

---

---

# CHAPTER 1

---

## 2022-2023 学年微积分（一）（上）期中考试

### 1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 求极限  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} + \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} \right)$ .

2. 求极限  $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$ .

3. 求当  $x \rightarrow 0$  时, 无穷小量  $x - \arctan x$  的主部和阶数.

4. 设  $b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + a \cos x - 2}{\tan x}$  为常数, 求  $a, b$ .

5. 设函数  $f(x) = \frac{\ln |x|}{|x-1|} \sin x$ , 求  $f(x)$  的间断点并判断类型.

6. 设  $y(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} (x \neq 0, x \neq \pm 1)$ , 求  $y'(x)$ .

7. 设二阶可导函数  $y = y(x)$  由方程  $y = 1 + xe^y$  确定, 求  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$ .

8. 设  $y = (1 + x^2)^{\sin x}$ , 求  $dy$ .

9. 已知  $f(x) = x^3 \ln(1+x)$ , 求  $f^{(10)}(0)$ .

10. 求曲线  $r = 1 - \cos \theta$  在  $\theta = \frac{\pi}{2}$  处的切线方程.

## 2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. 研究函数  $f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$  的连续性.

12. 设  $y = g(x)$  是  $y = f(x)$  的反函数,  $f(x)$  可导,  $f(1) = 2, f'(1) = -4$ , 求  $y = g(1+x^2)$  在  $x = 1$  处的导数.

13. 设函数  $f(x)$  在  $x = 1$  处二阶可导, 且  $f'(1) = 0, f''(1) = 0, y = f^2(x)$ , 求  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=1}$ .

14. 设函数  $g(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , 函数  $f(x)$  可导, 求  $F(x) = f(g(x))$  的导数.

15. 将水以  $4\text{m}^3/\text{min}$  的速率注入一个圆锥形容器中, 容器顶朝下倒立, 它的高度为  $8\text{m}$ , 底面半径为  $4\text{m}$ , 当容器内的水深达  $5\text{m}$  时, 水面升高的速率是多少?

### 3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. 设  $x_n > 0$ ,  $x_{n+1} + \frac{4}{x_n} < 4 (n = 1, 2, \dots)$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在并求其值.

17. 设函数  $f(x)$  在  $[0, b]$  上具有二阶导数, 且  $|f''(x)| \leq M$ ,  $f(x)$  在  $(0, b)$  内取得最大值, 试证:  $|f'(0)| + |f'(b)| \leq Mb$ .

---

## CHAPTER 2

---

### 2022-2023 学年微积分（一）（上）期中考试参考答案

#### 1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 设  $x_n = \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} + \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}$ , 则

$$n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} \leq x_n \leq n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}, \quad n > 1.$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} = \pi$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} = \pi$ ,  
所以  $l = \pi$ .

2. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x - x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

3. **Solution.**

法一. 设  $f(x) = \arctan x$ , 则  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = \frac{1}{1+x^2} \Big|_{x=0} = 1$ ,

$$f''(0) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad f'''(0) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \Big|_{x=0} = -2,$$

所以  $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ , 于是

$$x - \arctan x = \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \sim \frac{1}{3}x^3.$$

即主部为  $\frac{1}{3}x^3$ , 阶数为 3.

法二. 设  $x \rightarrow 0$ ,  $x - \arctan x$  的主部为  $cx^r$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{cx^r} = 1$ .

因

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \arctan x)'}{(cx^r)'} &= \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{crx^{r-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{crx^{r-3}}, \end{aligned}$$

所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{c^r x^{r-3}} = 1$ , 从而  $r = 3, c = \frac{1}{3}$ , 即主部为  $\frac{1}{3}x^3$ , 阶数为 3.

4. **Solution.** 由  $b$  是常数,  $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0$  知,  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + a \cos x - 2) = 0$ , 于是  $a = 2$ .

进而  $b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2(\cos x - 1)}{x} = 1$ , 即  $a = 2, b = 1$ .

5. **Solution.** 当  $x = 0, x = 1$  时,  $f(x)$  无定义, 故  $x = 0, x = 1$  是  $f(x)$  的间断点.

因

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} \cdot \frac{1}{|x-1|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} = 0.\end{aligned}$$

类似可得  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ , 所以  $x = 0$  是可去间断点.

(或  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| \cdot \frac{1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |x|}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$ )

又

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} \sin x = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} \sin x = \sin 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\ln x}{x-1} \sin x = -\sin 1,\end{aligned}$$

所以  $x = 1$  是跳跃间断点.

6. **Solution.** 化简得  $y(x) = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}$ .

所以  $y'(x) = \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot x - (1 - \sqrt{1-x^2})}{x^2} = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$ .

