
CHAPTER 1

2021-2022 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^n + b^n + c^n}{3} \right)^{\frac{1}{n}} (a, b, c > 0)$.

2. 求当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 无穷小量 $\sqrt{1+x\sqrt{x}} - e^{2x}$ 的主部和阶数.

3. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{3 + \cos x}{4} \right)^x - 1 \right]$.

4. 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2 + 4x - 1} - ax - b) = 0$, 求 a, b .

5. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}}$.

6. 确定 $f(x) = e^{\frac{|x|}{\tan x}}$ 的间断点及其类型.

7. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t + e^t, \\ y = \sin t \end{cases}$ 确定, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0}$.

8. 设 $y = x^{x^x}$, 求 y' .

9. 求 $y = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数.

10. 设 $y = \frac{\cos x}{x^2}$, 求 $\frac{dy}{d(\cos x)}$, $\frac{dy}{d(x^3)}$.

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. 设 $x = \varphi(y)$ 是 $f(x) = \ln x + \arctan x$ 的反函数, 求 $\varphi'(\frac{\pi}{4})$.

12. 设曲线 $y = y(x)$ 由方程 $e^{xy} + \ln \frac{y}{x+1} = 2$ 确定, 求曲线在 $x=0$ 处的切线方程.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, $f'(0)=2$, 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3}$.

14. 有一长度为 5m 的梯子贴靠在铅直的墙上，假设其下端沿地板离开墙角而滑动. 当梯子下端离开墙角 3m 时，已知梯子的下端离开墙角滑动速率为 2.2m/s，问此时梯子的上端向下滑的速率为多少？

15. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ，求 $f'(x)$ ，并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

3 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

16. 设 $x_1 > 0$ ， $x_{n+1} = 3 + \frac{4}{x_n}$ ($n = 1, 2, \dots$)，证明： $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在并求其值.

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续， $(0, 1)$ 内可导， $c \in (0, 1)$. 证明： $\exists \xi, \eta \in [0, 1]$ ，使得

$$2\eta f(1) + (c^2 - 1)f'(\eta) = f(\xi).$$

CHAPTER 2

2021-2022 学年微积分（一）（上）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 令 $A = \max\{a, b, c\}$, 则

$$\frac{1}{3}A^n \leq \frac{a^n + b^n + c^n}{3} \leq A^n, \quad \frac{1}{\sqrt[n]{3}}A \leq \left(\frac{a^n + b^n + c^n}{3}\right)^{\frac{1}{n}} \leq A.$$

由夹逼准则知, 原式 $= A = \max\{a, b, c\}$.

2. **Solution.**

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x\sqrt{x}} - e^{2x} = \left(\sqrt{1+x\sqrt{x}} - 1\right) - (e^{2x} - 1) \quad (x \rightarrow 0^+) \\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x} + o(x) - (2x + o(x)) \\ &= -2x + o(x) \sim -2x \quad (x \rightarrow 0^+). \end{aligned}$$

故主部为 $-2x$, 阶数为 1.

3. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln \frac{3+\cos x}{4}} - 1}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln \frac{3+\cos x}{4}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3+\cos x}{4} - 1}{x^2} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

4. **Solution.** 要使 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2 + 4x - 1} - ax - b) = 0$ 成立, 必须

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2x^2 + 4x - 1}}{x} - a - \frac{b}{x} \right) = 0,$$

从而得

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 4x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}} = \sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 4x - 1} - ax \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2x^2 + 4x - 1} - \sqrt{2x} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} \right)} - 1 \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} \right) = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

5. **Solution.** $l = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{e^x - 1} \ln \frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - 1} \ln \frac{\ln(1+x)}{x}}.$

而

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - 1} \ln \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - 1} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1-1-x}{2x} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

所以 $l = e^{-\frac{1}{2}}.$

6. **Solution.** $f(x)$ 的间断点为 $x = k\pi$, $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

$x = 0$ 是跳跃间断点. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{|x|}{\tan x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\tan x}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{|x|}{\tan x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{\tan x}} = e^{-1}.$$

$x = k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 是无穷间断点. 因为

$$\lim_{x \rightarrow k\pi^+} e^{\frac{|x|}{\tan x}} = e^{+\infty} = +\infty.$$

$x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 是可去间断点. 因为

$$\lim_{x \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}} e^{\frac{|x|}{\tan x}} = e^0 = 1.$$

7. **Solution.** $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t}{1 + e^t},$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{-\sin t(1+e^t) - \cos t \cdot e^t}{(1+e^t)^2}}{1 + e^t} = \frac{-\sin t(1+e^t) - \cos t \cdot e^t}{(1+e^t)^3},$$

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} = -\frac{1}{8}.$$

8. **Solution.** 因 $(x^x)' = (e^{x \ln x})' = x^x(1 + \ln x)$, 又

$$\ln y = x^x \ln x,$$

所以 $\frac{1}{y} y' = (x^x \ln x)' = x^x(1 + \ln x) \ln x + x^{x-1}$, 即

$$y' = x^{x^x} x^x \left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right).$$

9. **Solution.** 取 $v(x) = x^2$, 它的三阶以上的导数为 0,

$$u^{(k)}(x) = [\ln(1+x)]^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, k = 1, 2, \dots,$$

由 Leibniz 公式 $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$, 得

$$y^{(n)} = x^2 \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} + 2nx \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} + n(n-1) \frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}.$$

所以 $y^{(n)}(0) = (-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)! = \frac{(-1)^n n!}{n-2} (n > 2)$.

