

|        |   |
|--------|---|
| 作者     | 生姜 DrGinger   |
| 脚本     | 生姜 DrGinger   |
| 视频     | 崔崔 CuiCui   |
| 开源学习资源 | <a href="https://github.com/Visualize-ML">https://github.com/Visualize-ML</a>   |
| 平台     | <a href="https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang">https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang</a><br><a href="https://space.bilibili.com/3546865719052873">https://space.bilibili.com/3546865719052873</a><br><a href="https://space.bilibili.com/513194466">https://space.bilibili.com/513194466</a> |

# 06 Vector Space 向量空间

笛卡尔坐标系的自然延伸

## 6.1 向量空间



### 本节你将掌握的核心技能：

- ▶ 向量空间由向量加法和标量乘法构成，满足 8 条基本公理。
- ▶ 线性组合：向量加权求和。
- ▶ 线性相关：一组向量中存在至少一个向量可以被其余向量线性表示，反之为线性无关。
- ▶ 张成：线性组合生成空间。
- ▶ 最大线性无关组：从一个向量组中挑出最多个彼此线性无关的向量所组成的子集。
- ▶ 秩：最大线性无关组的向量数。
- ▶ 基底：一组线性无关的向量，它们的线性组合可以唯一地表示向量空间中任意向量。
- ▶ 向量空间维数：空间基底中向量数量。
- ▶ 等价：方阵满秩、方阵可逆、方阵列向量线性无关、方阵行向量线性无关、行列式非零。
- ▶ 向量空间平移后得到仿射空间，原点不再是其一部分。

本章前文已经见缝插针地讲解向量空间的各种常见概念。本章则是向量空间的专题。

向量空间是笛卡尔坐标系的自然扩展。本节通过二维和三维直角坐标系的示例，展示了向量如何构成空间的“骨架”。向量空间的定义依赖于加法和标量乘法的封闭性，并满足一系列公理，如交换律、结合律、单位元和逆元的存在性等。这些公理确保了向量空间的代数结构稳定，为线性代数奠定基础。本

节还回顾了线性组合、线性相关、线性无关等概念，并进一步介绍秩、最大线性无关组、基底、空间维数、仿射空间。

## 从笛卡尔坐标系说起

**向量空间** (vector space) 是笛卡尔坐标系的自然延伸。

图 1 给出二维、三维直角坐标系，在向量空间中，它俩就是最基本的欧几里得向量空间  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ )。

⚠ 请大家注意，图 1 两个子图中  $e_1$ 、 $e_2$  维数(分量数量)并不相同。图 1 (a) 中  $e_1$ 、 $e_2$  为二维；图 1 (b) 中  $e_1$ 、 $e_2$  为三维。

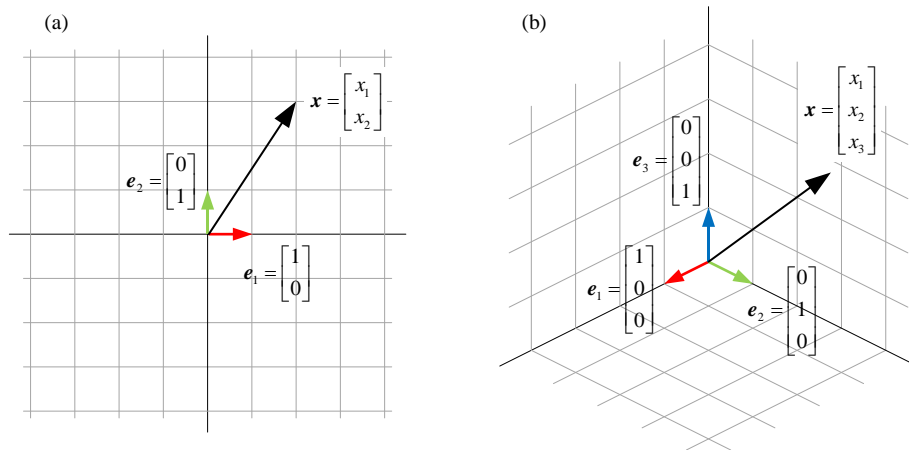


图 1. 二维和三维直角坐标系

在图 1 这两个向量空间中，我们可以完成向量加减、标量乘法等一系列运算。

$\mathbb{R}^2$  上，任意向量  $x$  可以写成，

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 \quad (1)$$

上式中既有向量标量乘法，也有向量加法运算。

如图 1 (a) 所示，在  $\mathbb{R}^2$  上，当  $x_1$ 、 $x_2$  取任意实数时，向量  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  覆盖整个平面。

