

作者	生姜 DrGinger
脚本	生姜 DrGinger
视频	崔崔 CuiCui
开源学习资源	<a href="https://github.com/Visualize-ML">https://github.com/Visualize-ML</a>
平台	<a href="https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang">https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang</a> <a href="https://space.bilibili.com/3546865719052873">https://space.bilibili.com/3546865719052873</a> <a href="https://space.bilibili.com/513194466">https://space.bilibili.com/513194466</a>

## 7.2 线性组合视角看线性方程组



### 本节你将掌握的核心技能：

- ▶ 矩阵乘法第三视角：矩阵乘法  $\mathbf{A}\mathbf{b}$  结果是  $\mathbf{A}$  列向量的线性组合。
- ▶ 单位矩阵、对角矩阵、三角矩阵如何影响基底和网格形状。
- ▶ 行列式为零：基底线性相关，解可能无数或无解。
- ▶ 齐次方程组解的结构：解的个数与列向量是否线性无关有关。
- ▶ 超定方程组：方程数量多于未知数时，解的存在性与几何视角。

本节回顾了矩阵乘法的第三视角——左侧矩阵列向量的线性组合。首先，通过鸡兔同笼问题，说明矩阵乘法可以看作列向量的线性组合，并且回顾了基底这个概念。然后，讨论了单位矩阵、对角矩阵、上三角矩阵、下三角矩阵在该视角下的特性，展示其基底如何影响向量变换。接着，分析了一般方阵的可逆性与行列式的关系，说明行列式为零时方程组可能无解或有无数组解。最后，探讨超定方程组的解的情况，结合矩阵乘法的第三视角分析解的数量。

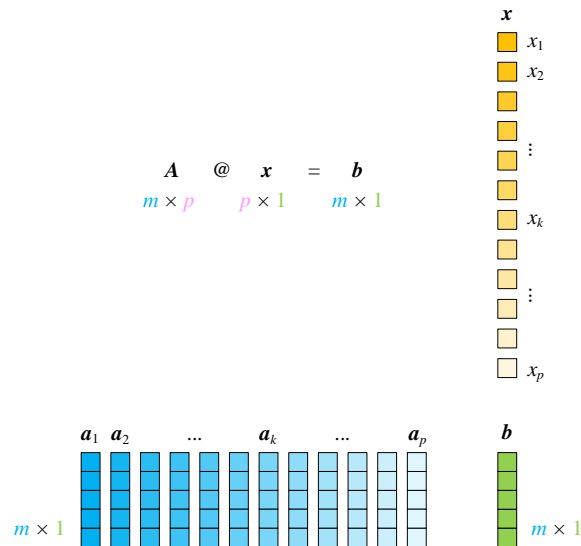
### 回顾矩阵乘法的第三视角：列向量线性组合

本书前文介绍过矩阵乘法的第三视角，下面简单回顾一下。

如图 1 所示，矩阵乘法  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ，可以把左侧矩阵  $\mathbf{A}$  写成列向量，展开得到

$$\mathbf{A}_{m \times p} \mathbf{x}_{p \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_p \mathbf{a}_p = \mathbf{b} \quad (1)$$

这个视角告诉我们，列向量  $\mathbf{b}$  是矩阵  $\mathbf{A}$  列向量的线性组合。

图 1. 矩阵乘法  $Ax = b$  的第三视角

## 再看鸡兔同笼问题

上一节中，把鸡兔同笼问题写成矩阵乘法

$$Ax = b \quad (2)$$

其中，

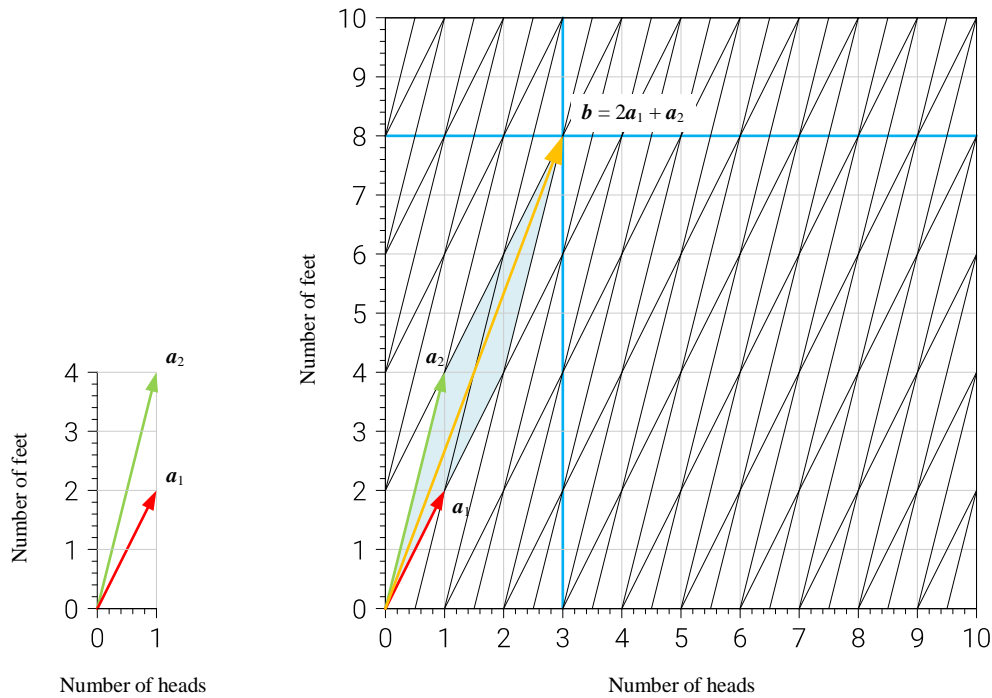
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 35 \\ 94 \end{bmatrix} \quad (3)$$

