

作者	生姜 DrGinger
脚本	生姜 DrGinger
视频	崔崔 CuiCui
开源学习资源	https://github.com/Visualize-ML
平台	https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang https://space.bilibili.com/3546865719052873 https://space.bilibili.com/513194466

6.3 基底



本节你将掌握的核心技能：

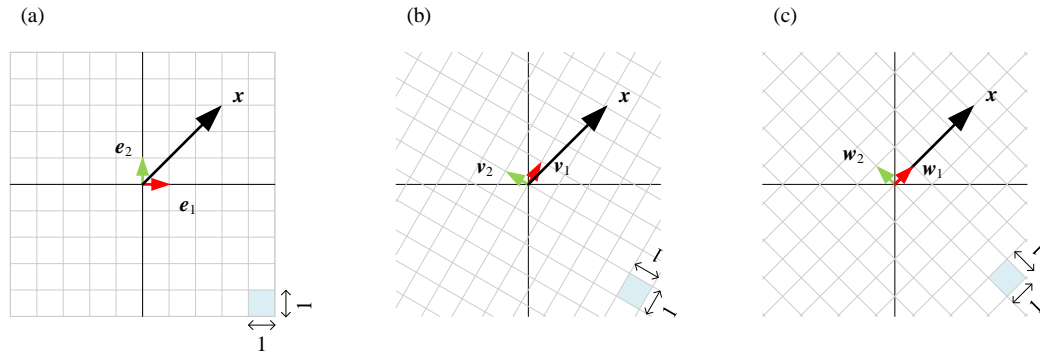
- ▶ 基底不唯一，向量可在不同基底下有不同坐标。
- ▶ 标准正交基：最“自然”的单位正方形网格。
- ▶ 规范正交基：旋转单位正方形网格。
- ▶ 正交基：基底向量两两正交。
- ▶ 非正交基：基底向量不正交，但需线性无关。
- ▶ 使用逆矩阵求向量在新基底中的坐标。
- ▶ 实现不同基底间坐标的互换。

本节介绍了基底的概念，强调基底并不唯一，向量可以在不同的基底下拥有不同的坐标。首先，我们定义了标准正交基，它最直观、最自然，如笛卡尔坐标系中的单位向量。然后，我们讨论了规范正交基，它们的基底向量长度为 1 且相互正交，但不一定是标准基。接着，我们介绍了正交基，它们的向量相互垂直但长度不要求为 1。随后，我们讨论了非正交基，它们的基底向量不必正交但必须线性无关。最后，我们探讨了基底转换，以 RGB 和 CMY 色彩空间为例，说明如何在不同基底间变换坐标。

基底并不唯一

$[e_1, e_2]$ 只是平面 \mathbb{R}^2 无数基底中的一个。

如图 1 所示， $[e_1, e_2]$ 、 $[v_1, v_2]$ 、 $[w_1, w_2]$ 都是平面 \mathbb{R}^2 基底！

图 1. 向量 x 在三个不同的正交坐标系中位置

也就是说 $\mathbb{R}^2 = \text{span}(e_1, e_2) = \text{span}(v_1, v_2) = \text{span}(w_1, w_2)$ 。

如图 1 所示，平面 \mathbb{R}^2 上的向量 x 在 $[e_1, e_2]$ 、 $[v_1, v_2]$ 、 $[w_1, w_2]$ 这三组基底中都有各自的唯一坐标。

仔细观察图 1 这三个不同的正交直角坐标系，我们发现它们的方格都是单位正方形。

大家可能早已注意到图 1 中， $[e_1, e_2]$ 、 $[v_1, v_2]$ 、 $[w_1, w_2]$ 的每个基底向量都是单位向量，即 $\|e_1\| = \|e_2\| = \|v_1\| = \|v_2\| = \|w_1\| = \|w_2\| = 1$ 。

且每组基底内基底向量相互正交，即 e_1 垂直 e_2 ， v_1 垂直 v_2 ， w_1 垂直 w_2 。本书中，基底中基底向量若两两正交，该基底叫**正交基** (orthogonal basis)。任何向量在这些正交坐标系中的坐标可以通过本书前文介绍的向量正交分解得到，请大家回顾；本节还会介绍更方便的求解方法。

如果**正交基**中每个基底向量的模都为 1，则称该基底为**规范正交基** (orthonormal basis)。图 1 中 $[e_1, e_2]$ 、 $[v_1, v_2]$ 、 $[w_1, w_2]$ 三组基底都是**规范正交基**。