而二维列向量  $e_1$ 、 $e_2$  就像“骨架”一样撑起了这个平面。显然， $e_1$ 、 $e_2$  这两个骨架正交。

类似地， $\mathbb{R}^3$  中，任意向量  $x$  可以写成，

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \quad (2)$$

如图 1 (b) 所示，在  $\mathbb{R}^3$  中，当  $x_1, x_2, x_3$  取任意实数时， $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  无死角地扩展到整个空间。而三维列向量  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  就像“骨架”一样撑起了这个平面。显然， $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  这三个骨架两两正交。

## 向量空间

我们下面看一下向量空间的确切定义。

给定域  $F$ ， $F$  上的向量空间  $V$  是一个集合。集合  $V$  非空，且对于加法和标量乘法运算封闭。这意味着，对于  $V$  中的每一对元素  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$ ，可以唯一对应  $V$  中的一个元素  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ；而且，对于  $V$  中的每一个元素  $\mathbf{a}$  和任意一个标量  $k$ ，可以唯一对应  $V$  中元素  $k\mathbf{a}$ 。

如果  $V$  连同上述加法运算、标量乘法运算满足如下公理，则称  $V$  为向量空间。

**⚠ 注意**，向量空间的定义包含一系列公理，其目的是确保向量空间具有严格的代数结构，从而为线性代数的各种运算和理论提供坚实的基础。这些公理不需要死记硬背！大家权当回顾一下本书第一章有关向量的常见运算就好。

前 4 条都是向量加减法相关的公理。

### 公理 1：向量加法交换律 (commutativity of vector addition)

对于  $V$  中任何  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$ ，满足：

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad (3)$$

如图 2 所示，RGB 颜色空间中，红色、蓝色结合得到品红色。无论是“红 + 蓝”，还是“蓝 + 红”，最终的颜色都是品红色：

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \text{Red} \quad \text{Blue} \quad \text{Blue} \quad \text{Red} \end{array} \quad (4)$$
  

(a)

(b)

图 2. 向量加法交换律

### 公理 2：向量加法结合律 (associativity of vector addition)

对于  $V$  中任何  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  和  $\mathbf{c}$ ，满足：

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

$$(a+b)+c=a+(b+c) \quad (5)$$

RGB 颜色空间中，红色、绿色先结合得到黄色，再和蓝色相加，得到白色：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

如果我们先混绿色、蓝色得到青色，再加红色，结果也是一样的：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