用矩阵乘法第三视角展开 (2)

$$Ax = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 94 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ x & b \end{matrix}$

矩阵  $A$  的第一列列向量  $a_1$  代表一只鸡有 1 个头、2 只脚； $A$  的第二列列向量  $a_2$  代表一只兔有 1 个头、4 只脚。

图 2. 向量  $b$  是  $a_1$ 、 $a_2$  的线性组合

用矩阵乘法第三直角展开 (4) 得到

$$\underbrace{x_1}_{a_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{a_2} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{a_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 35 \\ 94 \end{bmatrix}}_b \quad (5)$$

向量  $b$  是  $a_1$ 、 $a_2$  的线性组合。

举个更简单的例子，如果有 2 只鸡 ( $x_1$ )、1 只兔 ( $x_2$ )，按线性组合形式来写

$$2a_1 + 1a_2 = 2 \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{a_1} + 1 \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{a_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}}_b \quad (6)$$

如图 2 所示，基底  $[a_1, a_2]$  张成了这个平面，显然向量  $b$  在这个平面上。而  $(2, 1)$  就是向量  $b$  在基底  $[a_1, a_2]$  上的坐标。

下面，利用线性组合视角，我们把上一节几个例子逐个再分析一遍！然后再把同样的视角用在分析过定方程组上。

请大家平行阅读本节和上一节。

## 单位矩阵

如果矩阵  $A$  为单位矩阵，用矩阵乘法第三视角展开

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_b \Rightarrow x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{a_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{a_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_b \quad (7)$$

如图 3 所示，基底  $[a_1, a_2]$  对应的网格为单位正方形；也就是  $a_1$  说相当于  $e_1$ ，而  $a_2$  相当于  $e_2$ 。

