第十六章 一致收敛

一、一致收敛的定义与判定(函数列)

1. Def $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$

一致收敛: $\forall \varepsilon>0 \ \exists N=N(\varepsilon)$ s.t. $n>N$时 $\forall x\in X$ $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

非一致收敛: $\exists \varepsilon_0>0 \ \forall N \ \exists n>N \ \exists x_n\in X$ s.t. $|f_n(x_n)-f(x_n)|\geq \varepsilon_0$

2. 利用上确界判定

$$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x) \iff \sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\to 0 \quad (n\to\infty)$$

3. 柯西收敛准则 (在未知极限函数时应用较广)

$\forall \varepsilon>0$. $\exists N=N(\varepsilon)$ s.t. 当$n>N$. 对$\forall p\in \mathbb{N}$

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon, \qquad \forall x\in X$$

4. Dini Theorem

$$\left.\begin{array}{l} f_n(x)\longrightarrow f(x) \quad \forall x\in[a,b] \\ \forall x_0\in[a,b],\ \{f_n(x_0)\}\text{单调} \end{array}\right\} \Rightarrow f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$$

5. 一致收敛 ± 一致收敛 ⇒ 一致收敛

$k\cdot$ 一致收敛 ⇒ 一致收敛

$\left\{\begin{array}{l}\text{一致收敛}\\ \text{有界}\end{array}\right. \times \left\{\begin{array}{l}\text{一致收敛}\\ \text{有界}\end{array}\right.$ ⇒ 一致收敛

$\left\{\begin{array}{l}\text{一致收敛}\\ \text{有界}\end{array}\right. \div \left\{\begin{array}{l}\text{一致收敛}\\ \text{绝对值有正下确界}\end{array}\right.$ ⇒ 一致收敛

$\left.\begin{array}{l}\text{内函数: 一致收敛}\\ \text{外函数: 一致连续}\end{array}\right\}$ ⇒ 复合函数一致收敛

二、一致收敛性质

(函数列) 1. $\left.\begin{array}{l} f_n(x)\rightrightarrows f(x). \\ f_n(x)\in C(I) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)\in C(I)$ 且 $\lim\limits_{x\to a^+}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to a^+} f_n(x)$

2. $\left.\begin{array}{l} f_n(x)\rightrightarrows f(x) \\ f_n(x)\in R(I) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)\in R(I)$ 且 $\int_a^b \Big(\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)}_{f(x)}\Big)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$

3. $\left.\begin{array}{l} f_n(x)\longrightarrow f(x),\ \forall x \\ f_n'(x)\ \text{一致收敛} \end{array}\right\} \Rightarrow f_n(x)$ 一致收敛 且 $\Big(\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)}_{f(x)}\Big)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$

(函数项级数)

1. $\left.\begin{array}{l}\sum u_n(x) \xrightarrow[\text{内闭}]{I} S(x) \\ u_n(x) \in C(I)\end{array}\right\} \Rightarrow S(x) \in C(I)$ 且 $\lim\limits_{x\to a^+}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\lim\limits_{x\to a^+} f_n(x)\right)$

2. $\left.\begin{array}{l}\sum u_n(x) \overset{I=[a,b]}{\rightrightarrows} S(x) \\ u_n(x) \in R(I)\end{array}\right\} \Rightarrow S(x) \in R(I)$ 且 $\int_a^b \Big[\underbrace{\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)}_{}\Big]^{S(x)} dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx$

3. $\left.\begin{array}{l}\sum u_n(x) \xrightarrow{I} S(x),\ \forall x \\ \sum u_n'(x) \text{ 于}I\text{内闭一致收敛}\end{array}\right\} \Rightarrow S(x)$ 于I内闭一致收敛 且 $\Big(\overbrace{\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)}^{S(x)}\Big)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$

三、一致收敛的判定(函数项级数)

1、cauchy 收敛准则

$\forall \varepsilon>0.\ \exists N=N(\varepsilon)$ s.t. 当 $n>N$. 对$\forall p \in \mathbb{N}$

$$\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)\right|<\varepsilon \qquad \forall x\in X$$

•[注] $\sum u_n(x)$ 在 X 上一致收敛 $\Rightarrow$ $u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0$

2、M判别法

$\left.\begin{array}{l}\forall x\in[a,b],\ |u_n(x)| \le M_n \\ \text{正项级数} \sum M_n \text{ 收敛}\end{array}\right\} \Rightarrow \sum u_n(x)$ 一致收敛

3、Abel判别法

在X上 $\left.\begin{array}{l}\sum \beta_n(x) \text{ 一致收敛} \\ \{\alpha_n(x)\} \text{ 一致有界} \\ \text{对}\forall x,\ \{\alpha_n(x)\} \text{ 都单调}\end{array}\right\} \Rightarrow \sum \alpha_n(x)\beta_n(x)$ 于X一致收敛

4、Dirichlet判别法

在X上 $\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k(x) \text{ 一致有界} \\ \{\alpha_n(x)\} \rightrightarrows 0 \\ \text{对}\forall x,\ \{\alpha_n(x)\} \text{ 都单调}\end{array}\right\} \Rightarrow \sum \alpha_n(x)\beta_n(x)$ 于X一致收敛

练习16.1

1、

(1) $\sin\frac{x}{n}$ $-\infty<x<+\infty$

$f_n(x)\to 0$ $\|f_n(x)-0\| = \sup|f_n(x)| = 1 \not\to 0 \quad (n\to\infty)$ $\therefore f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$非一致收敛

(2) $f_n(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$ $0<x<1$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{t\to 0} t\ln t = \lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\frac{1}{\ln t}} = 0$ $f_n(x)\to 0 \quad (n\to\infty)$

$\|f_n(x)-0\| = \sup\limits_{x\in(0,1)}\left|\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\right|$ $\because f_n'(x) = \frac{1}{n}\ln\frac{x}{n}+\frac{x}{n^2}\cdot\frac{n}{x} = \frac{1}{n}\left(\ln\frac{x}{n}+1\right)$ 在$(0,\frac{n}{e})\uparrow$ $(\frac{n}{e},\infty)\downarrow$

$n\to\infty$时$\frac{n}{e}>1$ $\therefore \sup\limits_{x\in(0,1)}|f_n(x)| = f_n(1) = \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}\to 0$ $\therefore f_n(x)\overset{(0,1)}{\rightrightarrows} 0$

(3) $f_n(x)=\arctan nx$ $f_n(x)\to\frac{\pi}{2}$

(a) $[0,+\infty)$上:

取$x_n=\frac{1}{n}$ $\because |f_n(x_n)-f(x_n)| = \left|\arctan 1-\frac{\pi}{2}\right|\not\to 0$ 非一致收敛

(b) $[\delta,+\infty)$上: $(\delta>0)$

$\|f_n(x)-\frac{\pi}{2}\| = \sup\limits_{x\in[\delta,+\infty)}\left|\arctan nx-\frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2}-\arctan n\delta\to 0 \quad (n\to\infty)$ 一致收敛

(4) $f_n(x)=nxe^{-nx}$ $f_n(x)\to 0$

(a) $[0,+\infty)$上:

取$x_n=\frac{1}{n}$ $\because |f_n(x_n)-f(x_n)| = \left|\frac{1}{e}-0\right|\not\to 0$ 非一致收敛

(b) $[\delta,+\infty)$上: $(\delta>0)$

$\|f_n(x)-0\| = \sup\limits_{x\in[\delta,+\infty)}\left|nxe^{-nx}\right|$ $f_n'(x) = ne^{-nx}-n^2xe^{-nx} = n(1-nx)e^{-nx}$ 在$(0,\frac{1}{n})\uparrow$ $(\frac{1}{n},+\infty)\downarrow$

$n\to\infty$时 只要$n>\frac{1}{\delta}$ 有$\frac{1}{n}<\delta$ $\therefore f_n(x)$在$[\delta,+\infty)$递减

$\therefore \sup\limits_{x\in[\delta,+\infty)}\left|nxe^{-nx}\right| = n\delta\cdot e^{-n\delta}\to 0 \quad (n\to\infty)$

$\therefore$一致收敛

(5) $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$ $\quad (0<\delta<1)$

(a) $[0,1-\delta]$ 上: $f_n(x)\to f(x)=0$

$$f_n'(x)=\frac{nx^{n-1}(1+x^n)-x^n\cdot nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}=\frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}\geqslant 0 \quad \therefore f_n(x) \text{ 在 } [0,1-\delta]\uparrow$$

$$\therefore \|f_n(x)-0\|=\sup_{x\in[0,1-\delta]}\left|\frac{x^n}{1+x^n}\right|=f_n(1-\delta)=\frac{(1-\delta)^n}{1+(1-\delta)^n}\to 0 \quad \text{一致收敛}$$

(b) $[1-\delta,1+\delta]$ 上:

$$f_n(x)\to f(x)=\begin{cases}0 & x\in[1-\delta,1)\\ \frac{1}{2} & x=1\\ 1 & x\in(1,1+\delta]\end{cases}$$

取 $x_n=1+\frac{1}{n}$ $\quad |f_n(x_n)-f(x_n)|=\left|\dfrac{(1+\frac{1}{n})^n}{1+(1+\frac{1}{n})^n}-1\right|\to 1-\dfrac{e}{1+e}=\dfrac{1}{1+e}\neq 0$ $\quad$ 非一致收敛

(c) $[1+\delta,+\infty)$ 上: $f_n(x)\to 1$

$$\|f_n(x)-1\|=\sup_{x\in[1+\delta,+\infty)}\frac{1}{1+x^n}=\frac{1}{1+(1+\delta)^n}\to 0 \quad (n\to\infty) \quad \text{一致收敛}$$

练习16.2

1. $\because f_n(x) \xrightarrow[\quad]{[a,b]} f(x)$

$\therefore$ 对 $\forall \varepsilon>0$. $\exists N_1=N_1(\varepsilon)$, $n>N_1$ 时. 对 $\forall x\in[a,b]$, $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

$\because x_n\in[a,b]$ $\therefore \forall n$, $|f_n(x_n)-f(x_n)|<\varepsilon$ ①

$\because \forall n$, $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 且 $f_n(x) \xrightarrow[\quad]{[a,b]} f(x)$

$\therefore f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续 又 $\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$

$\therefore$ 对 $\forall \varepsilon>0$ $\exists N_2=N_2(\varepsilon)$ $n>N_2$ 时, $\forall n$, $|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon$ ②

由①②

综上: 对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N=\max\{N_1,N_2\}$. $n>N$ 时

$$|f_n(x_n)-f(x_0)|=|f_n(x_n)-f(x_n)+f(x_n)-f(x_0)|$$

$$<|f_n(x_n)-f(x_n)|+|f(x_n)-f(x_0)| < 2\varepsilon$$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)=f(x_0)$

2. (1)

$f_n(x)=nx\cdot e^{-nx^2}=\dfrac{nx}{e^{nx^2}}\to 0 \quad (n\to\infty)$ $\quad \|f_n(x)-0\|=\sup\limits_{x\in[0,1]}|nxe^{-nx^2}|$

$\dfrac{d}{dx}\cdot f_n(x)=ne^{-nx^2}+nx\cdot -2nxe^{-nx^2}=n(1-2nx^2)e^{-nx^2}$ $\quad \therefore f_n(x)$ 在 $(0,\frac{1}{\sqrt{2n}})\uparrow$ $(\frac{1}{\sqrt{2n}},1)\downarrow$

$\therefore \|f_n(x)-0\|=n\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\cdot e^{-n\cdot\frac{1}{2n}}=\dfrac{1}{\sqrt{2e}}\cdot\sqrt{n}\not\to 0 \quad (n\to\infty)$ 非一致收敛

(2) $\int_0^1 f(x)dx=0$

而 $\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx=-\frac{1}{2}e^{-nx^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-e^{-n})\to\frac{1}{2} \quad (n\to\infty)$

显然 $\int_0^1 f(x)dx\neq\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$

3.

1) 证明逐点收敛：$x=0$ 或 1 时 $f_n(x)=0$

$x\in(0,1)$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty} nx\cdot(1-x)^n=0$ （阶：$(1-x)^n$ 远快于 n）

$\therefore f_n(x)\to 0$

2) 证明非一致收敛：

$\|f_n(x)-0\|=\sup\limits_{x\in[0,1]} nx(1-x)^n$ $\because f_n'(x)=n(1-x)^n-n^2x(1-x)^{n-1}=(n-nx-n^2x)(1-x)^{n-1}$

$f_n(x)$ 在 $(0,\frac{1}{n+1})\uparrow$ $(\frac{1}{n+1},1)\downarrow$

$\therefore \|f_n(x)\|=\frac{n}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\to\frac{1}{e}\neq 0$ 非一致收敛

3)

对于 $\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1 nx(1-x)^n dx$

$\because \int nx(1-x)^n dx=-\frac{n}{n+1}\int x\, d(1-x)^{n+1}$

$=-\frac{n}{n+1}\left(x(1-x)^{n+1}-\int(1-x)^{n+1}dx\right)=-\frac{n}{n+1}\left(x(1-x)^{n+1}+\frac{(1-x)^{n+2}}{n+2}\right)$

$\therefore \int_0^1 nx(1-x)^n dx=\frac{n}{(n+1)(n+2)}\to 0\quad(n\to\infty)$ 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 nx(1-x)^n dx=\int_0^1\left[\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right]dx$

4.

