
CHAPTER 1

2020-2021 学年微积分（一）（上）期中考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 设数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则【 】.

A. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

B. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sqrt{|x_n|}) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

C. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + x_n^2) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

D. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sin x_n) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

2. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = \text{【 】}$.

A. 1

B. e

C. e^{a-b}

D. e^{b-a}

3. 设 $F(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$, 其中 $f'(0) = 1$, $f(0) = 0$, 则 $x = 0$ 是 $F(x)$ 的【 】.

A. 连续点

B. 可去间断点

C. 无穷间断点

D. 跳跃间断点

4. 函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f(0) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = \text{【 】}$.

A. $-2f'(0)$

B. $-f'(0)$

C. $f'(0)$

D. 0

5. 设 $f(x)$ 具有一阶连续导数, $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$, 则 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的【 】.

A. 充分必要条件

B. 充分条件但非必要条件

C. 必要条件但非充分条件

D. 既非充分又非必要条件

6. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 则【 】.

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

D. $f'(0)$ 是 $f'(x)$ 的极值

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] =$ _____.

8. 设 $y = \frac{\cos x}{x^2}$, 则 $\frac{dy}{d(\cos x)} =$ _____.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) =$ _____.

10. 曲线 $y = x \left(1 + \arcsin \frac{2}{x} \right)$ 的斜渐近线方程为 _____.

3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 设 $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x$, $g(x) = cx^3$, 在 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小, 求常数 a, b, c 的值.

12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 讨论 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

13. 设 $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = t \sin t + \cos t \end{cases}$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

14. 设 $y = \frac{x^2}{2-x}$, 计算 $y^{(50)}(0)$.

15. 设 $x = \varphi(y)$ 是函数 $y = x \ln x$ 的反函数, 计算 $\varphi(y)$ 在 $x = e$ 处的二阶导数 $\frac{d^2x}{dy^2}$.

16. 求 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值与最小值.

4 应用题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 如果以每秒 50cm^3 的速度匀速给一个气球充气, 假设气球内气压保持常值且形状始终为球形, 问当气球的半径为 5cm 时, 气球半径增加的速率是多少?

18. 设在 $(-\infty, +\infty)$ 内 $f''(x) > 0$, $f(0) < 0$, 讨论 $F(x) = \frac{f(x)}{x} (x \neq 0)$ 的单调性.

5 综合题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设 $x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}$ (n 个根式, $a > 0$), 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求出极限值.

20. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上具有连续导数, $f(0) = f(2) = 0$, $M = \max_{x \in (0, 2)} \{|f(x)|\}$. 证明: $\exists \xi \in (0, 2)$, 使得 $|f'(\xi)| \geq M$.

CHAPTER 2

2020-2021 学年微积分（一）（上）期中考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** D.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 分别解方程 $\sin A = 0$, $A + \sqrt{|A|} = 0$, $A + A^2 = 0$, $A + \sin A = 0$,

只有 $A + \sin A = 0$ 具有唯一解 $A = 0$.

2. **Solution.** C.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(a-b)x + ab}{(x-a)(x+b)} \right]^x \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(a-b)x + ab}{(x-a)(x+b)} \right]^{\frac{(x-a)(x+b)}{(a-b)x+ab} \cdot \frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)} \cdot x} \\&= e^{\frac{(a-b)x^2+abx}{x^2+(b-a)x-ab}} \\&= e^{a-b}.\end{aligned}$$

3. **Solution.** B.

因

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1,$$

且 $F(0) = 0$, 所以 $x = 0$ 是 $F(x)$ 的可去间断点.

4. **Solution.** B.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} - 2 \frac{f(x^3) - f(0)}{x^3} \right] \\&= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0).\end{aligned}$$

5. **Solution.** A.

若 $f(0) = 0$, $F(0) = 0$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)(1 + |\sin x|)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} f'(0) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1 + |\sin x|) \\ &= f'(0),\end{aligned}$$

即 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

若 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x}$ 存在. 又

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)(1 + |\sin x|) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x} \\ &= f'(0) + f(0) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x}.\end{aligned}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x}$ 不存在, 所以必须 $f(0) = 0$.

因此 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的充分必要条件.

6. Solution. B.

因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 由极限的保号性知存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (-\delta, \delta)$ 时, $f''(x) \geq 0$ 恒成立.

利用 Taylor 展开,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 = f(0) + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 \geq f(0), \quad -\delta < x < \delta,$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间. 故 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. Solution. 0.

利用 $\frac{1}{x} \leq \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil \leq \frac{1}{x} + 1$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{x} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\frac{1}{x} + 1 \right)$,

由夹逼定理可知 $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil = 1$.