向量  $b$  可以写成如下线性组合

$$b = a_1 - a_2 = 1 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

这说明，向量  $b$  在基底  $[a_1, a_2]$  中的坐标为  $(1, -1)$ 。

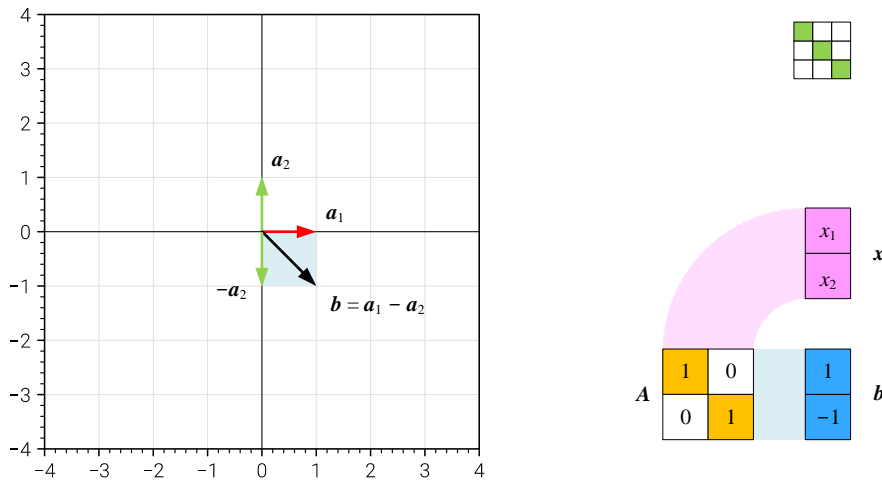


图 3. 方阵  $A$  是单位矩阵

### 对角方阵：主对角线元素相同

如果矩阵  $A$  为对角方阵，且主对角线元素相同；用矩阵乘法第三视角展开

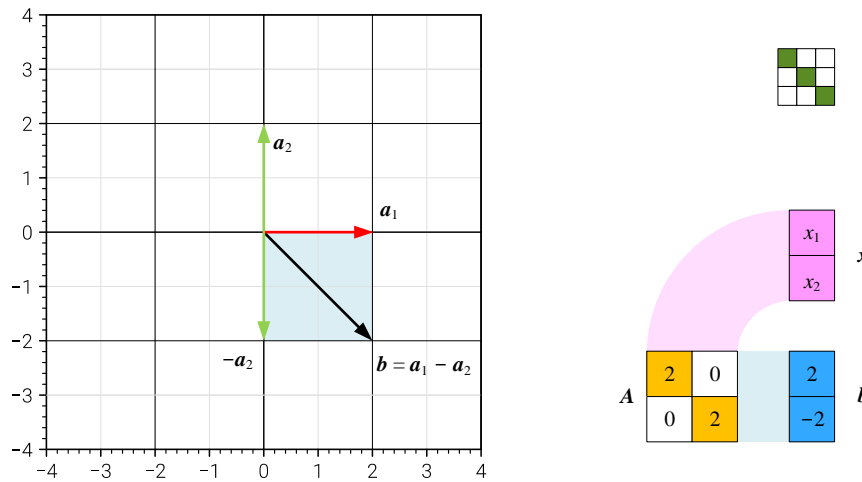
$$\begin{cases} 2x_1 = 2 \\ 2x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}}_b \Rightarrow x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{a_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{a_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}}_b \quad (9)$$

如图 4 所示，基底  $[a_1, a_2]$  对应的网格为正方形。

向量  $b$  可以写成如下线性组合

$$b = a_1 - a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

这意味着向量  $b$  在基底  $[a_1, a_2]$  中的坐标也是  $(1, -1)$ 。

图 4. 方阵  $A$  是对角方阵，主对角线元素相同

### 对角方阵：主对角线元素不同

如果矩阵  $A$  为对角方阵，且主对角线元素不同；用矩阵乘法第三视角展开

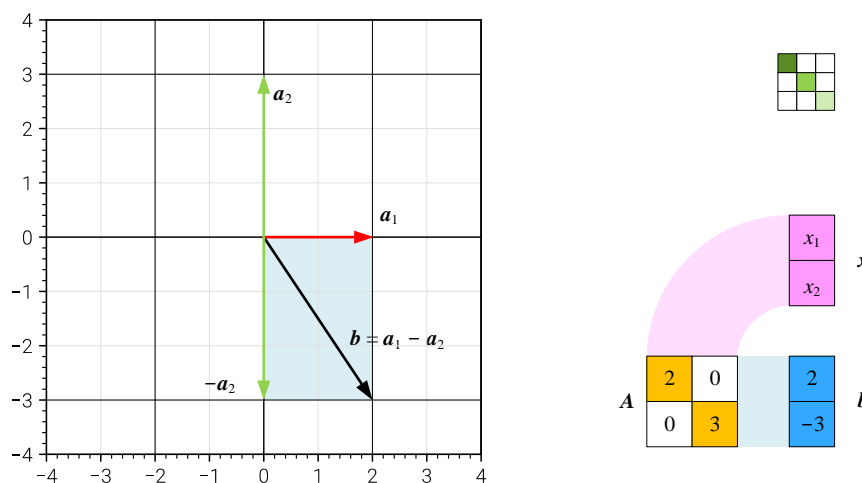
$$\begin{cases} 2x_1 = 2 \\ 3x_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}}_b \Rightarrow x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{a_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{a_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}}_b \quad (11)$$

如图 5 基底  $[a_1, a_2]$  对应的网格为矩形。

向量  $b$  可以写成如下线性组合

$$b = a_1 - a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

这说明，向量  $b$  在基底  $[a_1, a_2]$  中的坐标也是  $(1, -1)$ 。

图 5. 方阵  $A$  是对角方阵，主对角线元素不同

## 上三角矩阵

如果矩阵  $A$  为上三角矩阵，用矩阵乘法第三视角展开

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_b \Rightarrow x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{a_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{a_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_b \quad (13)$$