1) 由阶估计，无论 α 取何值，始终逐点收敛于 0

2) $f_n'(x)=n^\alpha e^{-nx}-n^{\alpha+1}xe^{-nx}=n^\alpha(1-nx)e^{-nx}$ $f_n(x)$ 在 $(0,\frac{1}{n})\uparrow$ $(\frac{1}{n},+\infty)\downarrow$

令 $\|f_n(x)-0\|=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)|=f_n(\frac{1}{n})=n^{\alpha-1}\cdot e^{-1}\to 0$ 需有 $\alpha<1$

$\therefore \alpha<1$ 时. $f_n(x)$ 一致收敛于 0

3) 已知等式右侧 $=0$ 对于 $\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1 n^\alpha xe^{-nx}$

由 $\int n^\alpha xe^{-nx}dx=-n^{\alpha-1}\int x\,de^{-nx}=-n^{\alpha-1}\left(xe^{-nx}-\int e^{-nx}dx\right)$

$=-n^{\alpha-1}\left(xe^{-nx}+\frac{1}{n}e^{-nx}\right)$

$\because \int_0^1 n^\alpha x e^{-nx} = -n^{\alpha-1}\left(e^{-n}+\frac{1}{n}e^{-n}-\frac{1}{n}\right) = -\frac{n^{\alpha-2}(n+1)}{e^n}+n^{\alpha-2} \to n^{\alpha-2}$

当等式成立时 $\int_0^1 n^\alpha x e^{-nx} \to 0$ $\quad \therefore n^{\alpha-2} \to 0$ $\quad$ 需有 $\alpha > 2$

5. $n \to \infty$ 时. $f_n(x) = \frac{1}{n}\arctan x^n \to \begin{cases} \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2} & |x|>1 \\ \frac{1}{n}\cdot\arctan(\pm 1) & |x|=1 \\ \frac{x^n}{n} & |x|<1 \end{cases} \to 0$

$\|f_n(x)-0\| = \sup|f_n(x)|$ $\quad \because f_n'(x) = \frac{1}{n}\cdot n x^{n-1}\cdot\frac{1}{1+x^{2n}} = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$ 在 $(0,+\infty)$ 递增

$\therefore f_n(x) \leq \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}$ $\quad \therefore \|f_n(x)\| \to \frac{\pi}{2n} \to 0$ $\quad \therefore f_n(x) \overset{(-\infty,+\infty)}{\rightrightarrows} 0$

由于 $\left[\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right]'\Big|_{x=1} = 0$, $\quad f_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}} \Rightarrow f_n'(1) = \frac{1}{2}$

$\therefore \left[\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right]'\Big|_{x=1} \neq \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(1)$

6. $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \to x^2$

$\|f_n(x)-x^2\| = \sup\left|\frac{1}{n}\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{n} \to 0$ $\quad \therefore f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛

但 $\left[\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right]' = 2x$, 而 $f_n'(x) = 2x + \cos\left[n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ not exist

limit not exist

$\therefore \left[\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right]' \neq \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$

7.

(1) 显然 $f(x)=0$

$\|f_n(x)-0\| = \sup|f_n(x)|$ $\quad$ 由 $f_n'(x) = -2nxe^{-n^2x^2} < 0$ 递减

$f_n(x) \leq f_n(-\infty) \to \frac{1}{n} \to 0$ $\quad \therefore f_n(x) \overset{(-\infty,+\infty)}{\rightrightarrows} 0$

(2) $f_n'(x) = -2nxe^{-n^2x^2} \to 0 \quad (n\to\infty)$

$\|f_n'(x)-0\| = \sup|f_n'(x)|$ $\quad$ 由 $f_n''(x) = -2ne^{-n^2x^2} + 4n^3x^2e^{-n^2x^2} = 4n^3\left(x^2-\frac{1}{2n^2}\right)e^{-n^2x^2}$

$f_n(x)$ 在 $(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}n})\downarrow$ $(\frac{-1}{\sqrt{2}n}, \frac{1}{\sqrt{2}n})\uparrow$ $(\frac{1}{\sqrt{2}n}, +\infty)\uparrow$

又对 $\forall\ I \supseteq \{0\}$，$\exists N$. $n>N$ 时，$\frac{1}{n} \in I$ 或 $-\frac{1}{n} \in I$

while $|f_n'(\frac{1}{n})| = |f_n'(-\frac{1}{n})| = \frac{2}{e} \nrightarrow 0$ $(n\to\infty)$ $f_n'(x)$ 在 I 上非一致收敛

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = 0 = f'(x)$.

练习16.4

1. (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}\quad x\in(-2,+\infty)$

$$\left.\begin{array}{l}\because \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \text{一致有界} \\ \frac{1}{x+2^n}\rightrightarrows 0 \\ \text{对}\forall x,\ \left\{\frac{1}{x+2^n}\right\}\text{单调}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{由Dirichlet. 一致收敛}$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}\quad x\in[0,+\infty)$

$x\neq 0$时. $\frac{x}{1+n^4x^2}=\frac{1}{\frac{1}{x}+n^4x}\leq\frac{1}{2n^2}$

由于 $\sum\frac{1}{2n^2}$ 收敛　　由M判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$一致收敛

(当$x=0$时，也成立)

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\quad x\in(-\infty,+\infty)$

$$\left|\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\right|<\frac{1}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\leq\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$$

$\because \sum\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ 收敛　由M判别法，一致收敛

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}\quad x\in[0,+\infty)$

$u_n'(x)=xe^{-nx}(2-nx)\qquad (0,\frac{2}{n})\uparrow\ (\frac{2}{n},+\infty)\downarrow$

$x^2e^{-nx}\leq\frac{4}{n^2}\cdot e^{-2}=\frac{4}{e^2n^2}$

$\because \sum\frac{4}{e^2n^2}$ 收敛　由M判别法. 级数一致收敛

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^nx}\quad x\in(0,+\infty)$

$\because \lim_{n\to\infty}2^n\cdot\sin\frac{1}{3^nx}=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{3^nx}\cdot\lim_{n\to\infty}2^n=\infty\neq 0$

$\because \|2^n\sin\frac{1}{3^nx}\|\not\to 0\quad\therefore$ 非一致收敛

2.