8. Solution. $\frac{x \sin x + 2 \cos x}{x^3 \sin x}$.

由链式法则知

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d(\cos x)} &= \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{d(\cos x)}{dx}} \\ &= \frac{-x^2 \sin x - 2x \cos x}{(x^2)^2 - \sin x} \\ &= \frac{x \sin x + 2 \cos x}{x^3 \sin x}.\end{aligned}$$

9. **Solution.** -1 .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (e^x - 1)}{(e^x - 1) \ln(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) - \left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^2} \\ &= -1.\end{aligned}$$

10. **Solution.** $y = x + 2$.

$$\begin{aligned}k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 + \arcsin \frac{2}{x} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \arcsin \frac{2}{x} \right) = 1, \\ b &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \left(1 + \arcsin \frac{2}{x} \right) - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} x \arcsin \frac{2}{x} = 2.\end{aligned}$$

故斜渐近线方程为 $y = x + 2$.

3 基本计算题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. **Solution.** 利用 Taylor 公式,

$$\begin{aligned}f(x) &= x + a \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) + bx \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \\ &= (1+a)x + \left(b - \frac{a}{2} \right) x^2 + \frac{a}{3} x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

因 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是等价无穷小, 故 $1+a=0$, $b-\frac{a}{2}=0$, $\frac{a}{3}=c$.

解得 $a=-1$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=-\frac{1}{3}$.

12. **Solution.** 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = \arctan \frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{x^4+1}$.

当 $x=0$ 时, $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2}$.

因 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\arctan \frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{x^4+1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2} = f'(0)$, 所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

13. **Solution.** $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t \cos t}{\cos t} = t$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{\cos t}.$$

当 $t = \frac{\pi}{4}$ 时, $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$.

14. **Solution.** $y = \frac{x^2}{2-x} = \frac{(2-x)^2 - 4(2-x) + 4}{2-x} = \frac{4}{2-x} - 2 - x$.

利用 $\left(\frac{1}{a-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$, 得

$$y^{(50)}(0) = \left(\frac{4}{2-x}\right)^{(50)} \Big|_{x=0} - 0 = \frac{4 \cdot 50!}{2^{51}} = \frac{50!}{2^{49}}.$$

15. **Solution.** $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\ln x + 1}, \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\ln x + 1} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\ln x + 1} \right) \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{x(\ln x + 1)^3}.$

当 $x = e$ 时, $\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{1}{8e}.$

16. **Solution.** $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$, 故 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 内的极值点为 $x = -1$.

计算 $f(-2) = 3, f(-1) = 10, f(2) = -17$.

故 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的最大值为 10, 最小值为 -17.

4 应用题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 设气球的半径为 r , 体积为 V , 则 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

由题意得 $\frac{dV}{dt} = 50$, 故

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dV}{dt} \cdot \frac{dr}{dV} = \frac{50}{4\pi r^2}.$$

当 $r = 5\text{cm}$ 时, $\frac{dr}{dt} = \frac{50}{100\pi} = \frac{1}{2\pi} \text{cm/s}.$

18. **Solution.** $F'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$, 令 $G(x) = xf'(x) - f(x)$, 则 $G'(x) = xf''(x)$.

由 $f''(x) > 0$ 知 $G'(x) = 0$ 具有唯一解 $x = 0$, 且 $G(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

因 $G(0) = -f(0) > 0$, 所以 $G(x) > 0$ 恒成立, 故 $F'(x) = \frac{G(x)}{x^2} > 0$ 恒成立,

即 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增.

5 综合题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 由题可知 $x_1 = \sqrt{a}, x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$.

显然 $x_1 = \sqrt{a} < \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$. 设 $x_k \leq \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$, 则

$$x_{k+1} = \sqrt{a + x_k} \leq \sqrt{a + \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}} = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}.$$

所以 $\forall n \in \mathbf{N}^*, x_n \leq \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$, 即 $\{x_n\}$ 有上界.

又因为

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{a + x_n} - x_n = \frac{a + x_n - x_n^2}{\sqrt{a + x_n} + x_n} = -\frac{(x_n - \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2})(x_n - \frac{1 - \sqrt{1+4a}}{2})}{\sqrt{a + x_n} + x_n} \geq 0,$$

所以 $\{x_n\}$ 单调递增, 故 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则 $A = \sqrt{a + A}$, 解得 $A = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$.

20. **Proof.** 假设 $\forall x \in (0, 2)$, $|f'(x)| < M$.

由 Lagrange 中值定理, $\exists \eta, \delta \in (0, 2)$, $|f(x)| = |f'(\eta)|x$, $|f(x)| = |f'(\delta)|(x - 2)$.

所以 $|f(x)| < Mx$, $|f(x)| < M(2 - x)$, 相加得 $|f(x)| < M$, 这与 $M = \max_{x \in (0, 2)} \{|f(x)|\}$ 矛盾.

所以 $\exists \xi \in (0, 2)$, 使得 $|f'(\xi)| \geq M$.