张成平面 \mathbb{R}^2 的**规范正交基**有无数组。

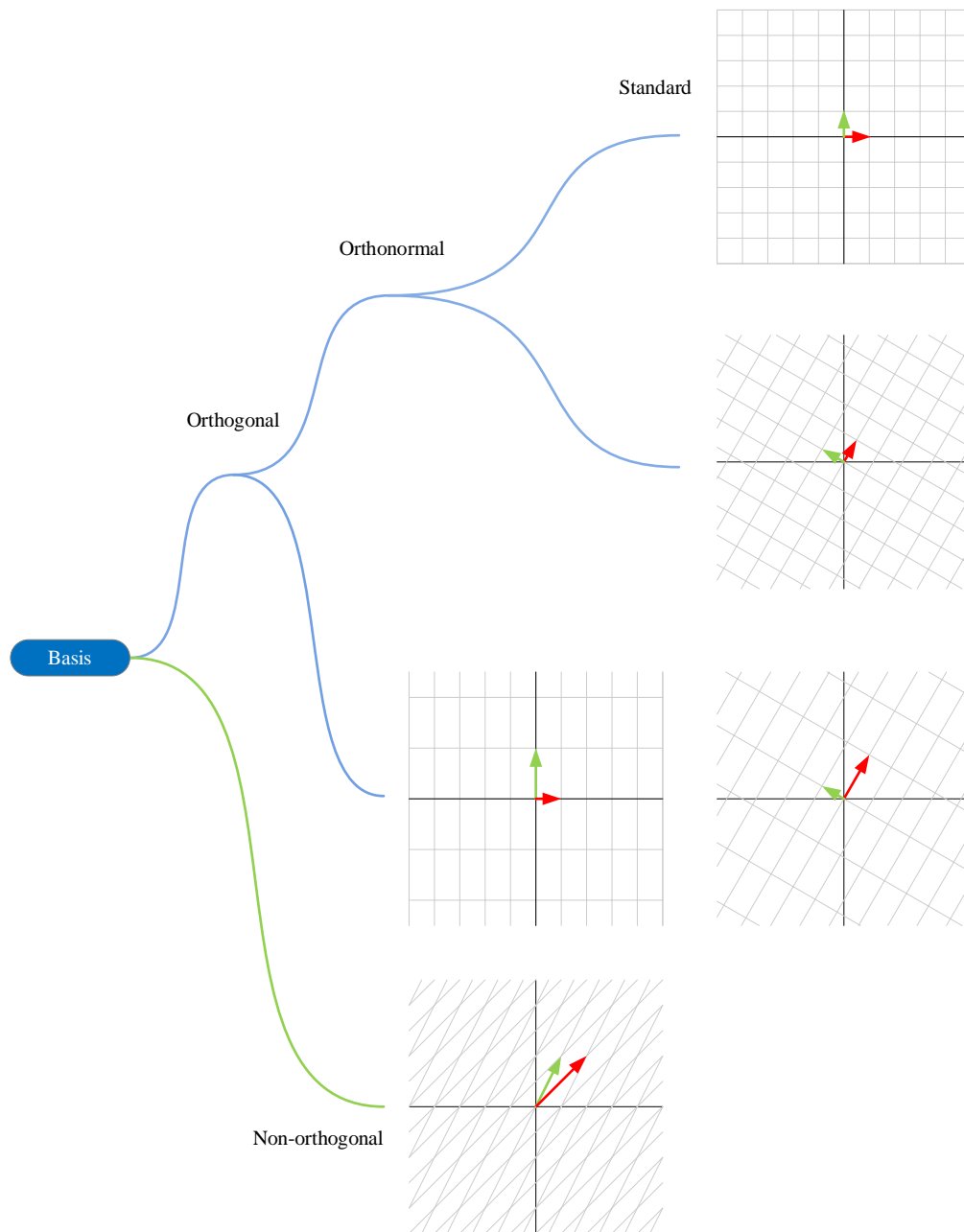


图 2. 几种基底之间的关系

$[e_1, e_2]$ 显然是特殊的规范正交基，我们管它叫做平面 \mathbb{R}^2 的**标准正交基** (standard basis, natural basis)，或称**标准基** (standard basis)。