7. **Solution.** 由题设有  $x = 0, y = 1$ , 方程两边关于  $x$  求导得

$$\begin{aligned}(1 - xe^y)y' &= e^y, & (*) \\ y'(0) &= e.\end{aligned}$$

方程 (\*) 两边再关于  $x$  求导得

$$(1 - xe^y)y'' = 2y'e^y + x \cdot (y')^2 \cdot e^y,$$

所以

$$y''(0) = 2e^2, \quad \text{即} \quad \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = 2e^2.$$

8. **Solution.** 因  $\ln y = \sin x \ln(1+x^2)$ , 所以

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \ln(1+x^2) + \sin x \cdot \frac{2x}{1+x^2},$$

即  $y' = \left( \cos x \ln(1+x^2) + \frac{2x \sin x}{1+x^2} \right) y = (1+x^2)^{\sin x} \left( \cos x \ln(1+x^2) + \frac{2x \sin x}{1+x^2} \right),$

因此  $dy = (1+x^2)^{\sin x} \left( \cos x \ln(1+x^2) + \frac{2x \sin x}{1+x^2} \right) dx.$

9. **Solution.** 取  $v(x) = x^3$ , 它的四阶以上的导数为 0,

$$u^{(k)}(x) = (\ln(1+x))^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, k = 1, 2, \dots,$$

由 Leibniz 公式  $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$ , 得

$$f^{(10)}(x) = x^3 \frac{(-1)^9 9!}{(1+x)^{10}} + 30x^2 \frac{(-1)^8 8!}{(1+x)^9} + 3 \times 10 \times 9x \frac{(-1)^7 7!}{(1+x)^8} + 10 \times 9 \times 8 \frac{(-1)^6 6!}{(1+x)^7}.$$

$$\text{所以 } f^{(10)}(0) = \frac{10!}{7}.$$

10. **Solution.** 曲线的参数方程为  $\begin{cases} x = (1 - \cos \theta) \cos \theta, \\ y = (1 - \cos \theta) \sin \theta \end{cases}$ . 于是得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta) \cos \theta}{2 \sin \theta \cos \theta - \sin \theta}.$$

代入  $\theta = \frac{\pi}{2}$  得到  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1$ ,  $x = 0, y = 1$ , 因此切线方程为  $y = -x + 1$ .

## 2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. **Solution.** 当  $x > 0$  时,  $e^{nx} \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = x^2$ ;

当  $x < 0$  时,  $e^{nx} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = x$ ;

当  $x = 0$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = 0$ ,

综上所述,  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ x, & x \leq 0. \end{cases}$

当  $x \neq 0$  时,  $f(x) = x^2$  及  $f(x) = x$  均为幂函数, 连续;

当  $x = 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ , 且  $f(0) = 0$ , 故  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续.

因此  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上处处连续.

12. **Solution.** 由题意得  $g'(2) = \frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{4}$ .

所以

$$y'(1) = [2xg'(2)]|_{x=1} = -\frac{1}{2}.$$

13. **Solution.**  $y'(x) = 2f(x)f'(x)$ ,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{y'(x) - y'(1)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)f'(x)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)(f'(x) - f'(1))}{x - 1} \\
&= 2f(1)f''(1) = 0.
\end{aligned}$$

14. **Solution.** 
$$F(x) = \begin{cases} f\left(x^3 \sin \frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ f(0), & x = 0. \end{cases}$$

当  $x \neq 0$  时,  $F'(x) = f'\left(x^3 \sin \frac{1}{x}\right) \left(3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}\right)$ ,

当  $x = 0$  时,

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = 0,$$

$$F'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0) = f'(0) \cdot 0 = 0.$$

15. **Solution.** 设时刻  $t$  容器中水的体积为  $V \text{ m}^3$ , 水的高度为  $h \text{ m}$ , 水面半径为  $r \text{ m}$ , 则

$$\frac{r}{4} = \frac{h}{8}, \quad \text{即 } r = \frac{h}{2}, \quad \text{因而 } V = \frac{1}{12} \pi h^3,$$

于是  $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4} \pi h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$ .

当  $h = 5 \text{ m}$  时,  $\frac{dV}{dt} = 4 \text{ m}^3/\text{min}$  时,  $\frac{dh}{dt} = \frac{16}{25\pi} \text{ m/min}$ .

即水面升高的速率是  $\frac{16}{25\pi} \text{ m/min}$ .

### 3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. **Proof.** 由  $x_{n+1} - x_n < 4 - \frac{4}{x_n} - x_n = -\left(\sqrt{x_n} - \frac{2}{\sqrt{x_n}}\right)^2 \leq 0$  得到  $\{x_n\}$  单调递减.

(或由均值不等式  $\sqrt{x_{n+1} \cdot \frac{4}{x_n}} \leq \frac{x_{n+1} + \frac{4}{x_n}}{2}$  及  $x_{n+1} + \frac{4}{x_n} < 4$  得

$$\sqrt{x_{n+1} \cdot \frac{4}{x_n}} < 2, \quad \text{即 } \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1, \quad \text{从而 } \{x_n\} \text{ 单调递减.})$$

又  $x_n > 0$ , 由单调有界准则可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在.

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 则  $A > 0$ . 由  $x_{n+1} + \frac{4}{x_n} < 4$  得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_{n+1} + \frac{4}{x_n}\right) \leq 4$ , 即  $A + \frac{4}{A} \leq 4$ , 解得  $A = 2$ .

17. **Proof.** 设  $f(x)$  在  $x_0 \in (0, b)$  处取得最大值, 则  $f'(x_0) = 0$ .

对函数  $f'(x)$  在  $[0, x_0], [x_0, b]$  上分别应用 Lagrange 中值定理, 得

$$f'(x_0) - f'(0) = f''(\eta)x_0, \quad \exists \eta \in (0, x_0)$$

$$f'(b) - f'(x_0) = f''(\xi)(b - x_0), \quad \exists \xi \in (x_0, b)$$

$$|f'(0)| + |f'(b)| = |f''(\eta)|x_0 + |f''(\xi)|(b - x_0) \leq Mx_0 + M(b - x_0) = Mb.$$