1) 令 $u_n(x)=\frac{\sin nx}{n^3}$ $\qquad u_n'(x)=\frac{\cos nx}{n^2}$

$\because \left|u_n'(x)\right|=\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$

$\because \sum\frac{1}{n^2}$ 收敛. 由M判别法: $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛

$\because u_n(x)=\frac{\sin nx}{n^3}\to 0 \quad (n\to\infty,\ \forall x)$, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 一致收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛, 且可逐项求导:

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x) \qquad 即\ S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$$

$\because \sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)\rightrightarrows S'(x)$ $\therefore$ 保持连续性:

由 $u_n'(x)=\frac{\cos nx}{n^2}$ 连续, $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ 也连续 即 $S(x)$ 有连续的导函数

2) 由上已证 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\xrightarrow[]{[0,\pi]}S(x)$ $\qquad$ 由于对每个 $u_n(x)=\frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $[0,\pi]$ 可积

$\therefore S(x)$ 在 $[0,\pi]$ 可积, 且可逐项求积分:

$$\int_0^{\pi}S(x)dx=\int_0^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n^3}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left.\frac{-\cos nx}{n^4}\right|_0^{\pi}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n^4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2k\pi}{(2k)^4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos(2k-1)\pi}{(2k-1)^4}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2k\pi}{(2k)^4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos(2k-1)\pi}{(2k-1)^4}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-1}{(2k)^4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)}{(2k-1)^4}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

南開大學 作业纸

系别______ 班级______ 姓名______ 第 页

习题16

1. (1) $f_n(x)=x\cdot\arctan nx \qquad 0<x<+\infty$

对$\forall x\in(0,+\infty)$ $n\to\infty$时，显然 $f_n(x)\to\frac{\pi}{2}x$（逐点收敛）

$$|f_n(x)-f(x)|<\left|\frac{\pi}{2}x-x\cdot\arctan nx\right|=\left|x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan nx\right)\right| \overset{y=nx}{=\!=} \frac{1}{n}\left|y\left(\frac{\pi}{2}-\arctan y\right)\right|$$

$\because \lim\limits_{y\to\infty} y\left(\frac{\pi}{2}-\arctan y\right)=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan y}{\frac{1}{y}}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{\frac{1}{1+y^2}}{\frac{1}{y^2}}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{y^2}{1+y^2}=1$

$\therefore y\left(\frac{\pi}{2}-\arctan y\right)$ 在$(0,+\infty)$有界，设 $\left|y\left(\frac{\pi}{2}-\arctan y\right)\right|<M$，$M>0$.

$\therefore |f_n(x)-f(x)|<\left|x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan nx\right)\right|=\frac{1}{n}\left|y\left(\frac{\pi}{2}-\arctan y\right)\right|<\frac{M}{n}$，$\forall x\in(0,+\infty)$

即 $\|f_n(x)-f(x)\|<\frac{M}{n}\to 0 \qquad \therefore f_n(x)\xrightarrow[]{(0,+\infty)}\frac{\pi}{2}x$.（一致收敛）

(2) $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \qquad f_n(x)\to e^x.\ (n\to\infty) \qquad$ 记 $f(x)=e^x$

- a) $x\in[a,b]$:

$|f_n(x)-f(x)|=e^x\left|e^{n\cdot\ln(1+\frac{x}{n})-x}-1\right| \qquad$ 记 $h(x)=n\cdot\ln(1+\frac{x}{n})-x$.

$\because \frac{\partial}{\partial x}h(x)=\dfrac{1}{1+\frac{x}{n}}-1=\dfrac{-x}{x+n}=\dfrac{-x(x+n)}{(x+n)^2} \qquad \therefore h(x)$在$(-n,0)\uparrow$ $(0,+\infty)\downarrow$

对$\forall x\in[a,b]$，$n>-a$时 $|f_n(x)-f(x)|\le e^b\cdot\max\left\{1-e^{n\ln(1+\frac{a}{n})-a},\ 1-e^{n\ln(1+\frac{b}{n})-b}\right\}\to 0$

$\therefore f_n(x)\xrightarrow[]{[a,b]}f(x)$

- b) $x\in(-\infty,+\infty)$

取 $x_n=n$

$|f_n(x_n)-f(x_n)|=|2^n-e^n|\to+\infty \qquad$ 不一致收敛

week 13

南開大學 作业纸

系别______ 班级 大美三班 姓名 胡层跨 1610023 第 页

2. $\because f_0(x)$ 在 $[a,b]$ 连续 $\therefore f_0(x)$ 在 $[a,b]$ 有界. 设 $|f_0(x)|\le M$, $\forall x\in[a,b]$

对 $\forall x\in[a,b]$: $|f_1(x)|=\left|\int_a^x f_0(t)dt\right|\le\int_a^x|f_0(t)|dt=M\int_a^x dt=M(x-a)$

$$|f_2(x)|=\left|\int_a^x f_1(t)dt\right|\le\int_a^x|f_1(t)|dt=\int_a^x M(x-a)dt=\frac{M}{2}(x-a)^2$$

$\cdots\cdots$

$$|f_{k+1}(x)|\le\int_a^x|f_k(t)|dt\le\frac{M}{k!}\int_a^x(x-a)^k dt=\frac{M}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}$$

由数学归纳法, $\forall n$, 有 $|f_n(x)|\le\frac{M}{n!}(x-a)^n$ $\therefore |f_n(x)|\le\frac{M}{n!}(b-a)^n$

$\therefore \|f_n\|\le\frac{M}{n!}(b-a)^n\to 0$ $(n\to\infty)$ $\therefore f_n\xrightarrow{[a,b]}0$

3. 对 $\forall [c,d]\subset(a,b)$ $\exists h>0$ s.t. $[c,d+h]\subset(a,b)$

- $\because f(x)$ 在 (a,b) 有连续偏导数 $\therefore f'(x)$ 在 (a,b) 连续, 因而在 $[c,d+h]$ 一致连续

  $\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$. $\forall x',x''\in[c,d+h]$, $|x'-x''|<\delta$ 时:

  $$|f'(x')-f'(x'')|<\varepsilon$$

- 当 $n>\frac{1}{h}$ 时, 对 $\forall x\in[c,d]$, $x+\frac{1}{n}\in[c,d+h]$

  由 Lagrange 中值定理, $\exists\xi_n\in(x,x+\frac{1}{n})$, 使得:

  $$f(x+\tfrac{1}{n})-f(x)=\tfrac{1}{n}f'(\xi_n)$$

  □

□

综上: 对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N=\max\{\frac{1}{\delta},\frac{1}{h}\}$. $n>N$ 时:

$$\left|n\cdot\left[f(x+\tfrac{1}{n})-f(x)\right]-f'(x)\right|=|f'(\xi_n)-f'(x)|<\varepsilon.\quad\forall x\in[c,d]$$

即 $n\left[f(x+\frac{1}{n})-f(x)\right]\xrightarrow{[c,d]}f'(x)$.