“标准”这个字眼给了 $[e_1, e_2]$ ，是因为用这个基底表示平面 \mathbb{R}^2 最为自然。 $[e_1, e_2]$ 也是平面直角坐标系最普遍的参考系。**标准正交基** 旋转、镜像就可以得到其他**规范正交基**。

但是，看来看去，只有图 1 (a) 这组网格显得最自然，这就是为什么 $[e_1, e_2]$ 叫**标准正交基**。

显然， $[e_1, e_2, e_3]$ 是 \mathbb{R}^3 的**标准正交基**， $[e_1, e_2, \dots, e_p]$ 是 \mathbb{R}^p 的**标准正交基**。

而张成 \mathbb{R}^2 的“格子”可能并非单位正方形，它们可以是其他正方形、旋转正方形、矩形、旋转矩形、平行四边形等等。但是，归纳来说，这些格子都有共同的特点——它们形成了一个由平行、等距、且过原点的平行四边形组成的网格。

图 2 总结了几种基底之间的关系。下面，让我们逐一讲解这些基底。

标准正交基：最自然

让我们先看平面 \mathbb{R}^2 的**标准正交基** $[e_1, e_2]$ 。如图 3 (a) 所示

图 3 中剩余三个基底 $[-e_1, e_2]$ 、 $[e_1, -e_2]$ 、 $[-e_1, -e_2]$ 也都是单位正方形网格，但是看着就是“别扭”，没有图 3 (a) 那么“自然”！图 3 只有 (a) 是**标准正交基**，剩余的三个基底为**规范正交基**。

规范正交基是本节后文要介绍的话题。

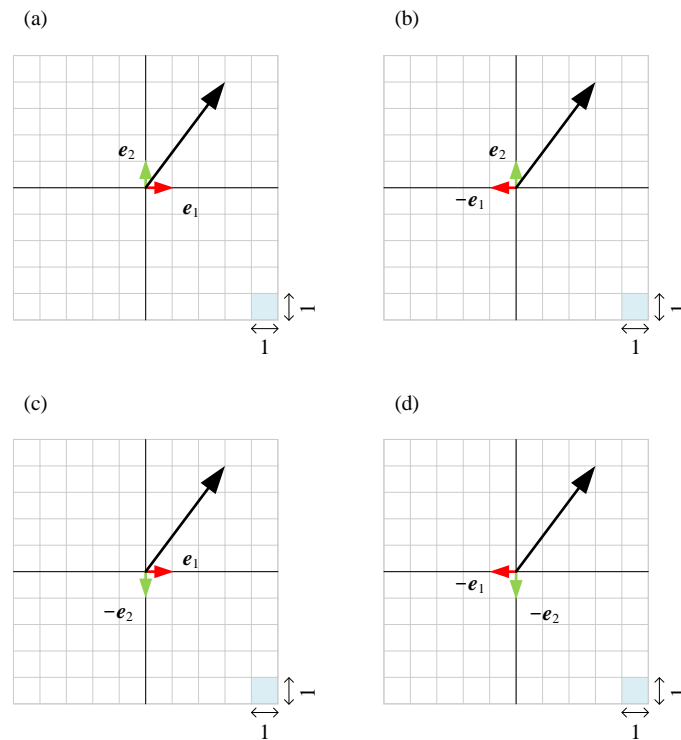


图 3. 几个单位正方形网格

显然，向量 $a = [3, 4]^T$ 在 $[e_1, e_2]$ 的坐标为 $(3, 4)$ 。下面让我们具体算算。

任意平面向量在 $[e_1, e_2]$ 基底的坐标为 (x_1, x_2) ，可以写成矩阵乘法

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 = [e_1 \ e_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

向量 $a = [3, 4]^T$ 可以写成

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

为了求向量 $\mathbf{a} = [3, 4]^T$ 在 $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ 基底中的坐标，我们需要计算

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中，单位矩阵的逆为其本身。

下面，让我们用类似的方法计算向量 $\mathbf{a} = [3, 4]^T$ 在 $[-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2]$ 中的坐标 (y_1, y_2) 。

