
CHAPTER 1

2019-2020 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \sin^2 n + 3 \cos^2 n}$.

2. 当 $x \rightarrow 1$ 时, 求 $\sqrt[3]{x} - 1$ 关于 $x - 1$ 的主部.

3. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \ln \cos x}$.

4. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} (\mathrm{e}^x - \sin x)^{\frac{1}{x^2}}$.

5. 设 $f(x) = x^{\tan x}$. 求 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

6. 求曲线 $\cos x + \ln(y - x) = y^2$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程.

7. 设函数 $f(x)$ 二阶可导, 求 $y = f(\sin x)$ 的二阶导数.

8. 设 $y = x \ln x$, 求 $y^{(6)}$.

9. 求 a, b 的值使得函数 $f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x < 0, \\ b - \sin 2x, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续并且可导.

10. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = t + \ln t \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. 设函数 $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x-1}{x+1}$. 指出 $f(x)$ 的间断点, 并判断其类型.

12. 设 $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 为 n 次实系数多项式. 证明当 n 为奇数时, 方程 $f(x) = 0$ 至少有一个实根.

13. 设 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处可导, $f(2) \neq 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{f(2)} \right]^x$.

14. 设一个雪球以 $2\text{cm}^3/\text{min}$ 的速度融化. 设雪球在融化过程中始终保持球形. 求当雪球半径为 10cm 的时候半径变化的速率.

15. 写出函数 $f(x) = x \cos x$ 带 Peano 余项的五阶 Maclaurin 公式.

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. 设数列 $\{x_n\}$ 由递推公式 $x_1 = \sqrt{6}$, $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ 给出. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在并求极限值.

17. 设 $0 < a < b$, 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导. 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\xi f'(\xi) - f(\xi) = \frac{af(b) - bf(a)}{b - a}.$$

CHAPTER 2

2019-2020 学年微积分（一）（上）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 显然 $\sqrt[n]{2} \leq \sqrt[n]{2 \sin^2 n + 3 \cos^2 n} \leq \sqrt[n]{3}$.

由夹逼定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \sin^2 n + 3 \cos^2 n} = 1$.

2. **Solution.**

$$\sqrt[3]{x} - 1 = (1 + x - 1)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{1}{3}(x - 1).$$

故主部为 $\frac{1}{3}(x - 1)$.

3. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{-\frac{1}{2}x^3} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{3x^2} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

4. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} (\mathrm{e}^x - \sin x)^{\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln(\mathrm{e}^x - \sin x)} \\ &= \mathrm{e}^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mathrm{e}^x - \cos x}{\mathrm{e}^x - \sin x} \cdot \frac{1}{2x}} = \mathrm{e}^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mathrm{e}^x - \cos x}{2x}} \\ &= \mathrm{e}^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mathrm{e}^x + \sin x}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

5. **Solution.** $\ln f(x) = \tan x \ln x$,

$$\text{所以 } f'(x) = f(x) \cdot (\tan x \ln x)' = x^{\tan x} \left(\sec^2 x \ln x + \frac{\tan x}{x} \right),$$

$$\text{代入 } x = \frac{\pi}{4} \text{ 得 } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{\pi}{2} \ln \frac{\pi}{4}.$$

6. **Solution.** 方程两边对 x 求导得到

$$-\sin x + \frac{1}{y-x}(y' - 1) = 2yy',$$

代入 $x = 0, y = 1$ 解得 $y'(0) = -1$, 所以切线方程为 $x + y = 1$.

7. **Solution.** $y' = f'(\sin x) \cos x$,

$$y'' = f''(\sin x) \cos^2 x - f'(\sin x) \sin x.$$

8. **Solution.**

法一. 根据 Leibniz 法则得到

$$\begin{aligned} y^{(6)} &= x(\ln x)^{(6)} + 6(\ln x)^{(5)} \\ &= x\left(\frac{1}{x}\right)^{(5)} + 6\left(\frac{1}{x}\right)^{(4)} \\ &= \frac{24}{x^5}. \end{aligned}$$

法二.

$$y^{(6)} = (1 + \ln x)^{(5)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(4)} = \frac{24}{x^5}.$$

9. **Solution.** 直接得到 $f(0^+) = b$, $f(0^-) = 1$, 所以 $b = 1$.

求导得到 $f'_+(0) = -2$, $f'_-(0) = a$, 所以 $a = -2$.

10. **Solution.** $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 + \frac{1}{t}}{2t + 2} = \frac{1}{2t}.$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2t^2} \cdot \frac{1}{2t + 2} = -\frac{1}{4t^2(t + 1)}.$$

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. **Solution.** 函数 $f(x)$ 的间断点为 $0, -1$. 因

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty, \quad f(-1^+) = -\frac{\pi e}{2}, \quad f(-1^-) = \frac{\pi e}{2},$$

所以 $x = 0$ 是无穷间断点, $x = -1$ 是跳跃间断点.

12. **Solution.** 当 n 为奇数时, 显然有

$$f(+\infty) = +\infty, \quad f(-\infty) = -\infty.$$

于是存在 x_1, x_2 使得 $f(x_1) < 0 < f(x_2)$.

函数 $f(x)$ 显然连续, 由介值定理知, 存在 $x_0 \in (x_1, x_2)$ 使得 $f(x_0) = 0$, 即方程 $f(x) = 0$ 至少有一个实根.

13. **Solution.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{f(2)} \right]^x &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{f\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{f(2)}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{f\left(2 + \frac{1}{x}\right) - f(2)}{f(2)} \right)} \\ &= e^{\frac{1}{f(2)} \lim_{x \rightarrow \infty} x [f\left(2 + \frac{1}{x}\right) - f(2)]} \\ &= e^{\frac{1}{f(2)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f\left(2 + \frac{1}{x}\right) - f(2)}{\frac{1}{x}}} \\ &= e^{\frac{f'(2)}{f(2)}}. \end{aligned}$$

14. **Solution.** 根据几何关系得到

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

两边对 t 求导得到

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}.$$

代入 $\frac{dV}{dt} = -2$ 以及 $r = 10$ 解得 $\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{200\pi}$.

即半径以 $\frac{1}{200\pi}$ cm/min 的速度减小.

15. **Solution.** 先写出

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

进而

$$f(x) = x \cos x = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + o(x^5).$$

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. **Proof.**

显然 $x_2 > x_1$, 设 $x_{k+1} > x_k$, 由 $x_{k+2}^2 - x_{k+1}^2 = 6 + x_{k+1} - 6 - x_k = x_{k+1} - x_k > 0$ 知 $x_{k+2} > x_{k+1}$.

由数学归纳法知 $\{x_n\}$ 严格单调增加.

另外显然 $x_1 < 3$, 设 $x_k < 3$, 由 $x_{k+1} = \sqrt{6 + x_k} < \sqrt{9} = 3$ 知 $x_{k+1} < 3$.

由数学归纳法知 $\{x_n\}$ 有上界 3. 根据单调有界收敛准则知数列 $\{x_n\}$ 极限存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$, 对 $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ 两边取极限得到 $L = \sqrt{6 + L}$, 解得 $L = 3$.

17. **Proof.** 显然函数 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ 和 $G(x) = \frac{1}{x}$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 并且 $G(x)$ 的导数不为 0.

由 Cauchy 中值定理知存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \xi f'(\xi) - f(\xi).$$

两边变号即得所证.