. 得: $\begin{cases} f(0)=f(x)-xf'(x)+\dfrac{x^2}{2}f''(\xi_1) \\ f(2)=f(x)+(2-x)f'(x)+\dfrac{(2-x)^2}{2}f''(\xi_2) \end{cases}$ 其中 $0<\xi_1<x<\xi_2<2$

相减得 $2f'(x)=f(2)-f(0)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}x^2-\dfrac{f''(\xi_2)}{2}(2-x)^2$

$\therefore 2|f'(x)| \leq |f(2)|+|f(0)|+\dfrac{|f''(\xi_1)|}{2}\cdot x^2+\dfrac{|f''(\xi_2)|}{2}\cdot(2-x)^2$

$\leq 2+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{(2-x)^2}{2}=3+(x-1)^2=x^2-2x+4 \leq 4 \quad (0<x<2)$

$\therefore |f'(x)| \leq 2$

28. $$\begin{cases} f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2=f(a)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2 \\ f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\dfrac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2=f(b)+\dfrac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2 \end{cases}$$

为使 $x-b=a-x$，我们令 $x=\frac{a+b}{2}$ 由上式，有：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \qquad \left(a<\xi_1<\frac{a+b}{2}<\xi_2<b\right)$$

相减，有 $|f(b)-f(a)|\cdot\frac{4}{(b-a)^2}=\frac{1}{2}\cdot|f''(\xi_1)+f''(\xi_2)|\leq\frac{1}{2}(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|)\leq|f''(\xi)|$.

<模型> 处理 a.b 两点展开式时：分别代入 $x=\frac{a+b}{2}$ ⟶ 两式相减 ⟶ 化简变形

29. 将 f 在 0 处展开：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(\xi)}{6}x^3 \quad (0<\xi<x)$

分别令 $x=1$，$x=-1$ 有 $$\begin{cases} f(1)=\dfrac{f''(0)}{2}+\dfrac{f'''(\xi_1)}{6}=1 \\ f(-1)=\dfrac{f''(0)}{2}-\dfrac{f'''(\xi_2)}{6}=0 \end{cases}$$

两式相减得 $1=\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{6}\leq\frac{f'''(\xi)}{3}$ 其中 $\xi=\begin{cases}\xi_1 & f(\xi_1)\geq f(\xi_2)\\ \xi_2 & f(\xi_2)<f(\xi_1)\end{cases}$

$\therefore \exists\,\xi\in(-1,1)$ 使 $f'''(\xi)\geq 3$

<注> 与 5A-28 思路相似

30. $\because \begin{cases} f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{a-b}{2} + \frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \\ f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2} + \frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \end{cases}$

相加得 $f(a)+f(b) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(a-b)^2}{4}\cdot\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$

$\therefore f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) = \frac{(a-b)^2}{4}\cdot\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2} \quad \left(a<\xi_1<\frac{a+b}{2}<\xi_2<b\right)$

$\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，且：

$\min\{f''(\xi_1), f''(\xi_2)\} \le \frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2} \le \max\{f''(\xi_1), f''(\xi_2)\}$

由达布定理，$\exists\, \xi \in (\xi_1, \xi_2)$ 使 $f''(\xi) = \frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$

即 $\exists\, \xi \in (a,b)$ 使 $f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\xi)$

〈注〉本题思路与前几题完全类似，但需证结论是等号而非不等号，应用达布定理即可

习题5(B)-选讲

$f^2(x)$求导. $f(1-x)$求导.

5B-2 即证∃ξ使 $2f'(\xi)\cdot f(1-\xi)-f(\xi)\cdot f'(1-\xi)=0$

令 $F(x)=f^2(x)\cdot f(1-x)$. $F'(x)=2f(x)\cdot f'(x)f(1-x)-f^2(x)\cdot f'(1-x)=[2f'(x)f(1-x)-f(x)\cdot f'(1-x)]\cdot f(x)$

∵ $F(0)=F(1)=0$ 由Rolle定理 ∃ξ∈(0,1)使 $F'(\xi)=0$.

∵ ξ∈(0,1)时 $f(\xi)\neq 0$ ∴ $2f'(\xi)\cdot f(1-\xi)-f(\xi)\cdot f'(1-\xi)=0$.