向量 $\mathbf{a} = [3, 4]^T$ 可以写成

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (4)$$


容易计算得到

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

这和我们在图 3 (d) 观察到的结果一致。

代码 1 展示如何计算向量 $\mathbf{a} = [3, 4]^T$ 在不同基底中的坐标。下面聊聊其中关键词句。

- a** 用 `np.array()` 这个函数创建了一个“二维数组”，即向量 $\mathbf{a} = [3, 4]^T$ 。
- b** 创建了几个不同的基底，后面几行注释掉的代码是备用的其它坐标系统，暂时没有被激活。
- c** 是没有被注释的基底，对应 (4) 中方阵 \mathbf{A} ，会被用在后续的计算。
- d** 用 `numpy.linalg.inv()` 计算方阵 \mathbf{A} 逆矩阵。
- e** 这一行是我们整个代码的目标。我们想知道，如果我们换了个坐标系统，也就是用矩阵 \mathbf{A} 表示的新方向，那么原来的向量 $\mathbf{a} = [3, 4]^T$ 在这个新系统里怎么表达。我们用 `@` 符号表示“矩阵乘法”，也就是说我们拿逆矩阵 $\mathbf{A_inv}$ 去乘原来的向量 $\mathbf{a} = [3, 4]^T$ ，就能得到它在新坐标系统中的“坐标”。

代码 1. 计算向量在不同基底中的坐标 |  LA_06_03_01.ipynb

```

## 初始化
import numpy as np

## 定义向量
a = np.array([[3],
              [4]])

## 定义不同基底
# 规范正交基
A = np.array([[ -1,  0],
              [ 0, -1]])

# 规范正交基
# A = np.array([[3/5, -4/5],
#               [4/5, 3/5]])

# 正交基
# A = np.array([[ -4/5, -3/2],
#               [ 3/5, -2]])

# 非正交基
# A = np.array([[2, 1],
#               [1, 3]])

## 计算逆矩阵
A_inv = np.linalg.inv(A)
A_inv

## 计算坐标
A_inv @ a

```



RGB 空间中的标准正交基

如图 4 所示，在 RGB 颜色空间中， e_1 、 e_2 、 e_3 这三个基底向量两两正交，因此它们两两内积为 0：

$$e_1 \cdot e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad e_1 \cdot e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \quad e_2 \cdot e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (6)$$

其中， e_1 代表红色， e_2 代表绿色， e_3 代表蓝色。

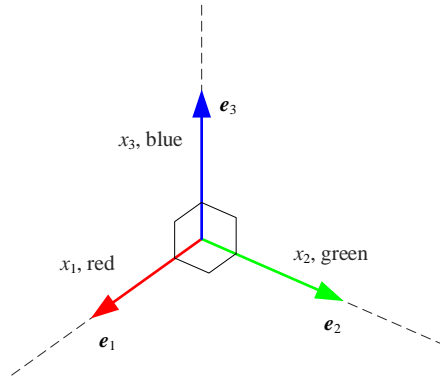


图 4. 三原色空间

而且， e_1 、 e_2 、 e_3 均为单位向量（方向向量），向量长度（模、L2 范数、欧几里得范数）为 1，即

$$\|e_1\|_2 = 1, \quad \|e_2\|_2 = 1, \quad \|e_3\|_2 = 1 \quad (7)$$

因此，在三原色模型这个向量空间 V 中， $[e_1, e_2, e_3]$ 是 V 的标准正交基。

任意一个颜色可以视作标准正交基 $[e_1, e_2, e_3]$ 中三个基底向量构成线性组合，即

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \quad (8)$$

其中， x_1 、 x_2 、 x_3 取值范围都是 $[0, 1]$ 。

前文反复提过，准确来说，RGB 三原色空间并不是本书前文所述的向量空间，原因就是 x_1 、 x_2 、 x_3 有取值范围限制。而向量空间不存在这样的取值限制。除了零向量 $\mathbf{0}$ 以外，真正的向量空间都是无限延伸。

任意颜色向量在 $[e_1, e_2, e_3]$ 基底的坐标为 (x_1, x_2, x_3) ，可以写成矩阵乘法

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = [e_1 \quad e_2 \quad e_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

比如白色向量可以写成

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

为了求白色向量在 $[e_1, e_2, e_3]$ 基底中的坐标，我们仅需要完成如下运算

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

大家应该注意到，我们一再强调“正交”，即垂直。当笛卡尔首次提出“坐标”的概念时，他并没有指定必须是“直角坐标”。实际上，他认为任何两根不平行的直线都可以用来刻画二维平面上的坐标。我们青睐直角坐标系，是因为它真的很方便、很自然。