即 $f_n(x)$ 在 (a,b) 上内闭一致收敛到 $f'(x)$.

☆ week 13

南開大學 作 业 纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 页

4\. ∵ $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续 ∴ $f(x)$ 在任一闭区间 $[x,x+1]$ 上可积，∴ $f_n(x)\to F(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt$

由积分中值定理 $F(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x+\frac{k}{n}}^{x+\frac{k+1}{n}}f(t)dt=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(\xi_k)$ 其中 $\xi_k\in(x+\frac{k}{n},x+\frac{k+1}{n})$

∵ $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$ ∴ 对于 ∀ 闭区间 $[a,b]$，$f(x)$ 在 $[a,b+1]$ 上一致连续

- ∴ $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ $x,x'\in[a,b+1]$ 且 $|x-x'|<\delta$ 时 $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$
- ∴ $\frac{1}{n}<\delta$ 即 $n>\frac{1}{\delta}$ 时 有 $|f_n(x)-F(x)|\le\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}|f(x+\frac{k}{n})-f(\xi_k)|\le n\cdot\frac{1}{n}\cdot\varepsilon=\varepsilon$

综上：对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists N=[\frac{1}{\delta}]+1$. $n>N$ 时 有 $|f_n(x)-F(x)|<\varepsilon$

∴ $f_n(x)\xrightarrow[]{[a,b]}F(x)$ 由 $[a,b]$ 任意性，$f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭一致收敛

5\. 在 ∀ 区间 $[a,b]$ 上. 依题意 $F_{n+1}(x)=F_n'(x)$

∵ $F_n(x)\xrightarrow[]{[a,b]}\varphi(x)$ ∴ $F_{n+1}(x)=F_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上也一致收敛.

由逐项求导性质，$\lim\limits_{n\to\infty}F_n'(x)=\left(\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)\right)'=\varphi'(x)$

对 $F_{n+1}(x)=F_n'(x)$ 两边取 $n\to\infty$ 极限：

$$\left.\begin{aligned}&左=\lim_{n\to\infty}F_{n+1}(x)=\varphi(x)\\&右=\lim_{n\to\infty}F_n'(x)=\varphi'(x)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\varphi(x)=\varphi'(x)$$

∴ $\varphi(x)=C\cdot e^x$ （C为常数）

6. $\because P_n(x) \rightrightarrows f(x)$

对$\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in \mathbb{N}^*$，$m、n>N$时，$|P_n(x)-P_m(x)|<\varepsilon$

$\because P_n(x)-P_m(x)$是多项式. $\therefore P_n(x)-P_m(x)=a_{nm}$为常数（否则$x\to\infty$时$|P_n(x)-P_m(x)|\to\infty$矛盾）

其中$\{a_{nm}\}\to 0$ ($m\to 0$或$n\to 0$)

由以上分析. $\because P_n(x)$是多项式 $\therefore n>N$时 $P_n(x)=P(x)+b_n$ 其中$\begin{cases}\bullet\ P(x)\text{: 固定的多项式}\\ \bullet\ \{b_n\}\text{: 收敛的数列}\end{cases}$

又由于 $P_n(x)\rightrightarrows f(x)$ $\therefore f(x)-P_n(x)=f(x)-P(x)-b_n\rightrightarrows 0$ 设$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$

$\therefore f(x)=P(x)+b$ $f(x)$也为多项式

week 13

南開大學 作业纸

系别________ 班级______ 姓名________ 第 页

7. (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ $\qquad \because C_n=\frac{1}{\sqrt[n]{2n-1}}\cdot\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\to\left|\frac{1-x}{1+x}\right| \quad (n\to\infty)$

令 $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$ 有 $x>0$

$\begin{cases} x>0 \Rightarrow 收敛 \\ x<0 \Rightarrow 发散 \\ x=0 \Rightarrow 化为\sum\frac{(-1)^n}{2n-1} 由Leibniz判别法知其收敛 \end{cases}$

综上：收敛域为 $[0,+\infty)$ #

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$ 显然 $|x|\neq1$ $\quad D_n=|x|\cdot\left|\frac{1-x^n}{1-x^{n+1}}\right|\to\begin{cases}|x| & |x|<1\\ 1 & |x|>1\end{cases}$

$\therefore$ $|x|<1$ 时 $\Rightarrow D_n<1$ 收敛 $\qquad |x|>1$ 时 $\left|\frac{x^n}{1-x^n}\right|\to1\neq0$ 发散 $\qquad$ 收敛域为 $(-1,1)$ #

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2}$ $\qquad \because C_n=\frac{2|\sin x|}{\sqrt[n]{n^2}}\to2|\sin x| \quad (n\to\infty)$

令 $C_n<1$. $|\sin x|<\frac12$

$\begin{cases} |\sin x|<\frac12 \Rightarrow 收敛 \\ |\sin x|>\frac12 \Rightarrow 发散 \\ |\sin x|=\frac12 \Rightarrow \begin{cases}\sin x=\frac12 & 级数为\sum\frac{1}{n^2} 收敛\\ \sin x=-\frac12 & 级数为\sum\frac{(-1)^n}{n^2} 收敛 (Leibniz)\end{cases}\end{cases}$ #

综上收敛域为：

$\{x \mid |\sin x|\le\frac12\}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ $\qquad \because C_n=\sqrt[n]{n}\cdot e^{-x}\to e^{-x} \quad (n\to\infty)$

令 $e^{-x}<1$ $\qquad \therefore x>0$ 时收敛，$x<0$ 时发散. $x=0$ 时，级数为 $\sum n$ 发散

收敛域为 $(0,+\infty)$ #

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n$ $\qquad \because C_n=\left|\frac{x(x+n)}{n}\right|=\left|x+\frac{x^2}{n}\right|\to|x| \quad (n\to\infty)$