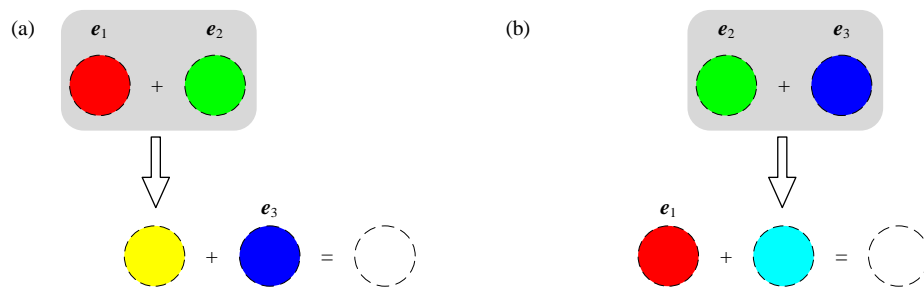


图 3. 向量加法结合律

### 公理 3: 向量加法单位元 (additive identity)

$V$  中存在零向量  $\mathbf{0}$ ，使得对于任意  $V$  中元素  $a$ ，下式成立：

$$a + \mathbf{0} = a \quad (8)$$

这个零向量  $\mathbf{0}$  就是向量加法单位元，也叫向量加法恒等元。

RGB 颜色中，零向量  $\mathbf{0}$  可以看作黑色。对于任何颜色，比如蓝色加上黑色 (无光) 不会改变颜色

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

如图 4 所示，从几何角度来看，颜色向量和零向量  $\mathbf{0}$  相加，相当于颜色向量的起点放置到原点。

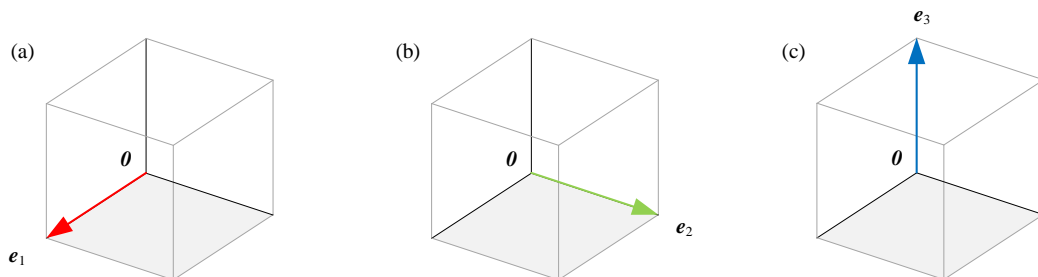


图 4. 颜色向量和零向量  $\mathbf{0}$  相加

**公理 4：存在向量加法逆元** (existence of additive inverse)

对于每一个  $V$  中元素  $a$ ，选在  $V$  中的另外一个元素  $-a$ ，满足：

$$a + (-a) = 0 \quad (10)$$

在 RGB 颜色中，不可能存在真正的颜色相反数，因为 RGB 颜色各个分量的取值范围是  $[0, 1]$ ，负数的颜色没有实际意义。但是，我们可以把负向量看作去掉颜色。比如，红光去掉红光本身，就是黑色（零向量  $0$ ）。

下面 4 条为标量乘法相关的公理。

**公理 5：数乘对向量加法的分配律** (distributivity of vector sum)

对于任意标量  $k$ ， $V$  中元素  $a$  和  $b$  满足：

$$k(a + b) = ka + kb \quad (11)$$

$k$  可以取到任意实数，RGB 颜色空间显然不满足。这也说明 RGB 颜色空间不是真正意义上的向量空间；但是，这不妨碍我们利用 RGB 来直观理解向量空间的关键概念。

RGB 颜色，如果你增加某种“复合”颜色的亮度 ( $\times 0.5$ )，可以先混合颜色再调整亮度，也可以分别调整亮度后再相加，结果一样。

如图 5 (a) 所示，先混合，再调整亮度

$$0.5 \times \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 0.5 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad (12)$$

如图 5 (b) 所示，分别调整亮度，再混合

$$0.5 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.5 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad (13)$$