其导数为

5B-3 注意到 $f^{(n+1)}(x)-f(x)=[f'(x)+f''(x)+\cdots+f^{(n+1)}(x)]-[f(x)+f'(x)+\cdots+f^{(n)}(x)]\triangleq g'(x)-g(x)$

构造辅助函数 $F(x)=g(x)\cdot e^{-x}=[f(x)+f'(x)+\cdots+f^{(n)}(x)]\cdot e^{-x}$, $F'(x)=e^{-x}(g'(x)-g(x))$.

∵ $f^{(k)}(0)=f^{(k)}(1)=0$. $(k=0,1,2,\cdots,n)$ ∴ $F(0)=F(1)=0$

在(0,1)上应用Rolle定理. ∃ξ∈(0,1)使 $F'(\xi)=0$ 即 $g'(\xi)-g(\xi)=0$ 即 $f^{(n+1)}(\xi)=f(\xi)$.

〈注意〉$\boxed{\text{对于所需求证等式}\triangle\text{情形}}$

若△可写成 $f(x)+f'(x)$ 的形式: 构造函数 $g(x)=f(x)\cdot e^{x}$. $g'(x)=e^{x}(f(x)+f'(x))$

若△可写成 $f'(x)-f(x)$ 的形式: 构造函数 $g(x)=f(x)\cdot e^{-x}$ $g'(x)=e^{-x}(f'(x)-f(x))$

若△可写成 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 的形式: 构造函数 $g(x)=\ln f(x)$ $g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$

5B-4. 为使 $F(a)=F(b)=F(c)=0$

我们构造辅助函数 $F(x)=f(x)-\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}f(a)-\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}f(b)-\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c)$. ⟨lagrange 插值函数⟩

此时 $F(a)=F(b)=F(c)=0$. 由Rolle定理：$\exists \xi_1\in(a,c)$ 使 $F'(\xi_1)=0$，$\exists \xi_2\in(c,b)$ 使 $F'(\xi_2)=0$.

在 (ξ_1,ξ_2) 上，由Rolle定理：$\exists \xi\in(\xi_1,\xi_2)$ 使 $F''(\xi)=0$.

即 $\frac{1}{2}f''(\xi)=\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-c)(b-a)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$

5B-7 应用泰勒公式，沿袭5A-27~28思路，容易证明。本题我们采用更基础的证法。

在 $[0,1)$ 上取闭区间 $[0,\frac{1}{2}]$. $\because f'$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 连续，故在其上有界，设 $M=\max\limits_{[0,\frac{1}{2}]}|f(x)|$

①若 $M=0$，则 $f'(x)=0$ $\therefore f(x)\equiv 0$ $(0\le x\le \frac{1}{2})$

②若 $M>0$ 由Lagrange定理 $|f(x)|=|f(x)-f(0)|=|f'(\xi)\cdot x|\le \frac{M}{2}$ $\therefore |f'(x)|\le M+\frac{M}{2}=\frac{3}{2}M$.

由Lagrange定理 $|f'(x)|=|f'(x)-f'(0)|=|f''(\eta)\cdot x|\le \frac{3}{4}M$.

$\because \frac{3}{4}M<M$. 矛盾. 故 $M>0$ 不成立.

由①②讨论 $f(x)\equiv 0$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上成立.

对 $\forall b\in(\frac{1}{2},1)$. 在 $[\frac{1}{2},b]$ 上同理 $f(x)\equiv 0$ 成立. 因此在 $[\frac{1}{2},1)$ 上 $f(x)\equiv 0$.

同理 $(-1,0]$ 上 $f(x)\equiv 0$. $\therefore f(x)\equiv 0,\ \forall x\in(-1,1)$.