如图 6 所示，基底  $[a_1, a_2]$  对应的网格为平行四边形（单位正方形沿横轴剪切）。

向量  $b$  可以写成如下线性组合

$$b = a_1 - a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

请大家自己写出向量  $b$  在基底  $[a_1, a_2]$  中的坐标。

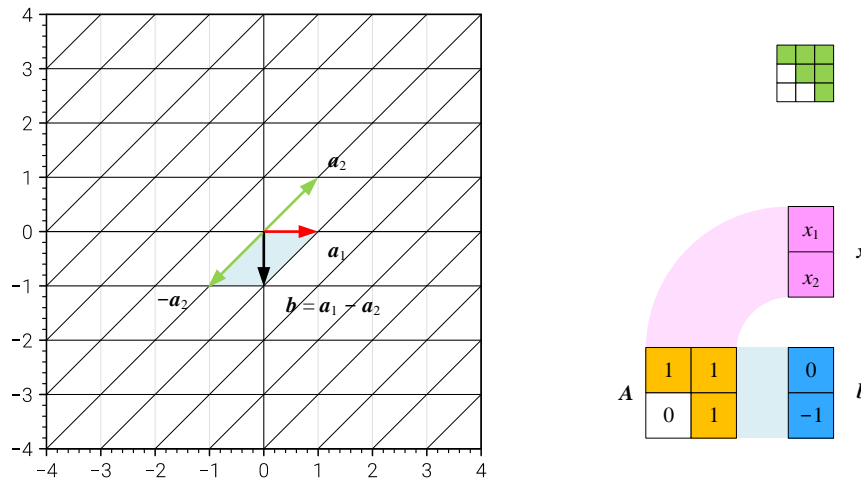


图 6. 方阵  $A$  是上三角矩阵

## 下三角矩阵

如果矩阵  $A$  为下三角矩阵，用矩阵乘法第三视角展开

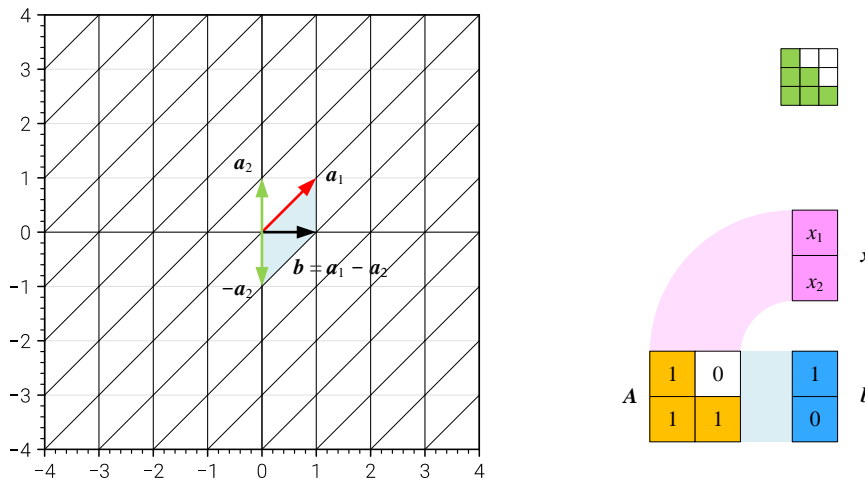
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_b \Rightarrow x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{a_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{a_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_b \quad (15)$$

如图 7 所示，基底  $[a_1, a_2]$  对应的网格为平行四边形（单位正方形沿纵轴剪切）。

向量  $b$  可以写成如下线性组合

$$b = a_1 - a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

请大家自己写出向量  $b$  在基底  $[a_1, a_2]$  中的坐标。

图 7. 方阵  $A$  是下三角矩阵

### 一般方阵，行列式不为 0

如果矩阵  $A$  一般方阵，如果其行列式不为 0，说明  $A$  可逆，方程组存在唯一解，比如下例。

用矩阵乘法第三视角展开

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_b \Rightarrow x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{a_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{a_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_b \quad (17)$$