而 $y'(0) = y''(0) = 0$.

10. **Solution.** $\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2 \sin x - 2x \cos x}{x^4} = -\frac{x \sin x + 2 \cos x}{x^3}.$

$$\frac{dy}{d(\cos x)} = \frac{-\frac{x \sin x + 2 \cos x}{x^3} dx}{-\sin x dx} = \frac{x + 2 \cot x}{x^3}.$$

$$\frac{dy}{d(x^3)} = \frac{-\frac{x \sin x + 2 \cos x}{x^3} dx}{3x^2 dx} = -\frac{x \sin x + 2 \cos x}{3x^5}.$$

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. **Solution.** 当 $x = 1$ 时, $y = f(1) = \frac{\pi}{4}$.

$$f'(x) = (\ln x + \arctan x)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2},$$

$$\text{得 } f'(1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \text{ 故 } \varphi'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{2}{3}.$$

12. **Solution.** 原方程变为 $e^{xy}(y + xy') + \frac{y'}{y} - \frac{1}{x+1} = 0$,

$$\text{将 } x = 0, y = e \text{ 代入, 得 } e + \frac{y'(0)}{e} = 1, \text{ 故 } y'(0) = e(1 - e).$$

所以切线方程为 $y = e(1 - e)x + e$.

13. **Solution.** $y'(x) = 2f(x)f'(x)$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} - 2 \frac{f(x^3) - f(0)}{x^3} \right] \\ &= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0) \\ &= -2. \end{aligned}$$

14. **Solution.** 设梯子上端离墙角距离为 $s(m)$, 下端离开墙角的距离为 $x(m)$, 有一长度为

$$s = \sqrt{5^2 - x^2}.$$

$$\text{于是 } \frac{ds}{dt} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} \frac{dx}{dt}.$$

当 $x = 3\text{m}$, $\frac{dx}{dt} = 2.2\text{m/s}$ 时, $\frac{ds}{dt} = -\frac{3}{4} \cdot 2.2 = -1.65\text{m/s}$.

即梯子上端向下滑的速率为 1.65m/s .

15. **Solution.** 因 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$,

且 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$, 所以

$$f(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

当 $x \neq 0$ 时, 初等函数 $f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$ 有定义, 所以连续;

而 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right)$ 不存在, 所以 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. **Proof.**

法一. 由题设知 $n > 1$ 时, $x_n > 3$; $n > 2$ 时, $x_n < 3 + \frac{4}{3}$, 即 $\{x_n\}$ 有界.

由 $x_{n+1} - x_n = \frac{4}{x_n} - \frac{4}{x_{n-1}} = \frac{4(x_{n-1} - x_n)}{x_n x_{n-1}}$ 知不能确定 $\{x_n\}$ 的单调性, 但由

$$x_{n+1} - x_{n-1} = \frac{4}{x_n} - \frac{4}{x_{n-2}} = \frac{4(x_{n-2} - x_n)}{x_n x_{n-2}} = \frac{16(x_{n-1} - x_{n-3})}{x_n x_{n-1} x_{n-2} x_{n-3}}$$

知奇子列 $\{x_{2k-1}\}$ 与偶子列 $\{x_{2k}\}$ 均分别单调. 由单调有界原理知奇子列 $\{x_{2k-1}\}$ 与偶子列 $\{x_{2k}\}$ 均收敛.

设 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = l_1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = l_2$,

在

$$x_{2k+1} = 3 + \frac{4}{x_{2k}}, \quad x_{2k} = 3 + \frac{4}{x_{2k-1}}$$

两边取极限, 得 $l_1 = 3 + \frac{4}{l_2}$ 以及 $l_2 = 3 + \frac{4}{l_1}$, 解得 $l_1 = l_2 = 4$.

因此数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4$.

法二. 常数 $l = 4$ 满足 $l = 3 + \frac{4}{l}$. 下证数列 $\{x_n\}$ 以 l 为极限.

$$\begin{aligned} 0 \leq |x_{n+1} - l| &= \left| \left(3 + \frac{4}{x_n} \right) - 4 \right| = \frac{|x_n - 4|}{x_n} \\ &\leq \frac{1}{3} |x_n - 4| \\ &\leq \cdots \leq \frac{1}{3^{n-1}} |x_2 - 4|. \end{aligned}$$

由迫敛性知 $|x_n - l|$ 收敛到 0, 故数列 $\{x_n\}$ 以 l 为极限.

17. **Proof.** 构造函数 $F(x) = x^2 f(1) + (c^2 - 1)f(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $(0, 1)$ 内可导.

由 Lagrange 中值定理, $\exists \eta \in (0, 1)$, 使得

$$F(1) - F(0) = F'(\eta),$$

$$\text{即 } 2\eta f(1) + (c^2 - 1)f'(\eta) = (1 - c^2)f(0) + c^2 f(1),$$

因 $(1 - c^2)f(0) + c^2 f(1)$ 是 $f(0)$ 与 $f(1)$ 的加权平均值, 由介值定理知, $\exists \xi \in [0, 1]$, 使得

$$f(\xi) = (1 - c^2)f(0) + c^2 f(1),$$

故 $\exists \xi, \eta \in [0, 1]$, 使得

$$2\eta f(1) + (c^2 - 1)f'(\eta) = f(\xi).$$