5B-9 即证 $\exists\{x_i\}_{i=1}^{n}$ 使 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_1+\cdots+a_n}\cdot\frac{1}{f'(x_i)}=1$. 令 $\lambda_i=\frac{a_i}{a_1+\cdots+a_n}$ 显然 $0<\lambda_i<1$ 即证 $\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{f'(x_i)}=1$

$\because f(0)=0.\ f(1)=1$

在 $(0,1)$ 上应用介值定理. $\exists t_1\in(0,1)$ 使 $f(t_1)=\lambda_1$

在 $(\lambda_1,1)$ 上应用介值定理. $\exists t_2\in(t_1,1)$ 使 $f(t_2)=\lambda_1+\lambda_2$

在 $(\lambda_1+\lambda_2,1)$ 上应用介值定理. $\exists t_3\in(t_2,1)$ 使 $f(t_3)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$.

$\cdots\cdots$

在 $(0,1)$ 内能找到 $(n-1)$ 个点 $t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}$. 记 $t_0=0$. $t_n=1$. 则有:

$t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n$ 使 $f(t_i)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_i$

由 Lagrange 定理. 对 $\forall i$, $\exists x_i\in(t_{i-1},t_i)$ 使 $\frac{f(t_i)-f(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}=f'(x_i)$

即 $\lambda_i=f'(x_i)\cdot(t_i-t_{i-1})$ $\therefore \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{f'(x_i)}=t_1-t_0+t_2-t_1+\cdots+t_n-t_{n-1}=t_n-t_0=1$. 得证

5B-10. 联系 5B-3 中补充注记.

令 $G(x)=e^x\cdot f(x)$ 注意到 $G'(x)=e^x\cdot(f(x)+f'(x))$

由 Cauchy 中值定理 $\exists\xi\in(x,y)$ 使 $\frac{G(x)-G(y)}{e^x-e^y}=\frac{G'(\xi)}{e^\xi}=f(\xi)+f'(\xi)$

$\therefore \left|\frac{e^xf(x)-e^yf(y)}{e^x-e^y}\right|=|f(\xi)+f'(\xi)|\le 1$. 令 $y\to-\infty$

由 $f(y)$ 有界性 $\therefore |f(x)|\le 1$.

5B-11 (引理A)(练习5.1-3) 若 $f(a^+)=f(b^-)$ 则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$ (开区间上的Rolle定理)

(引理B)(练习5.1-9) 若 $f(x)$ 在a某邻域连续,去心邻域可导, $f'(a^+)$ 存在 ⇒ 则 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a+}f'(x)$

$\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导 (a,b) 内二次可导 $\therefore f$ 在 $[a,b]$ 连续, f' 在 (a,b) 连续.

①假设 $f'(a)=f'(b)$ $\therefore f'_+(a)=f'_-(b)$ 由引理B $\lim\limits_{x\to a+}f'(x)=\lim\limits_{x\to b-}f'(x)$

由引理A. $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $f''(\xi)=0$ 结论成立

②若 $f'(a)\neq f'(b)$ 令 $g(x)=f(x)-[f'(b)-f'(a)]\dfrac{(x-a)^2}{2(b-a)}$

$\because \varphi'(a)=f'(a)=\varphi(b)$. 由① $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $\varphi''(\xi)=0$ 即 $f''(\xi)=\dfrac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$.

〈注〉本题中没有闭区间上f连续的条件,却得到了与lagrange定理相似的结果.

5B-12 解 设 $G(x)=[f(x)-f(a)]\cdot e^{\frac{-x}{b-a}}$ 反设 $G'(x)$ 恒不为零

由达布定理: $G'(x)$ 恒正或恒负 不妨设 $G'(x)<0$ 恒成立. 则 $G(x)$ 严格递减

$\because G'(x_0)=\left(f'(x_0)-\dfrac{f(x_0)-f(a)}{b-a}\right)\cdot e^{-\frac{x_0}{b-a}}$

由于 $f'(x_0)=0$ 故 $G'(x_0)=-\dfrac{f(x_0)-f(a)}{b-a}\cdot e^{-\frac{x_0}{b-a}}<0$

说明 $f(x_0)>f(a)$ $\therefore G(x_0)>0=G(a)$ 与 $G(x)$ 递减矛盾.

$\therefore\exists\xi\in(a,b)$ 使 $G'(\xi)=0$.

〈注〉常用结论:若导函数恒非零. 则其要么恒正,要么恒负. (否则违背介值性)

这个结论常用于反证法的证明.