如图 8 所示，基底  $[a_1, a_2]$  对应的网格为平行四边形。

向量  $b$  可以写成如下线性组合

$$b = a_1 - a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

请大家自己写出向量  $b$  在基底  $[a_1, a_2]$  中的坐标。

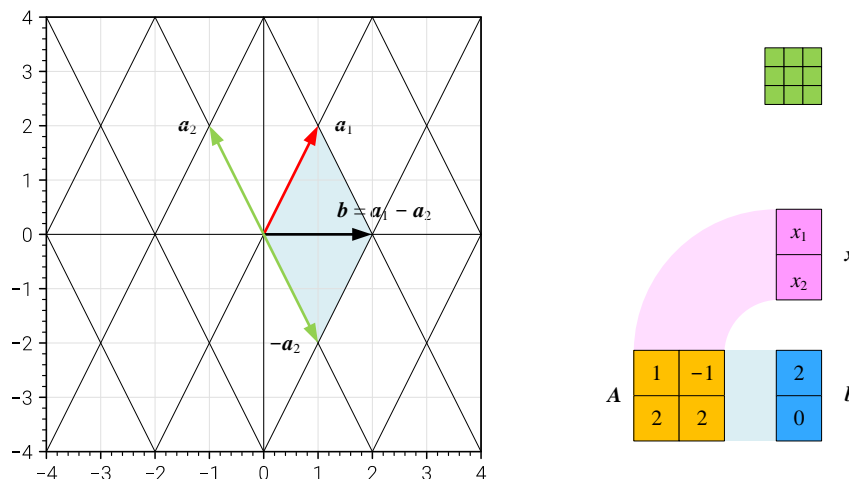


图 8. 方阵  $A$  行列式不为 0,  $Ax = b$ **齐次线性方程组：唯一解**

如果线性方程组齐次，即  $b = 0$ ，比如下例。用矩阵乘法第三视角展开

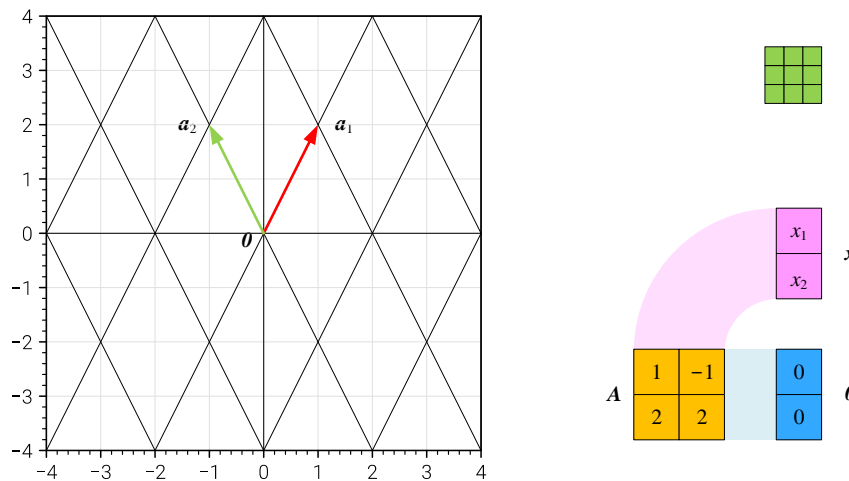
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_0 \Rightarrow x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{a_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{a_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_0 \quad (19)$$

如图 9 所示，基底  $[a_1, a_2]$  对应的网格为平行四边形和图 8 完全一致。

向量  $b$  可以写成如下线性组合

$$0 = a_1 - a_2 = 0 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \times \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

由于  $a_1, a_2$  线性无关，零向量  $0$  在基底  $[a_1, a_2]$  中的坐标为  $(0, 0)$ ，这是齐次线性方程组的唯一解。

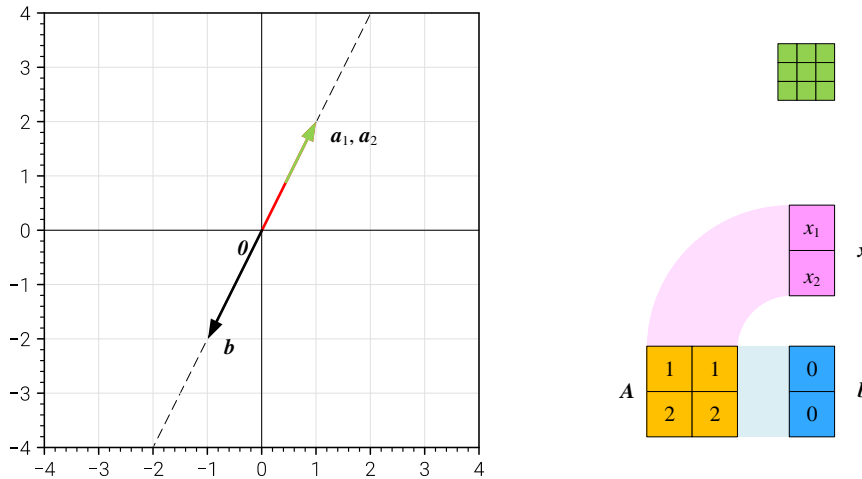
图 9. 方阵  $A$  行列式不为 0,  $Ax = 0$ **一般方阵，行列式为 0****无数组解**

下例中方阵  $A$  的行列式为 0。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}}_b \Rightarrow x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{a_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{a_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}}_b \quad (21)$$

如图 10 所示， $a_1, a_2$  线性相关，显然  $[a_1, a_2]$  不能构成基底。



图 10. 方阵  $A$  行列式为 0,  $Ax=b$  无数组解

但是上式却存在解，这是因为  $b$  和  $a_1$ 、 $a_2$  在同一条直线上。满足下式的  $x_1$ 、 $x_2$  就是方程组的解

$$k \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{a_1} - (k+1) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{a_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}}_b \quad (22)$$