令 $|x|<1$ $\qquad \therefore |x|<1$ 时收敛，$|x|>1$ 时发散. $|x|=1$ 时 $\begin{cases}\bullet\ x=1, 级数为\sum\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \because \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\to e\neq0 \ 发散\\ \bullet\ x=-1, 级数为\sum\left(1-\frac1n\right)^n \because \left(1-\frac1n\right)^n\to\frac1e\neq0 \ 发散\end{cases}$ (取绝对值)

收敛域为 $(-1,1)$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\prod_{k=1}^{n}(1+x^k)}$ $\qquad D_n=\frac{|x|}{|1+x^{n+1}|}$

$|x|>1$ 时，$D_n\to\frac{1}{|x|^n}<1$. 收敛 $\qquad |x|<1$ 时，$D_n\to|x|<1$. 收敛

$|x|=1$ 时，显然 $x\neq-1$. 若 $x=1$. 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$ 收敛.

综上：收敛域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

week 13

南開大學 作业纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 页

8. (1) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left[1+\frac{x}{n\cdot\ln^2 n}\right]$ $0\le x\le a$ $(a \ne +\infty)$

由于 $\ln(t+1)\le t$, $\forall t>-1$ $\therefore |u_n(x)|\le \ln(1+\frac{a}{n\cdot\ln^2 n}) < \frac{a}{n\cdot\ln^2 n}$

由于 $\sum\frac{a}{n\cdot\ln^2 n}$ 收敛. 根据M判别法, $\sum u_n(x)$ 一致收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}$ $x\in[0,+\infty)$

① 由于 $\sum_{n=1}^{m}\sin x\sin nx$ 一致有界 (由于 $\sin x\sin nx=\frac{1}{2}(\cos(n-1)x-\cos(n+1)x)$

$\therefore \sum_{n=1}^{m}\sin x\sin nx=\frac{1}{2}(\cos 0-\cos 2x+\cos x-\cos 3x+\cdots+\cos(m-1)x-\cos(m+1)x)$

$=\frac{1}{2}(1+\cos x-\cos mx-\cos(m+1)x)\le 2$)

② $\frac{1}{\sqrt{n+x}}\rightrightarrows 0$

③ $\forall$ 给定的 x, $\{\frac{1}{\sqrt{n+x}}\}$ 递减

由 Dirichlet 级数一致收敛

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2x}{x^2+n^3}$ $-\infty<x<+\infty$

$\because \left|\arctan\frac{2x}{x^2+n^3}\right| < \frac{|2x|}{x^2+n^3}=\frac{2}{|x|+\frac{n^3}{|x|}}\le\frac{2}{2\sqrt{n^3}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ (不妨设 $x\ne 0$)

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 是收敛级数 $\therefore$ 级数一致收敛

☆ week 13

南開大學 作业纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 页

9. (1) $0<x<1$时

$S(x)=\ln(x)\cdot(1+x+x^2+\cdots)=\ln x\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{\ln x}{1-x}$

而$x=1$时 $S(x)=0$

$\therefore S(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{1-x} & 0<x<1\\ 0 & x=1\end{cases}$ $\quad\because \lim\limits_{x\to1^-}\frac{\ln x}{1-x}=-1\neq0$ $\quad\therefore S(x)$在$(0,1]$上不连续

$\because$对$\forall n$, $x^n\ln x$在$(0,1]$上连续 $\quad\therefore \sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\ln x$ 在$(0,1]$上非一致收敛

(2) 设$u_n(x)=x^n\cdot\ln^2x$. $\quad u_n'(x)=nx^{n-1}\cdot\ln^2x+x^n\cdot2\ln x\cdot\frac{1}{x}=x^{n-1}\cdot\ln x(n\ln x+2)$

$\therefore u_n(x)$ 在$(0,e^{-\frac{2}{n}})$上递减, $(e^{-\frac{2}{n}},1]$上递增 $\quad\therefore u_n(x)\le e^{-2}\cdot\frac{4}{n^2}=\frac{4}{e^2n^2}$

$\because\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{e^2n^2}$收敛 $\quad\therefore\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\cdot\ln^2x$ 一致收敛 (M判别法)

(注: 此时和函数$S(x)=\begin{cases}\frac{\ln^2x}{1-x} & 0<x<1\\ 0 & x=1\end{cases}$ 在$(0,1]$上是连续的. 这是与(1)中情况不同的根源所在)

10. 由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$一致有界, $\frac{1}{n+x^2}\rightrightarrows0$, 对$\forall x$, $\{\frac{1}{n+x^2}\}$递减

由Dirichlet判别法 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+x^2}$ 在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛

$\because|u_n(x)|=\frac{1}{n+x^2}\geq\frac{1}{n}$, $\forall x\in(-\infty,+\infty)$

$\because\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 $\quad\therefore$对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$, 级数不绝对收敛.

11. 1) $\because \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 部分和一致有界

- 对 $\forall x\in[0,1]$，$\{(1-x)\cdot x^n\}$ 关于 n 单调
- 记 $V_n(x)=(1-x)x^n$ $V_n'(x)=-x^n+(1-x)nx^{n-1}=x^{n-1}(n-nx-x)=x^{n-1}[n-(n+1)x]$，$v(x)$ 在 $[0,\frac{n}{n+1}]\uparrow$ $[\frac{n}{n+1},1]\downarrow$

$\therefore |V_n(x)|\le(1-\frac{n}{n+1})\cdot(\frac{n}{n+1})^n=\frac{1}{n+1}\cdot(\frac{n}{n+1})^n\to 0\ (n\to\infty)$ $\therefore V_n(x)\rightrightarrows 0$

综上：由 Dirichlet 判别法 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 一致收敛

2) $|U_n(x)|=(1-x)x^n$

$0\le x<1$ 时：

$S_n(x)=(1-x)\cdot\frac{1-x^n}{1-x}=1-x^n$. $x=1$ 时 $S_n(x)=0$

$\therefore S(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 0 & x=1\end{cases}$ $\therefore \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)\cdot x^n$ 在 $[0,1]$ 绝对收敛

3) $\because \|S(x)-S_n(x)\|=\sup_{x\in[0,1]}|S(x)-S_n(x)|=\sup_{x\in[0,1]}x^n=1\not\to 0\ (n\to\infty)$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}|U_n(x)|$ 在 $[0,1]$ 上非一致收敛

