
CHAPTER 1

2024-2025 学年微积分 (B) (上) 期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 设 $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt[3]{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt[3]{n}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{x \cos x}}{x \ln(1+x^2)}$.

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 求无穷小量 $u = \left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^{x^2} - 1$ 的主部和阶数.

4. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos 3x}{e^x - 1 - x}$.

5. 设函数 $f(x) = \frac{\sqrt{1 + \sin x + \sin^2 x} - (\alpha + \beta \sin x)}{\sin^2 x}$, 且点 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点, 试求常数 α, β 的值.

6. 设 $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$, 求导数 y' .

7. 设 $y = f(\sin^2 x)$, 求 y' 及 y'' .

8. 设 $f(x) = \begin{cases} (1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$.

9. 设函数 $y = y(x)$ 是由方程 $\cos(xy) + \ln y - x - 1 = 0$ 确定的可微函数, 求 $dy|_{x=0}$.

10. 设 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$, 求 $f^{(6)}(0)$.

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{n(x-1)} + ax + b}{e^{n(x-1)} + 1}$ 的连续性, 其中 a, b 为常数.

12. 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \arctan \sqrt{t}, \\ y = y(t) \end{cases} \quad (t > 0)$ 确定, 其中 $y = y(t)$ 由方程 $e^y + e^t = 2e$ 确定, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 处的切线方程.

13. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = 1$, $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{n^2} (n \geq 2)$, 研究极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的存在性.

14. 在距火箭发射塔 4000 米处安装一台摄像机, 为使摄像机的镜头始终对准火箭, 摄像机的仰角 θ 应随着火箭的上升不断增加. 假设火箭发射后垂直上升到距离地面 3000 米处, 其速度为 600 米/s, 试求在此时刻摄像机仰角 θ 的变化率.

15. 设可微函数 $y = f(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 + xy - 1 = 0$ 确定, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\cos x - 1) - 1}{\ln(1 + x^2)}$.

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. 设正整数 $n > 1$, 证明: $x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + a_2 x^{2n-2} + \cdots + a_{2n-1} x - 1 = 0$ 至少有两个实根.

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 并且 $f(0) = f(1) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, 证明存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$.

CHAPTER 2

2024-2025 学年微积分 (B) (上) 期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 注意到 $n+1 \leq n + \sqrt[3]{k} \leq n + \sqrt[3]{n}$, 所以

$$\frac{n}{n + \sqrt[3]{n}} \leq x_n \leq \frac{n}{n+1}.$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + \sqrt[3]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, 由夹逼定理得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

2. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= -\lim_{x \rightarrow 0} e^x \frac{e^{x \cos x - x} - 1}{x^3} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. **Solution.**

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^{x^2} - 1 = \exp \left(x^2 \ln \frac{2 + \cos x}{3} \right) - 1 \\ &\sim x^2 \ln \frac{2 + \cos x}{3} \\ &\sim x^2 \ln \left(1 - \frac{x^2}{6} \right) \\ &\sim x^2 \left(-\frac{x^2}{6} \right) = -\frac{1}{6}x^4. \end{aligned}$$

所以 u 的主部为 $-\frac{1}{6}x^4$, 阶数为 4.

4. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x^2} - 1) + (1 - \cos 3x)}{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} \\ &= 8. \end{aligned}$$

5. Solution.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x + \sin^2 x} - (\alpha + \beta \sin x)}{\sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{8} (\sin x + \sin^2 x)^2 + o(\sin x + \sin^2 x)^2 - \alpha - \beta \sin x}{\sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{8} \sin^2 x + o(\sin^2 x) - \alpha - \beta \sin x}{\sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \alpha) + (\frac{1}{2} - \beta) \sin x + \frac{3}{8} \sin^2 x + o(\sin^2 x)}{\sin^2 x}.
\end{aligned}$$

因为点 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 所以 $1 - \alpha = 0$, $\frac{1}{2} - \beta = 0$, 解得 $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}$.

6. Solution. $\ln y = \frac{1}{3} [\ln x + \ln(x^2 + 1) - 2 \ln(x^2 - 1)],$

所以 $\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{4x}{x^2 - 1} \right)$, 即

$$y' = \sqrt[3]{\frac{x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{4x}{x^2 - 1} \right).$$

7. Solution.

$$y' = f'(\sin^2 x) \cdot 2 \sin x \cos x = f'(\sin^2 x) \cdot \sin 2x,$$

$$y'' = f''(\sin^2 x) \cdot \sin^2 2x + 2 \cos 2x \cdot f'(\sin^2 x).$$

8. Solution. $f(x)$ 的定义域为 $x \neq k\pi, k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

当 $x \neq 0$ 时, $\ln f(x) = \frac{\ln(1 + x^2)}{\sin x}$, 所以

$$\begin{aligned}
f'(x) &= f(x) \cdot \left(\frac{\frac{2x}{1+x^2} \sin x - \ln(1+x^2) \cos x}{\sin^2 x} \right) \\
&= (1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}} \cdot \left(\frac{\frac{2x}{1+x^2} \sin x - \ln(1+x^2) \cos x}{\sin^2 x} \right) \\
&= (1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}} \cdot \left(\frac{2x}{(1+x^2) \sin x} - \frac{\ln(1+x^2) \cos x}{\sin^2 x} \right).
\end{aligned}$$

当 $x = 0$ 时,

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x^2)}{\sin x}} - 1}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x \sin x} = 1.
\end{aligned}$$

$$\text{综上所述, } f'(x) = \begin{cases} (1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}} \cdot \left(\frac{2x}{(1+x^2) \sin x} - \frac{\ln(1+x^2) \cos x}{\sin^2 x} \right), & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

9. Solution. 对方程 $\cos(xy) + \ln y - x - 1 = 0$ 两边求微分得

$$-\sin(xy)(ydx + xdy) + \frac{1}{y}dy - dx = 0.$$

当 $x = 0$ 时, $y = 1$, 代入上式得 $dy|_{x=0} = dx$.