其中， $k$  为任意实数。这意味着 (21) 中齐次线性方程组有无数组解，即

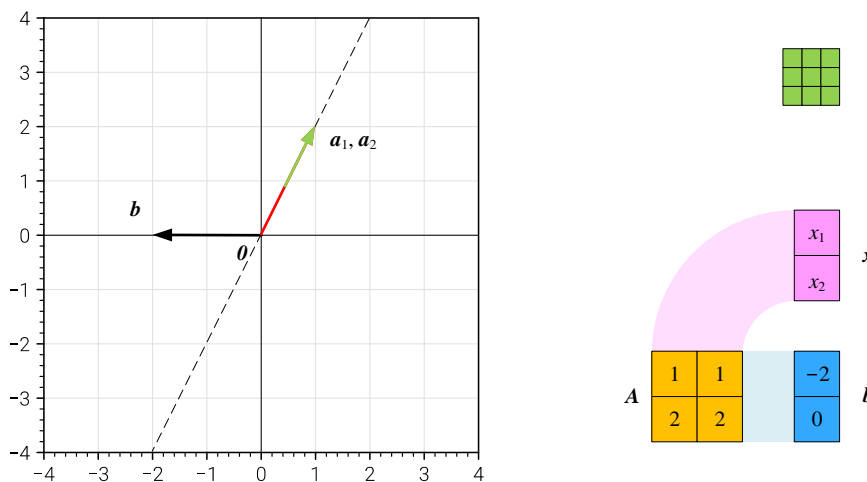
$$\begin{cases} x_1 = k \\ x_2 = -k - 1 \end{cases} \quad (23)$$

## 无解

和上一个例子一样，下例中方阵  $A$  的行列式也为 0，用矩阵乘法第三视角展开

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}}_b \Rightarrow x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{a_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{a_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}}_b \quad (24)$$

如图 11 所示，向量  $a_1$ 、 $a_2$  重合，线性组合也在图中的划线上。显然，无论  $a_1$ 、 $a_2$  如何线性组合，向量  $b$  都不可能在这条划线上。

图 11. 方阵  $A$  行列式为 0,  $Ax = b$  无解

### 齐次线性方程组：无数组解

下面，让我们再看一个齐次线性方程组的例子。

如下线性方程组， $\det(A) = 0$ ；先写成矩阵乘法，然后用矩阵乘法第三视角展开

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_b \Rightarrow x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{a_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{a_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_b \quad (25)$$

如图 12 所示，向量  $a_1$ 、 $a_2$  重合，向量  $a_1$ 、 $a_2$  的线性组合也在图 12 中过原点的划线上；零向量  $0$  显然在它们所在直线上。

给定任意实数  $k$  都可以通过如下线性组合得到零向量  $0$

$$k \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{a_1} - k \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{a_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_b \quad (26)$$

这说明  $(k, -k)$  都是方程组的解；显然，这个齐次线性方程组有无数组解。

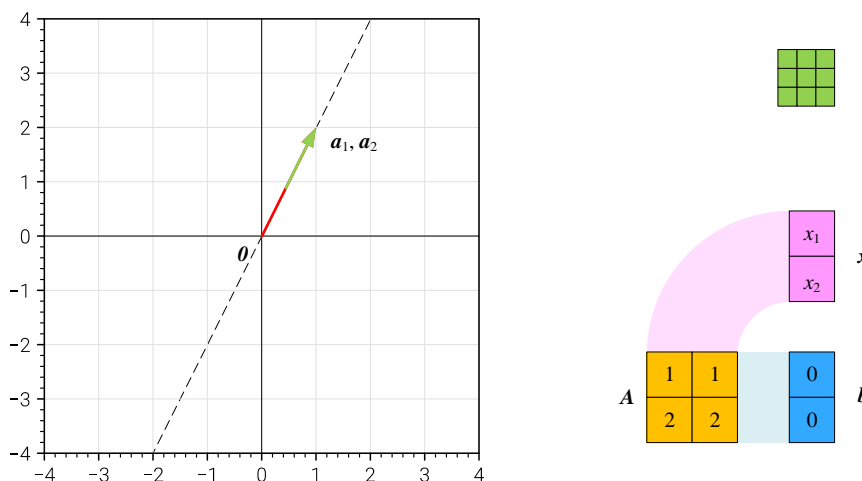


图 12. 方阵  $A$  行列式为 0,  $Ax = 0$  无数组解

## 超定方程组

超定方程组是指方程个数多于未知数个数的方程组。

比如，三个二元一次方程构成的方程组，它的基本形式如下：

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 = b_3 \end{cases} \quad (27)$$

可以将上述三个二元一次方程组写成矩阵形式：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_b \quad (28)$$