比较图 5 (a)、图 5 (b)，我们发现这两条路径最终得到相同的颜色向量。

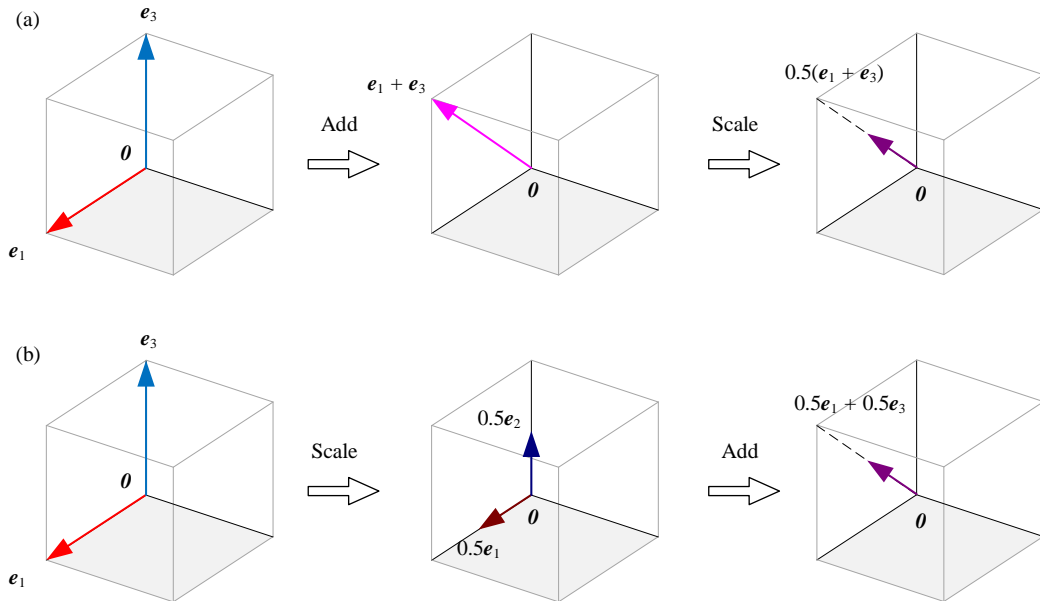


图 5. 数乘对向量加法的分配律

**公理 6：数乘对标量加法的分配律** (distributivity of scalar sum)

对于任意标量  $k$  和  $t$ ，以及  $V$  中任意元素  $a$ ，满足：

$$(k+t)a = ka + ta \quad (14)$$

假设我们有一个橙色，我们想让它强度变为 0.5。我们可以分两次调整，第一次 0.3，第二次 0.2 倍；有两种方法。

方法 1：先求总亮度变化系数

$$(0.3+0.2) \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.5 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

方法 2：分别调整再相加

$$0.3 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.2 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.15 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

**公理 7：数乘结合律** (associativity of scalar multiplication)

对于任意标量  $k$  和  $t$ ，以及  $V$  中任意元素  $a$ ，满足：

$$(kt)a = k(ta) \quad (17)$$

对于青色，如果我们先将它强度缩小 0.2 倍，再缩小 0.5 倍，可以有两种方法。

方法 1：直接计算最终亮度变化系数

$$(0.2 \times 0.5) \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.1 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

方法 2：分步调整

$$0.2 \times \left( 0.5 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 0.2 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

### 公理 8：标量乘法的单位元 (scalar multiplication identity)

$V$  中任意元素  $a$ ，满足：

$$1 \cdot a = a \quad (20)$$

无论是什么颜色向量，乘以 1 都不会改变颜色

$$1 \times \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.9 \end{bmatrix} \quad (21)$$

这 8 个公理确保了向量加法和标量乘法的良好性质，使得线性代数的基本概念可以在任意向量空间中使用。

## 线性组合

相信大家已经对线性组合不陌生了。简单来说，如图 6 所示，给定一组向量  $a_1, a_2, \dots, a_p$  和一组标量 (权重)  $k_1, k_2, \dots, k_p$ ，它们的线性组合定义为：

$$b = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_p a_p \quad (22)$$

其中， $b$  为新生成的向量。

当然，上式能够成立的前提是  $a_1, a_2, \dots, a_p$  维度相同，即有相同的分量数。

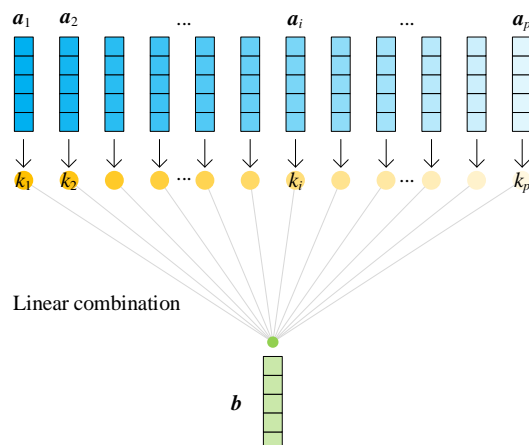


图 6. 列向量的线性组合

## 线性相关、线性无关

给定向量组  $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p]$ ，如果存在不全为零  $k_1, k_2, \dots, k_D$  使得下式成立。

$$k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2 + k_3 \mathbf{a}_3 + \dots + k_D \mathbf{a}_D = \mathbf{0} \quad (23)$$

则称向量组  $A$  **线性相关** (linear dependence, 形容词组为 linearly dependent); 否则,  $A$  **线性无关** (linear independence, 形容词为 linearly independent)。

让我们展开讲解上式。

**线性无关**是指一组向量中没有任何一个向量可以表示为其他向量的线性组合，即这些向量在方向上彼此独立，无法被替代。

线性相关则相反，一组向量中有不止一个向量可以用剩余向量表示。

再让我们回到 RGB 颜色空间，从几何角度解释线性相关、线性无关。

图 7 (a) 中向量组  $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2]$  显然线性相关，因为可以表示  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  为  $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$  两者之和。换个角度来看， $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  在  $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$  张成的平面内。

再换个角度， $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2]$  删除任意一个向量都还能张成“红绿”平面。比如，删除黄色向量，红色、绿色向量可以撑起“红绿”平面；删除绿色向量，红色、黄色向量也同样撑起“红绿”平面。