10. **Solution.** 利用 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, 得

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{4}x^6 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+2}}{n}.$$

由 Taylor 定理, 将上式与 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ 对照, 得 $f^{(6)}(0) = -\frac{1}{4} \cdot 6! = -180$.

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. **Solution.**

当 $x > 1$ 时, $e^{n(x-1)} \rightarrow +\infty$, 所以

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{n(x-1)} + ax + b}{e^{n(x-1)} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \frac{ax+b}{e^{n(x-1)}}}{1 + \frac{1}{e^{n(x-1)}}} \\ &= x^2. \end{aligned}$$

当 $x = 1$ 时, $e^{n(x-1)} = 1$, 所以 $f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + ax + b}{2} \Big|_{x=1} = \frac{1+a+b}{2}$.

当 $x < 1$ 时, $e^{n(x-1)} \rightarrow 0$, 所以 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax+b}{1} = ax+b$.

$$\text{综上所述, } f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 1, \\ \frac{1+a+b}{2}, & x = 1, \\ ax+b, & x < 1. \end{cases}$$

$$f(x) \text{ 连续当且仅当 } \begin{cases} 1 = \frac{1+a+b}{2}, \\ a+b = 1 \end{cases}, \text{ 即 } a+b = 1.$$

12. **Solution.** 当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $t = 1$, 由方程 $e^y + e^t = 2e$ 得 $y(1) = 1$, 所以 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

对方程 $e^y + e^t = 2e$ 两边求微分得 $e^y dy + e^t dt = 0$, 代入 $t = 1, y = 1$ 得 $dy = -dt$, 所以 $y'_t(1) = -1$.

且 $x'_t = \frac{1}{2\sqrt{t}(1+t)}$, 所以 $x'_t(1) = \frac{1}{4}$. 故

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{y'_t(1)}{x'_t(1)} = -4.$$

所以切线方程为

$$y - 1 = -4 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{或} \quad 4x + y - 1 - \pi = 0.$$

13. **Solution.** 由题可得

$$\begin{aligned}
 x_n - x_{n-1} &= \frac{1}{n^2}, \\
 x_{n-1} - x_{n-2} &= \frac{1}{(n-1)^2}, \\
 &\dots \\
 x_2 - x_1 &= \frac{1}{2^2}.
 \end{aligned}$$

将上述各式相加得 $x_n = x_1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

显然 $\{x_n\}$ 单调增加, 且 $x_n < 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 2 - \frac{1}{n} < 2$, 所以数列 $\{x_n\}$ 收敛, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

14. **Solution.**

设火箭上升的高度为 h , 则 $\tan \theta = \frac{h}{4000}$, 所以 $\frac{dh}{dt} = 4000 \cdot \sec^2 \theta \cdot \frac{d\theta}{dt}$.

由题设可知此刻 $\frac{dh}{dt} = 600$, $\sec \theta = \frac{\sqrt{4000^2 + 3000^2}}{4000} = \frac{5}{4}$,

所以 $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{dh}{dt}}{4000 \cdot \sec^2 \theta} = \frac{600}{4000 \cdot (\frac{5}{4})^2} = \frac{12}{125}$ (弧度/秒).

15. **Solution.** 当 $x = 0$ 时, 由方程得 $y = f(0) = 1$.

对方程 $x^3 + y^3 + xy - 1 = 0$ 两边求微分得 $3x^2 dx + 3y^2 dy + y dx + x dy = 0$, 所以当 $x = 0, y = 1$ 时,

$$f'(0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{1}{3}.$$

因此

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\cos x - 1) - 1}{\ln(1 + x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\cos x - 1) - f(0)}{\cos x - 1 - 0} \cdot \frac{\cos x - 1}{\ln(1 + x^2)} \\
 &= f'(0) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\ln(1 + x^2)} \\
 &= -\frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} \\
 &= \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. **Proof.** 令 $F(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + a_2 x^{2n-2} + \dots + a_{2n-1} x - 1$, 则 $F(x)$ 在 \mathbf{R} 上连续.

注意到 $F(0) = -1, F(-\infty) = F(\infty) = +\infty$, 由介值定理可知, 存在 $c_1 \in (-\infty, 0), c_2 \in (0, +\infty)$, 使得 $F(c_1) = 0, F(c_2) = 0$, 即方程至少有两个实根.

17. **Proof.** 令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导.

注意到 $F(0) = f(0) - 0 = 0, F\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, F(1) = f(1) - 1 = -1$.

任取 $\eta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 由介值定理可知存在 $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right), x_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得 $F(x_1) = F(x_2) = \eta$.

所以由 Rolle 定理可知, 存在 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (0, 1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = 1$.