系数矩阵是  $3 \times 2$  矩阵

$$A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix} \quad (29)$$

变量向量  $x$  是二维

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

常数向量  $b$  是三维，对应方程数

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (31)$$

由于这是一个超定方程组，我们需要分析其解的可能情况。几何上，每个方程代表一条直线，因此解的情况取决于三条直线在平面上的相互关系。

## 超定线性方程组：无解

图 13 所示的四组方程组均无解。

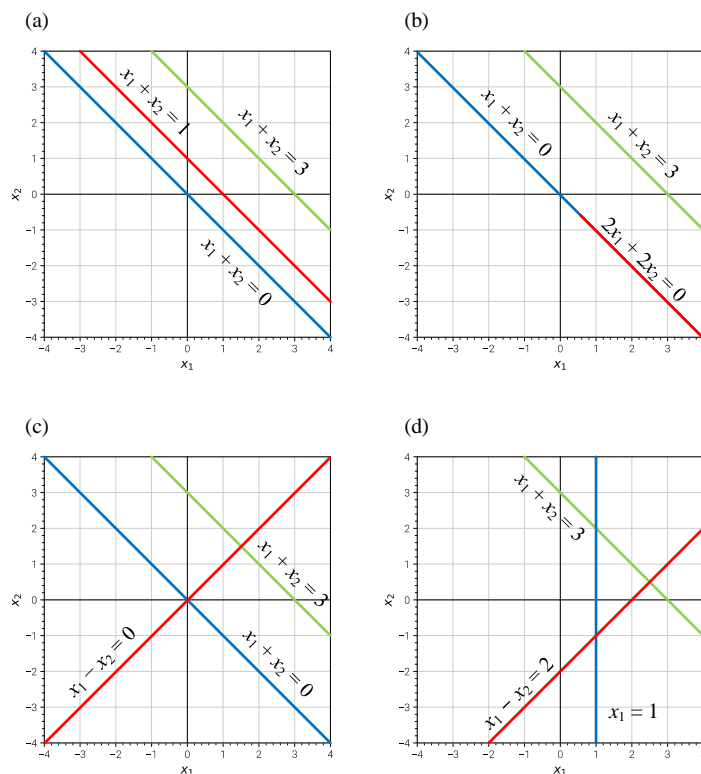


图 13. 超定方程组 (非齐次), 无解

比如图 13 (a), 三条直线相互平行, 没有公共交点, 因此方程组无解。

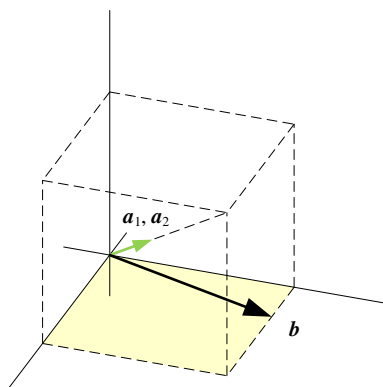
把方程组写成矩阵乘法形式

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}}_b \quad (32)$$

用矩阵乘法第三视角展开以上矩阵乘法

$$x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{a_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{a_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}}_b \quad (33)$$

如图 14 所示, 显然,  $a_1$ 、 $a_2$  共线, 而向量  $b$  不在这条 (过原点) 的直线上; 所以这个线性方程组无解。

图 14.  $a_1, a_2$  共线，而向量  $b$  不在这条 (过原点) 的直线上

请大家用相同的方法分析图 13 剩余其他三组线性方程组。

### 超定线性方程组：有唯一解

图 15 所示为超定方程组有唯一解的两种情况。

图 15 (a) 中，两条直线重合，并于第三条直线相交于一点。

图 15 (b) 中，三条直线相交于一点，这个交点就是超定线性方程组的唯一解。

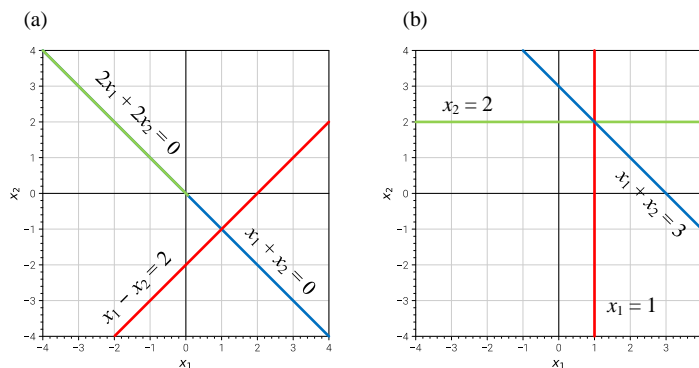


图 15. 超定方程组 (非齐次)，唯一解

把图 15 (b) 对应的方程组写成矩阵乘法形式

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_b \quad (34)$$

用矩阵乘法第三视角展开以上矩阵乘法

$$1 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$a_1 \qquad a_2 \qquad b$

如图 16 所示，显然， $a_1$ 、 $a_2$  不共线，但是  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $b$  共面；向量  $b$  可以写成  $a_1$ 、 $a_2$  的线性组合。