类似地，图 7 (b)、(c) 两组向量组也线性相关，请大家自行分析。

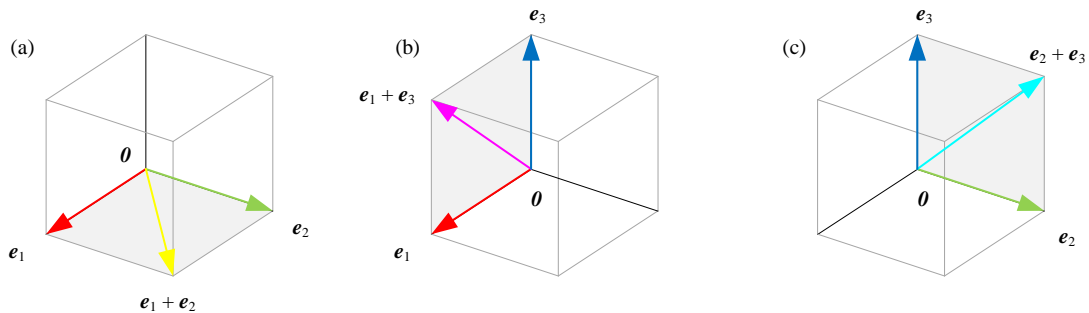


图 7. RGB 颜色空间中，线性相关的颜色向量组，三个向量构成的向量组

图 8 所示三组向量组也都线性相关。

**?** 请大家思考图 8 的每个子图删除哪些向量会让剩余向量线性无关，删除的向量选择是否唯一。



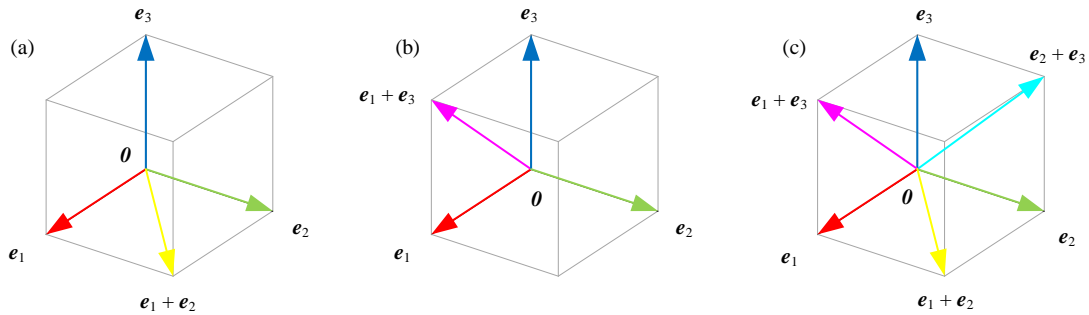


图 8. RGB 颜色空间中，线性相关的颜色向量组，超过三个向量构成的向量组

图 9 展示的三组颜色向量组均线性无关。举个例子，如图 9 (a) 所示， $e_1 + e_2$ 、 $e_1$  都有各自特殊的方向贡献，不能相互表达；即便两者不正交。请大家自行分析图 9 剩余两个子图。

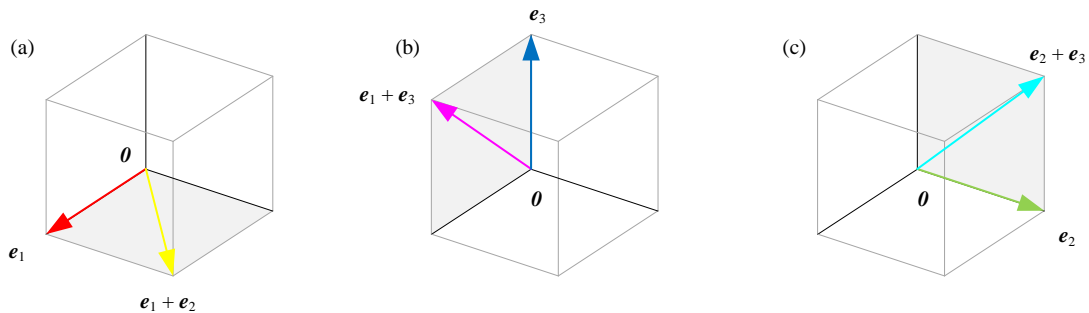


图 9. RGB 颜色空间中，线性无关的颜色向量组，两个向量构成的向量组

图 10 展示的三组向量组均线性无关。

图 10 也告诉我们一个三维空间最少需要三根“骨架”来撑起；三个“骨架”未必需要两两正交。这实际上引出了基、正交基、非正交基这几个概念，这是本章后续要讲解的内容。