对称，几何学中的勾股定理依赖于直角。直角坐标系使得向量的运算变得直观，例如计算向量的长度、角度、内积等操作都能直接应用勾股定理和三角函数。

此外，直角坐标系中的正交基可以大大简化坐标变换，使得投影、旋转、缩放等操作更加高效。在工程、物理、计算机科学等多个领域，直角坐标系都被广泛使用，因为它不仅符合人们的直觉，也能减少计算的复杂度。

然而，尽管直角坐标系最常用，它并不是唯一的选择。在某些应用场景中，比如流体力学、图像变换或者计算机图形学，使用非正交基可能更适合特定的问题。例如，斜坐标系可以更自然地描述某些物理现象，而极坐标系则能更简洁地表达圆周运动。不同的坐标系统有各自的优势，关键在于选择最适合问题需求的表达方式。

规范正交基：正交单位向量

简单来说，**规范正交基**是一组两两正交单位向量组成的基底。不要求像标准正交基那么“自然”。

图 5 展示的是四个**规范正交基**。

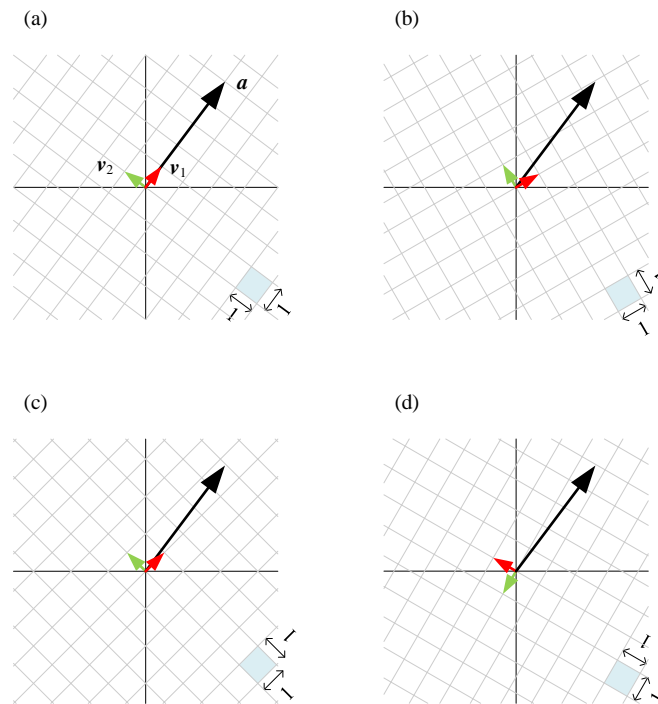


图 5. 几个旋转单位正方形网格 (规范正交基)

以图 5 (a) 为例，这个**规范正交基**为

$$V = [v_1 \ v_2] = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \quad (12)$$

V 和其转置 V^T 的乘积为

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}\mathbf{V}^T &= [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1 @ \mathbf{v}_1^T + \mathbf{v}_2 @ \mathbf{v}_2^T \\
&= \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}^T \\
&= \begin{bmatrix} 9/25 & 12/25 \\ 12/25 & 16/25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16/25 & -12/25 \\ -12/25 & 9/25 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}
\end{aligned} \tag{13}$$

反过来， $\mathbf{V}^T\mathbf{V}$ 也是形状相同的单位矩阵，即 $\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}$ ；请大家自己计算。这说明 \mathbf{V} 是正交矩阵。