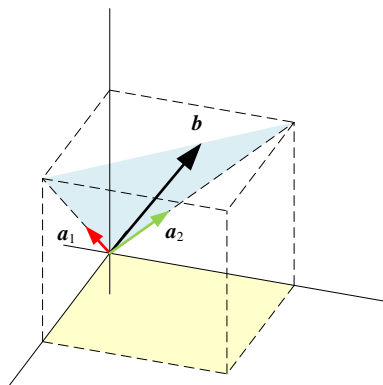


图 16.  $a_1$ 、 $a_2$  不共线，但是  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $b$  共面

图 17 展示两个齐次超定方程组，分别有唯一解，解的位置位于原点。

? 请大家自行分析图 17 这两幅图。

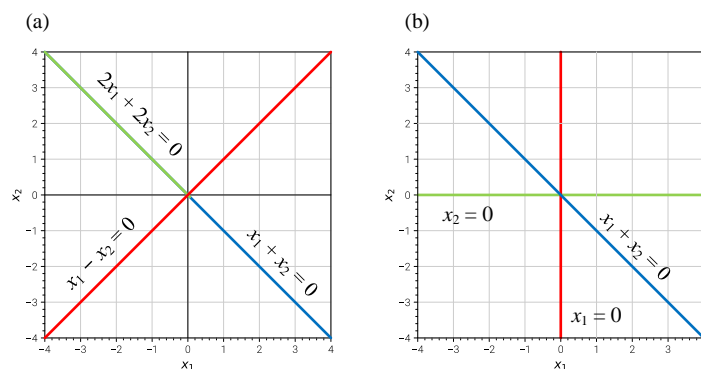


图 17. 超定方程组 (齐次)，唯一解

### 超定线性方程组：无数组解

如图 18 (a) 所示，如果三条直线重合，意味着它们代表同一条直线的不同等式形式，则方程组有无数个解。

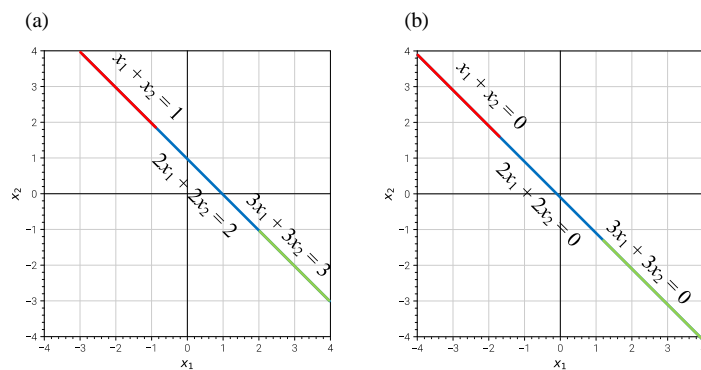


图 18. 超定方程组，无数组解

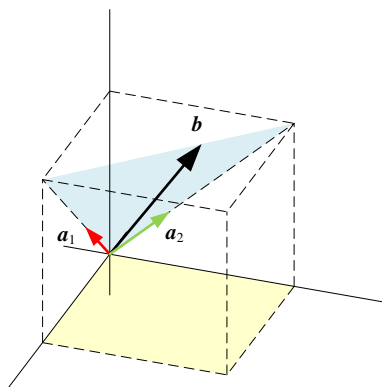
把图 18 (a) 对应的方程组写成矩阵乘法形式

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_b \quad (36)$$

用矩阵乘法第三视角展开以上矩阵乘法

$$(k+1) \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{a_1} - k \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{a_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_b \quad (37)$$

如图 19 所示， $a_1$ 、 $a_2$ 、 $b$  共线；准确来说三者重合。

图 19.  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $b$  共线

对于以上线性组合， $k$  可以取得任意实数， $(k+1)a_1$ 、 $-ka_2$  线性组合得到  $b$ 。

图 18 (b) 对应的方程组为齐次线性方程组。上一节提过，齐次线性方程组指的是  $b$  为零向量  $0$ 。

把图 18 (b) 对应的方程组写成矩阵乘法形式

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b=0} \quad (38)$$

用矩阵乘法第三视角展开以上矩阵乘法

$$k \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{a_1} + (-k) \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{a_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b=0} \quad (39)$$

对于以上线性组合， $k$  可以取得任意实数， $ka_1$ 、 $(-k)a_2$  线性组合得到  $0$ 。因此，(38) 有无数组解。



请大家用 DeepSeek/ChatGPT 等工具完成本节如下习题。

**Q1.** 请把如下线性方程组写成矩阵乘法形式。

▶  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 10 \end{cases}$

▶  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$

▶  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

▶  $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$

▶  $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

**Q2.** 请把上一道题的矩阵乘法用第三视角 (列向量线性组合) 展开，并绘制网格。