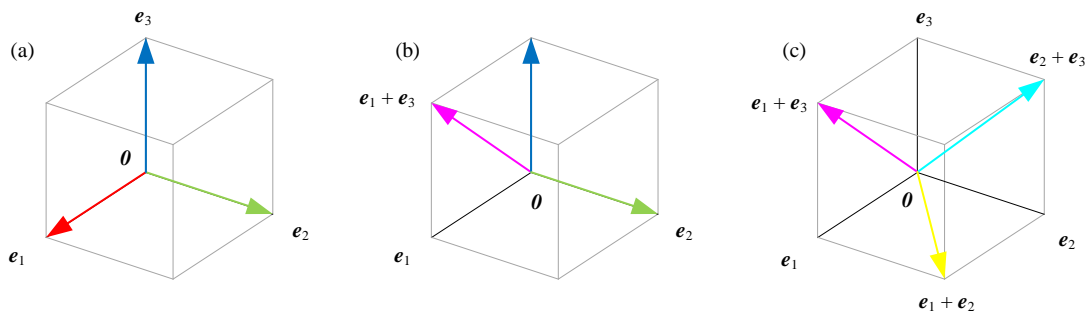


图 10. RGB 颜色空间中，线性相关的颜色向量组，三个向量构成的向量组

张成

$a_1, a_2, \dots, a_p$  所有线性组合的集合称作  $a_1, a_2, \dots, a_p$  的**张成** (span), 记做  $\text{span}(a_1, a_2, \dots, a_p)$ 。

⚠ 注意, 对于张成, 向量组线性相关、线性无关都可以。

还是用 RGB 颜色空间作为例子。

图 11 中的六组向量组都张成了“红绿”平面。

图 11 (a)、(b)、(c) 这三组向量本身都是线性无关。

而图 11 (d)、(e)、(f) 这三组向量本身都是线性相关。

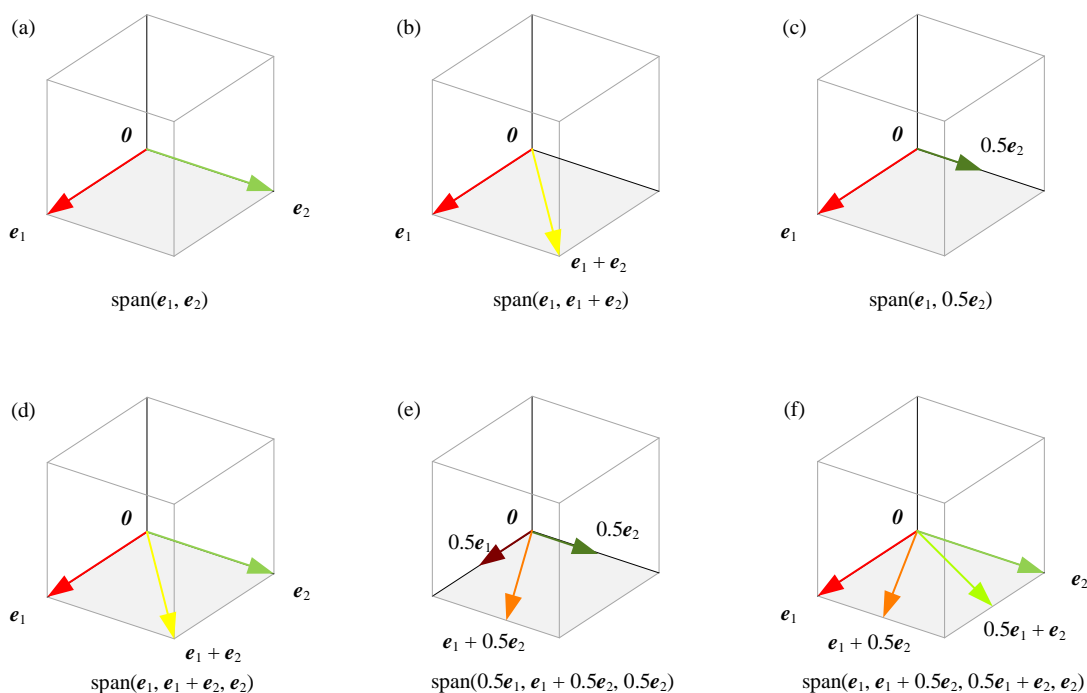


图 11. 张成“红绿”平面的不同向量组

## 极大无关组、秩

矩阵  $A$  的**列秩** (column rank) 是  $A$  的线性无关的列向量数量最大值。类似地, **行秩** (row rank) 是  $A$  的线性无关的行向量数量最大值。