12. $\because \sum U_n(a)$、$\sum U_n(b)$ 绝对收敛

$\therefore \forall\varepsilon>0\ \exists N>0$，$n>N$，$\forall p$，$\big||U_{n+1}(a)|+|U_{n+2}(a)|+\cdots+|U_{n+p}(a)|\big|<\varepsilon$

$\big||U_{n+1}(b)|+|U_{n+2}(b)|+\cdots+|U_{n+p}(b)|\big|<\varepsilon$

$\because$ 对 $\forall x$，$U_n(x)$ 在 $[a,b]$ 单调 $\therefore \max U_n(x)=U_n(a)$ 或 $U_n(b)$. 不妨设为 $U_n(a)$

$\therefore \forall\varepsilon>0\ \exists N>0\ \forall x\in[a,b]\ \forall p$,

$|U_{n+1}(x)|+|U_{n+2}(x)|+\cdots+|U_{n+p}(x)|\le|U_{n+1}(a)|+|U_{n+2}(a)|+\cdots+|U_{n+p}(a)|<\varepsilon$.

由柯西收敛准则，$\sum_{n=1}^{\infty}|U_n(x)|$ 在 $[a,b]$ 一致收敛.

week 13.

南开大学 作业纸

系别______ 班级______ 姓名______ 第 页

13. 由于 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 连续 $\therefore \lim\limits_{x\to a^+} u_n(x) = u_n(a)$，$\lim\limits_{x\to b^-} u_n(x) = u_n(b)$

$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 一致收敛 $\therefore$ 可逐项求极限：

$$\lim_{x\to a^+}\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\lim_{x\to a^+} u_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$$

$$\lim_{x\to b^-}\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\lim_{x\to b^-} u_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(b)$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 一致收敛：$\forall \varepsilon>0$. $\exists N=N(\varepsilon)$, $n>N$, $\forall x\in(a,b)$，$|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$

当 $x\to a^+$ 或 b^- 时. 由以上分析 $|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$ 对 $x=a$ 或 b 也成立.

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛

14.

$$f(x) = e^{-x} + 2e^{-2x} + 3e^{-3x} + \cdots + ne^{-nx} + (n+1)e^{-(n+1)x} + \cdots$$

$$e^{-x} f(x) = e^{-2x} + 2e^{-3x} + 3e^{-4x} + \cdots + ne^{-(n+1)x} + (n+1)e^{-(n+2)x} + \cdots$$

$$\therefore (1-e^{-x}) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-x})^n = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \cdot \lim_{n\to\infty}\left[1-(e^{-x})^n\right] = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \quad (x>0)$$

$\therefore f(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$，显然 $f(x)$ 任意阶可导.

15. 记 $u_n(x)=\frac{1}{n^x}$ 记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$

对 $\forall x_0>1$，在 $[x_0,+\infty)$ 上，∵ $\frac{1}{n^x}\le\frac{1}{n^{x_0}}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x_0}}$ 收敛，由M判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $[x_0,+\infty)$ 收敛

容易得到 $\sum u_n(x)\to S(x)$，$\forall x\in(1,+\infty)$

∵ $\sum u_n'(x)=-\sum\frac{\ln n}{n^x}$ 由M判别法同理可知 $\sum u_n'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上内闭一致收敛.

由逐项求导定理 $S(x)$ 可微且 $S'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$.

假设 $S(x)$ k阶可微 ∵ $u_n^{(k)}(x)=\frac{(-\ln n)^k}{n^x}$

对 $\forall x_0>1$，在 $[x_0,+\infty)$ 上 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n^{(k+1)}(x)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^{k+1}}{n^{x_0}}$ 收敛 ∴ $\sum u_n^{(k+1)}(x)$ 内闭一致收敛.

由逐项求导定理. $S^{(k)}(x)$ 可微且 $S^{(k+1)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\ln n)^{k+1}}{n^x}$.

由数学归纳法可知. $S(x)$ 任意阶可微. $\forall x\in(1,+\infty)$

16. (1) $\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{[(k-1)x+1]\cdot(kx+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(k-1)x+1}-\frac{1}{kx+1}\right]=1-\frac{1}{nx+1}$

令 $n\to\infty$. ∴ $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\begin{cases}1 & x\in(0,1]\\ 0 & x=0\end{cases}$

∵ $S(x)$ 在 $[0,1]$ 不连续而 $u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，∴ $\sum u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 非一致收敛.

(2) ∵ $S(x)=\begin{cases}1 & (0,1]\\ 0 & \{0\}\end{cases}$ ∴ $\int_0^1 S(x)=1$

而 $\int_0^1 u_n(x)dx=\int_0^1\left[\frac{1}{(n-1)x+1}-\frac{1}{nx+1}\right]dx=\frac{1}{n-1}\ln\left[(n-1)x+1\right]-\frac{1}{n}\ln(nx+1)$ $(n\geq 2)$.

∴ $\sum_{n=1}^{m}\int_0^1 u_n(x)\,dx=\sum_{n=2}^{m}\left[\frac{\ln n}{n-1}-\frac{\ln(n+1)}{n}\right]+1-\ln 2=1-\frac{\ln(m+1)}{m}\to 1$ $(m\to\infty)$.

∴ $\int_0^1 S(x)\,dx=1=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}dx$，即此级数可逐项求积分

习题-16(B)

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件：$|f(x)-f(y)|\le k|x-y|$. $0<k<1$

且 $a\le \min_{x\in[a,b]} f(x) \le \max_{x\in[a,b]} f(x)\le b$ 　　记 $f_1(x)=f(x)$ 　$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$ 　$n=1,2,\cdots$

求证：$\exists$ const C 使 $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} C$

先证 $\{f_n(a)\}$ 收敛 　对 $\forall n,p\in\mathbb{N}$:

$$|f_{n+p}(a)-f_n(a)|\le \sum_{k=0}^{p-1}|f_{n+k+1}(a)-f_{n+k}(a)| \le \sum_{k=0}^{p-1} k\cdot|f_{n+k}(a)-f_{n+k-1}(a)|$$

$$\le\cdots\le |f(a)-a|\cdot\sum_{k=0}^{p-1}k^{n+k} = \frac{|f(a)-a|}{1-k}\cdot k^n\to 0$$

由 cauchy 收敛原理 $\{f_n(a)\}$ 收敛 　　必为 f 的不动点

设 $\lim_{n\to\infty} f_n(a)=C$. 　再由 $|f_{n+1}(a)-f(c)|\le|f_n(a)-c|\to 0$ 　会有 $f(c)=\lim_{n\to\infty}f_n(a)=C$

对 $\forall x\in[a,b]$ 　$|f_n(x)-c|=|f_n(x)-f_n(c)|\le k\cdot|f_{n-1}(x)-f_{n-1}(c)|\le\cdots\le k^n|x-a|\le k^n\cdot(b-a)\to 0$

故 $f_n(x)\overset{[a,b]}{\rightrightarrows} C$

0:18

3. 设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 逐点 $\to f(x)$. , $f(x)\in C[a,b]$

对每个 n, $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 单调. 　　求证：$f_n(x)\overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$

由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续 $\Rightarrow$ 在 $[a,b]$ 一致连续

对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ 使：当 $x,x'\in[a,b]$ 且 $|x-x'|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$$

取一列点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$ 　使 $x_k-x_{k-1}<\delta$. 　$k=1,\cdots,m$.