让我们计算向量 $\mathbf{a} = [3, 4]^T$ 在图 5 (a) 中的坐标 (y_1, y_2) 。

向量 $\mathbf{a} = [3, 4]^T$ 可以写成

$$\begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{14}$$

容易计算得到

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

也就是说，向量 \mathbf{a} 在这个**规范正交基**的坐标为 $(5, 0)$ ，这和我们图 5 (a) 观察到的结果一致。



LA_06_03_02.ipynb 绘制规范正交基网格，请大家自学。

正交基：仅满足正交

规范正交基要求基底向量都是单位向量，且两两正交。放弃“单位向量”，尽保留“正交”这个约束，便得到**正交基**。

如图 6 所示，**正交基**的网格可以是，正方形、旋转正方形、矩形、旋转矩形。

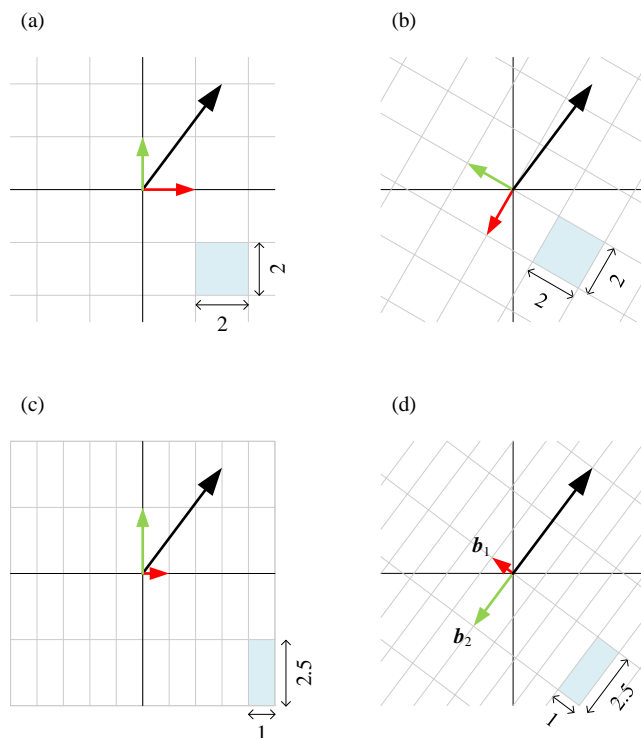


图 6. 几个正交基

以图 6 (d) 为例，两个基底向量 b_1 、 b_2 为

$$b_1 = \begin{bmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -3/2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

b_1 、 b_2 向量内积为 0，两者正交；但是 b_2 不是单位向量。

让我们计算向量 $a = [3, 4]^T$ 在图 6 (d) 中的坐标 (y_1, y_2) 。

向量 $a = [3, 4]^T$ 可以写成

$$\begin{bmatrix} -4/5 & -3/2 \\ 3/5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (17)$$

容易计算得到

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/5 & -3/2 \\ 3/5 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.6 \\ -0.24 & -0.32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

也就是说，向量 a 在这个**正交基**的坐标为 $(0, -2)$ ，这和我们在图 6 (d) 观察到的结果一致。

非正交基：不正交

正交基要求基底向量两两正交；放松“两两正交”这个约束，我们便得到**非正交基**。注意，**非正交基**的基底向量还是要求线性无关，这是基底向量必须要满足的条件。

图 7 展示了几个**非正交基**。

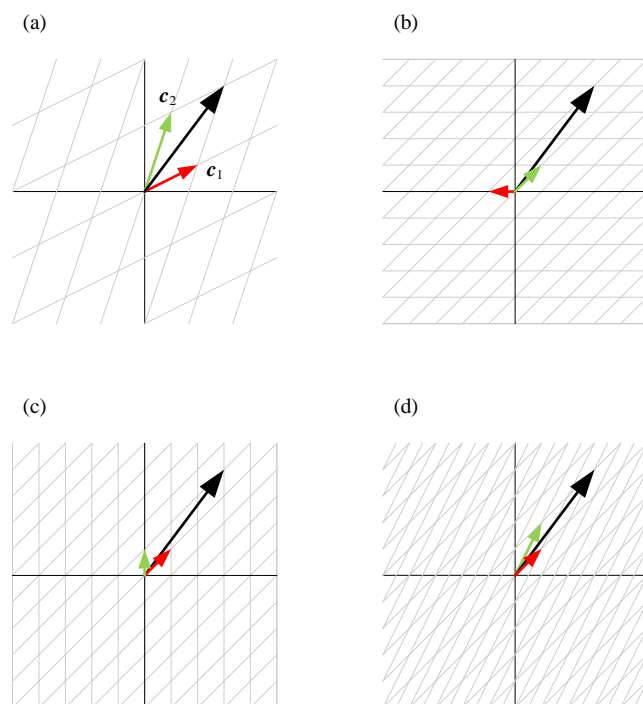


图 7. 几个非正交基

以图 7 (a) 为例，两个基底向量 c_1 、 c_2 为

$$c_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (19)$$

c_1 、 c_2 向量内积不为 0，两者非正交。

让我们计算向量 $a = [3, 4]^T$ 在图 7 (a) 中的坐标 (y_1, y_2) 。

向量 $a = [3, 4]^T$ 可以写成

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (20)$$

容易计算得到

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

也就是说，向量 a 在这个**非正交基**的坐标为 (1, 1)，这和我们在图 7 (a) 观察到的结果一致。

RGB 空间中的非正交基

e_1 ([1, 0, 0]^T red)、 e_2 ([0, 1, 0]^T green) 和 e_3 ([0, 0, 1]^T blue) 这三个基底向量任意两个组合构造三个向量 a_1 ([0, 1, 1]^T cyan)、 a_2 ([1, 0, 1]^T magenta) 和 a_3 ([1, 1, 0]^T yellow)：