矩阵的列秩、行秩总是相等, 因此就叫它们为矩阵  $A$  的**秩** (rank), 记做  $\text{rank}(A)$ 。

如果矩阵  $A$  中列向量线性相关, 就总可以找出一个冗余向量, 把它剔除。如此往复, 不断剔除冗余向量, 直到不再有冗余向量为止, 得到一组向量线性无关。则称这组向量为  $A$  的**极大线性无关组** (maximal linearly independent subset)。

⚠ 注意, 极大线性无关组不唯一。

极大线性无关组的元素数量为矩阵的**秩**。

以图 7 (a) 向量组  $[e_1, e_2, e_1 + e_2]$  为例，我们可以删除冗余向量得到如图 12 所示的三个**极大线性无关组**。每个**极大线性无关组**都只有两个向量。

也就是说，对于如下矩阵

$$[e_1 \quad e_2 \quad e_1 + e_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

它的列秩为 2；显然，这个矩阵的行秩也是 2 (它有一行全 0 行向量)。

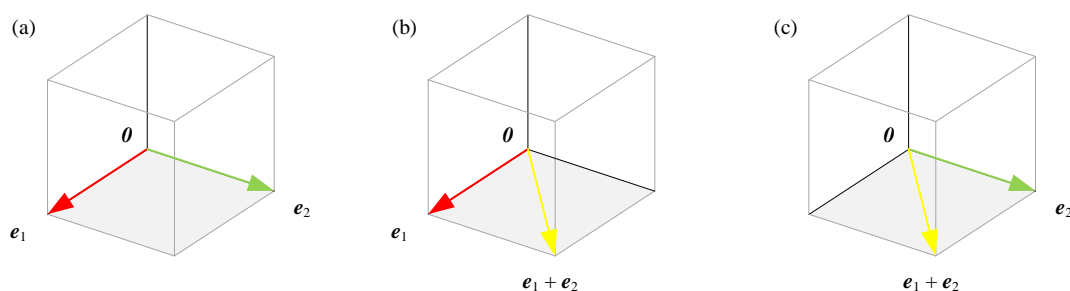


图 12. 删除图 7 (a) 冗余向量，获得极大线性无关组

图 8 (c) 删除若干向量可以得到如图 13 所示的**极大线性无关组**。也就是说，图 13 每个子图中的向量组都可以撑起 (张成) 整个 RGB 颜色空间。

**?** 请大家思考图 8 (c) 还有哪些极大线性无关组？请把它们画出来。

特别地，若矩阵  $A$  的列数为  $p$ ，当  $\text{rank}(A) = p$  时，矩阵  $A$  列满秩，列向量  $a_1, a_2, \dots, a_p$  线性无关。