则对 $\forall x\in[x_{k-1},x_k]$ 有 $|f(x_{k-1})-f(x)|<\varepsilon$, $|f(x_k)-f(x)|<\varepsilon$ 　　$\forall k=1,\cdots,m$

又：由于 $\{f_n(x)\}$ 逐点收敛到 $f(x)$ 　故 $\exists N\in\mathbb{N}$ 使 $n>N$ 时有 $|f_n(x_k)-f(x_k)|<\varepsilon$

对 $\forall x\in[a,b]$ 必有 $[x_{k-1},x_k]$ 使 $x\in[x_{k-1},x_k]$

故：$|f_n(x_k)-f(x)|\le \underbrace{|f_n(x_k)-f(x_k)|}_{\text{逐点收敛}}+\underbrace{|f(x_k)-f(x)|}_{\text{一致连续}}<2\varepsilon \longrightarrow f(x)-2\varepsilon<f(x_k)<f(x)+2\varepsilon$

$|f_n(x_{k-1})-f(x)|<|f_n(x_{k-1})-f(x_{k-1})|+|f(x_{k-1})-f(x)|<2\varepsilon\longrightarrow f(x)-2\varepsilon<f(x_{k-1})<f(x)+2\varepsilon$

由 $f_n(x)$ 单调. 故 $f_n(x)$ 介于 $f_n(x_k)$ 与 $f_n(x_{k-1})$ 之间 　$\Rightarrow$ 必有 $|f_n(x)-f(x)|<2\varepsilon$

0:13

4. 2:05 (D)

5. 设$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致有界且一致收敛于$f(x)$.

求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{a\le x\le b} f_n(x) = \sup\limits_{a\le x\le b} f(x)$

由题意 $\exists K>0$ 使 $|f_n(x)|\le K$. $\forall n\in\mathbb{N}$ $\forall x\in[a,b]$

易证 $|f(x)|\le K$ $\forall x\in[a,b]$

记 $M=\sup\limits_{a\le x\le b} f(x)$ $M_n=\sup\limits_{a\le x\le b} f_n(x)$ 以下证 $M_n\to M$

由sup定义. 对$\forall\varepsilon>0$ $\exists\xi\in[a,b]$ 使 $M-\varepsilon<f(\xi)<M$

由一致收敛性 $\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. 当$n>N$时有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, $\forall x\in[a,b]$

特别地, $f(\xi)-\varepsilon<f_n(\xi)$ 故有 $M-2\varepsilon\le f(\xi)-\varepsilon<f_n(\xi)<M_n$

另. 对每个n $\exists\xi_n\in[a,b]$ 使 $M_n-\varepsilon<f_n(\xi_n)<M_n\Rightarrow M_n-2\varepsilon<f_n(\xi)-\varepsilon<f(\xi_n)<M$

$\Rightarrow |M_n-M|<2\varepsilon$ 得证

10.

1⇒首先$a_n\to0$. 若不然. 对$\forall x\in(0,\pi)$ $|a_n\sin nx|\not\to0$

不收敛. 由$\sum a_n\sin nx$在$[0,\pi]$上一致收敛

对$\forall\varepsilon>0$. $\exists N>0$. s.t. 当$n\ge N$时有

$|a_n\sin nx+\cdots+a_m\sin mx|<\varepsilon$ $\forall m\ge N$. $\forall x\in[0,\pi]$

特别地取$m=2n$. $x=\frac{\pi}{4n}$ $nx=\frac{\pi}{4}$ $mx=\frac{\pi}{2}$ 从而

$\sin\frac{\pi}{4}=\sin nx<\sin(n+1)x<\cdots<\sin mx=1$

由于$a_n\downarrow0$, 故有

$na_{2n}\sin\frac{\pi}{4}\le a_n\sin nx+a_m\sin mx<\varepsilon$

因此知$\lim\limits_{n\to\infty}2na_{2n}=0$. 再由$a_{2n+2}<a_{2n+1}<a_{2n}$有

$\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1}=0$ 因此$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$

⇐ 令 $S_{n,m}=a_n\sin nx+\cdots+a_m\sin mx$

$\mu_n=\sup\{na_n,(n+1)a_{n+1},\cdots\}$. 则$\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}nb_n=0$

分三种情况讨论

①当 $\boxed{x \geq \frac{\pi}{n}}$ 时 由三角求和法 $\left|\sum_{k=n}^{m} \sin kx\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$ 由Abel引理.

$|S_{n,m}| \leq (2a_m + a_n)\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$

由于 $\frac{x}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$ 故 $\sin\frac{x}{2} \geq \frac{x}{\pi}$ 所以

$|S_{n,m}| \leq (2a_m + a_n)\frac{\pi}{x} \leq n(a_n + 2a_m) \leq 3na_n \leq 3\mu_n$

②当 $x < \frac{\pi}{m}$ 时. 由于 $\sin x < x$

$|S_{n,m}| \leq a_n nx + \cdots + a_m mx \leq (m-n+1)\mu_n x \leq m\mu_n x < \pi\mu_n$

③当 $\frac{\pi}{m} < x < \frac{\pi}{n}$ 时. 取 $k = [\frac{\pi}{x}]$. 注意到

$|S_{n,m}| \leq |S_{n,k}| + |S_{k+1,m}|$

由①②可得 $|S_{n,m}| \leq 3\mu_{k+1} + \pi\mu_n \leq (\pi+3)\mu_n$

由上述三种情况可知 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n,m} = 0$ 一致地关于 $m > n$. 和 $x \in [0,\pi]$ 成立. 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在 $[0,\pi]$ 一致收敛.