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

如图 8 所示， \mathbf{a}_1 相当于 \mathbf{e}_2 和 \mathbf{e}_3 的线性组合， \mathbf{a}_2 相当于 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_3 的线性组合， \mathbf{a}_3 相当于 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_2 的线性组合。

\mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 和 \mathbf{a}_3 线性无关，因此 $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$ 也可以是构造三维彩色空间的基底！

印刷四分色模式 (CMYK color model) 就是基于基底 $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$ 。CMYK 四个字母分别指的是 **青色** (cyan)、**品红** (magenta)、**黄色** (yellow) 和 **黑色** (black)。本节，我们只考虑三个彩色，即青色、品红和黄色。

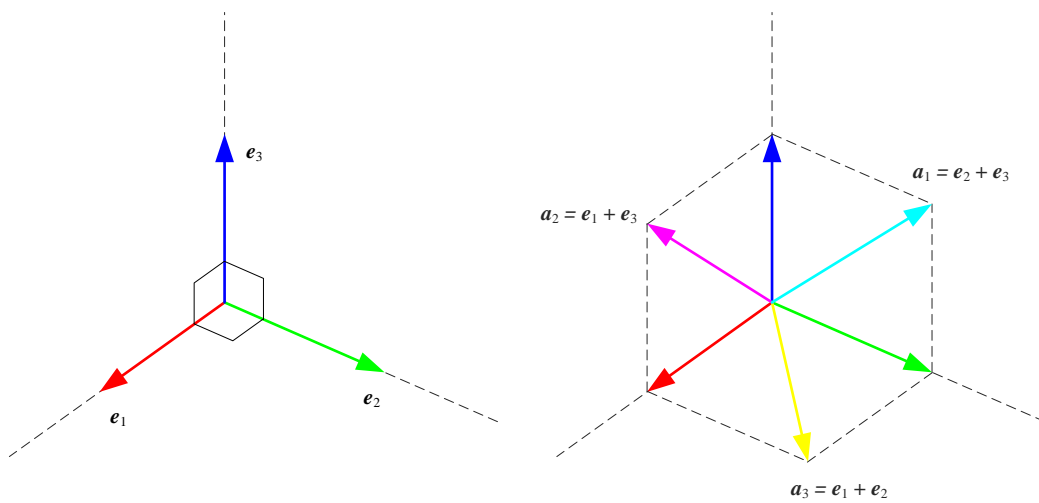


图 8. 正交基底到非正交基底

\mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 、 \mathbf{a}_3 并非两两正交。经过计算可以发现 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 、 \mathbf{a}_3 两两夹角均为 60°

$$\begin{aligned} \cos \theta_{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2} &= \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1\| \|\mathbf{a}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \cos \theta_{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3} &= \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3}{\|\mathbf{a}_1\| \|\mathbf{a}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \cos \theta_{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3} &= \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3}{\|\mathbf{a}_2\| \|\mathbf{a}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (23)$$

也就是说， $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$ 为非正交基底。

白光向量在 $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$ 中的坐标为 (y_1, y_2, y_3) ，满足如下矩阵乘法

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

为了求白色向量在 $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$ 基底中的坐标，我们仅需要完成如下运算

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad (25)$$

RGB 空间中非正交基有无数组。任意给定三个颜色向量，只要它们不共面（线性无关），就可以撑起整个 RGB 颜色空间。

基底转换

简单来说，**基底转换** (change of basis) 是同一向量在不同基底间的坐标变换。

假设一个 p 维向量空间 V 中有两组基底， $U = [u_1, u_2, \dots, u_p]$ 和 $W = [w_1, w_2, \dots, w_p]$ 。这说明 U 、 W 均可逆。

空间 V 中任意向量 v 在 U 、 W 这两个基底对应的坐标分别是 x 和 y ，即

$$\begin{aligned} v &= x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_p u_p = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = Ux \\ v &= y_1 w_1 + y_2 w_2 + \dots + y_p w_p = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = Wy \end{aligned} \quad (26)$$