南開大學 作业纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 页

SB-15 (1) $\because f(a)\cdot f(b)<0$ $\therefore f(x)=0$ 在 (a,b) 上有解.

$\because f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒不为零 $\therefore f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒正或恒负.

$\therefore f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调. 即 $f(x)=0$ 在 (a,b) 上有唯一解 ξ.

<注> 本题可视作零点存在定理的强化: $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 恒不为零且 $f(a)\cdot f(b)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 (a,b) 有唯一解.

(2) ① 先证 $\{x_n\}$ 收敛:

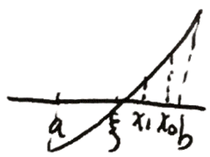
$\because f'(x)$ 在 $[a,b]$ 恒非零. 不妨设 $f'(x)>0$ $(a\le x\le b)$ $\therefore f(x)$ 严格递增.

$\because f''(x)$ 在 $[a,b]$ 恒非零. 不妨设 $f''(x)>0$. $(a\le x\le b)$ $\therefore f(x)$ 严格下凸

$\because f''(x_0)>0$ $\therefore f(x_0)>0$

由 $f(x)$ 严格下凸. 对 $\forall x$, $f(x)>f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

$\therefore 0=f(\xi)>f(x_0)+f'(x_0)\cdot(\xi-x_0)$



记 $L(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$. $\because L(x_0)=f(x_0)>0$. $L(\xi)<f(\xi)=0$.

由介值定理. $\exists\, x_1\in(\xi,x_0)$ 使 $L(x_1)=0$ $\therefore x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$\because f(x_1)>0$ $f''(x)>0$ 同理. $\exists\, x_2\in(\xi,x_1)$ 使 $x_2=x_1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

以此类推. 得一数列 $\{x_n\}$ 递减且以 ξ 为下界. 由单调收敛定理 $\{x_n\}$ 收敛.

② 再证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$:

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\eta$. 对 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 两边取 $n\to\infty$ 极限

$\therefore \eta=\eta-\dfrac{f(\eta)}{f'(\eta)}$ $\therefore f(\eta)=f'(\eta)=0$ 由(1)中已证零点唯一性. $\eta=\xi$.

<注> 本题即为牛顿迭代法. 可机械求解复杂方程的数值解.

5B-16. 令 $\varphi(x)=\begin{cases}\arctan f(x) & a<x<b\\ \frac{\pi}{2} & x=a\\ -\frac{\pi}{2} & x=b\end{cases}$ $\because \varphi$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导.

由 lagrange 定理. $\exists\, \xi\in(a,b)$ 使 $-\pi=\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi'(\xi)\cdot(b-a)=\frac{f'(\xi)}{1+f^2(\xi)}\cdot(b-a)$

由 $f'(x)+f^2(x)\geqslant -1$ 知 $\frac{f'(\xi)}{1+f^2(\xi)}\geqslant -1$

$\Rightarrow -\pi\geqslant -(b-a)$ 即 $b-a\geqslant\pi$.

如果取 $f(x)=\cot x$，$a=0$. $b=\pi$. 上式"="可以成立.

<模型>. 取 $\arctan f(x)$ 可以化无穷区间为有穷区间. 化开区间为闭区间.

<补充题> 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可微且 $f(a)=f(b)=0$. 证明对 $\forall x_0\in(a,b)$. $\exists\,\xi$ 使 $f(x_0)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$.

证：令 $w(x)=(x-a)(x-b)$ $w''(x)=2$. 记 $F(x)=f(x)-\lambda w(x)$.

对于 $\forall x_0$. 取 $\lambda=\frac{f(x_0)}{w(x_0)}$ 使 $F(x_0)=0$.

$\because F(a)=F(x_0)=F(b)=0$ $\therefore (a,x_0]$ 上 $\exists\,\xi_1$ 使 $F'(\xi_1)=0$，(x_0,b) 上 $\exists\,\xi_2$ 使 $F'(\xi_2)=0$.

$\therefore (\xi_1,\xi_2)$ 上 $\exists\,\xi$ 使 $F''(\xi)=0$

$\therefore f''(\xi)-2\cdot\frac{f(x_0)}{w(x_0)}=0$ $\therefore f(x_0)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$