而 Ux 、 Wy 都是向量 v 在标准正交基的坐标，显然两者相等。联立上述两个等式，得到

$$Ux = Wy \quad (27)$$

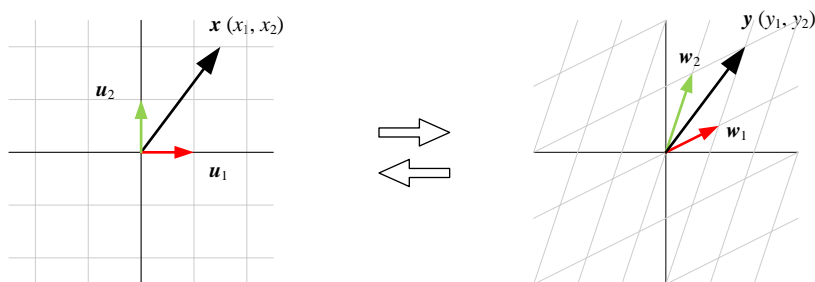


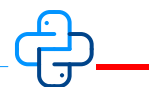
图 9. 基底转换

如果已知 v 在基底 U 的坐标 x ，求其在 W 坐标 y ，可以通过下式

$$y = W^{-1}Ux \quad (28)$$

反过来，如果已知 v 在基底 W 的坐标 y ，求其在 U 坐标 x ，可以通过下式

$$x = U^{-1}Wy \quad (29)$$



LA_06_03_03.ipynb 展示如何编程完成基底转换，请大家自学。

RGB ↔ CMY

下面我们还是用色卡做例子展开讲解基底转换。

RGB 色卡中， $[e_1, e_2, e_3]$ 是色彩空间的标准正交基。CMY 色卡中， $[a_1, a_2, a_3]$ 是色彩空间的非正交基。我们可以用基底转换完成 RGB 模式向 CMY 模式转换。

下图所示为基底 $[e_1, e_2, e_3]$ 和基底 $[a_1, a_2, a_3]$ 之间相互转换关系。

⚠ 注意，在印刷领域，真实的 RGB 和 CMYK 之间的转换要比上述转换复杂的多。

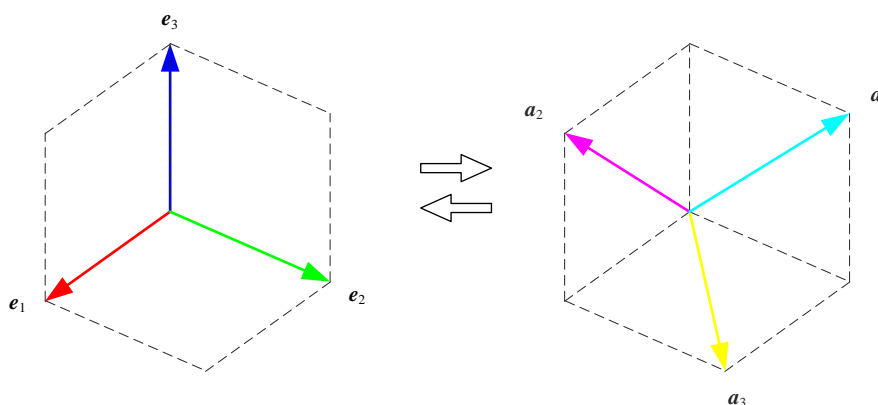


图 10. 基底 $[e_1, e_2, e_3]$ 和基底 $[v_1, v_2, v_3]$ 相互转换

“纯红色”在基底 $[a_1, a_2, a_3]$ 的坐标 y 可以通过求解下列线性方程组得到：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = I_{3 \times 3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

然后计算

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad (31)$$

得到“纯红色”在基底 $[a_1, a_2, a_3]$ 的坐标为 $(-0.5, 0.5, 0.5)$ 。



请大家自己计算绿色、蓝色、白色、青色、品红、黄色在基底 $[a_1, a_2, a_3]$ 中的坐标。



请大家用 DeepSeek/ChatGPT 等工具完成本节如下习题。

Q1. 请判断下列哪些向量组可以作为二维平面的基底。

▶ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

Q1. 请判断下列哪些为二维平面正交基。

▶ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Q3. 请判断下列哪些向量组可以作为三维空间的基底。

▶ $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Q4. 向量 $\mathbf{a} = [3, 4]^T$ 在如下不同基底中的坐标如何？

▶ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

Q5. 计算红色、绿色、蓝色在 CMY 中坐标。