**⚠** 请大家注意，仅当方阵  $A_{p \times p}$  满秩，即  $\text{rank}(A) = p$ ， $A$  可逆。

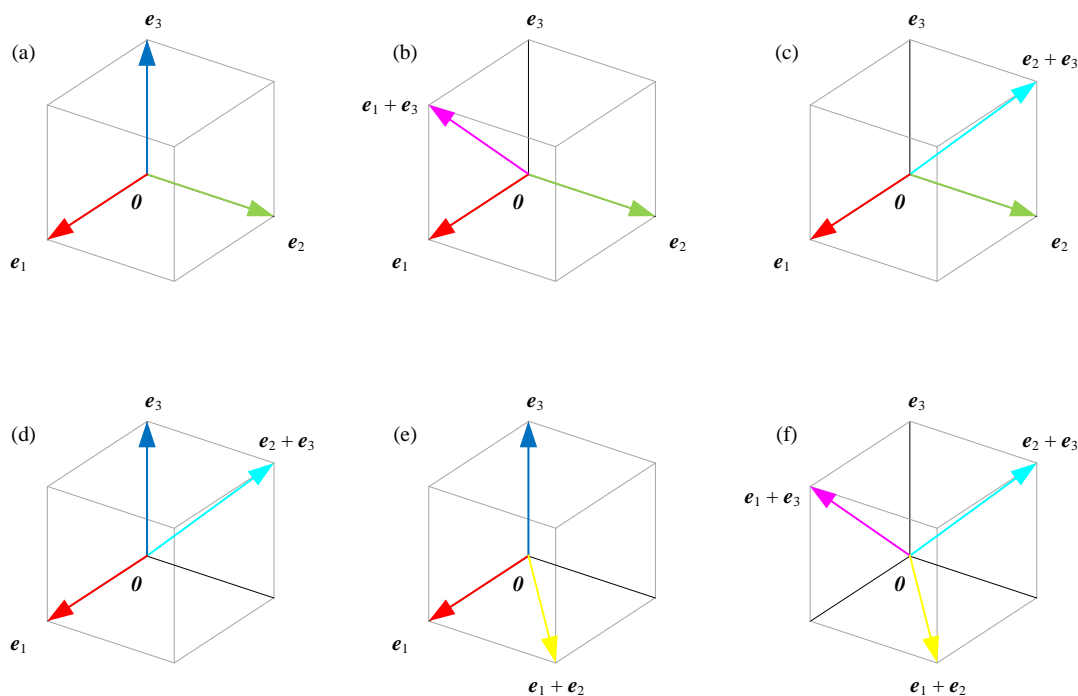



图 13. 删除图 8 (c) 冗余向量, 获得极大线性无关组

代码 1 计算矩阵的秩。a 定义了三个列向量 (二维数组)。

b 使用 `np.column_stack()` 函数, 将 `e_1`、`e_2` 和 `e_3` 作为列向量拼接成一个矩阵 `A`。然后, 使用了 `np.linalg.matrix_rank()` 计算矩阵 `A` 的秩。

代码 1. 计算秩 |  Bk1\_Ch06\_01\_01.ipynb

```
## 初始化
import numpy as np

## 定义列向量
a [ e_1 = np.array([[1],[0],[0]])
    e_2 = np.array([[0],[1],[0]])
    e_3 = np.array([[0],[0],[1]])

## 计算秩
b [ A = np.column_stack([e_1, e_2, e_3])
    np.linalg.matrix_rank(A)

    B = np.column_stack([e_1, e_2, e_1 + e_2])
    np.linalg.matrix_rank(B)

    C = np.column_stack([e_1, e_2])
    np.linalg.matrix_rank(C)

    D = np.column_stack([e_1, -e_1, e_1/2])
    np.linalg.matrix_rank(D)
```

## 基底、基底向量

**基底** (vector basis 或 basis) 是某个向量空间中的一组**线性无关**向量，它们能够“撑起”整个空间。

一个向量空间  $V$  的**基底向量** (basis vector) 指  $V$  中线性无关的  $a_1, a_2, \dots, a_p$ ，它们**张成** (span) 向量空间  $V$ ，即  $V = \text{span}(a_1, a_2, \dots, a_p)$ 。

而  $[a_1, a_2, \dots, a_p]$  叫做  $V$  的**基底**。向量空间  $V$  中的每一个向量都可以唯一地表示成基底  $[a_1, a_2, \dots, a_p]$  中基底向量的线性组合。

白话说，基底就像是地图上的经度和纬度，起到定位作用。有了经纬度之后，地面上的任意一点都有唯一坐标。

⚠ 注意张成不要求向量组线性无关；但是，构成基底的向量组则必须线性无关。

$[e_1, e_2]$  就是平面  $\mathbb{R}^2$  一组“最自然”的基底，平面  $\mathbb{R}^2$  上每一个向量  $x$  都可以唯一地表达成  $x_1 e_1 + x_2 e_2$ 。而  $(x_1, x_2)$  就是  $x$  在基底  $[e_1, e_2]$  下的坐标。

⚠ 注意区别  $\{e_1, e_2\}$  和  $[e_1, e_2]$ 。本书会用  $[e_1, e_2]$  表达有序基，也就是向量基底元素按“先  $e_1$  后  $e_2$ ”顺序排列。而  $\{e_1, e_2\}$  代表集合，集合中基底向量不存在顺序。此外，有序基  $[e_1, e_2]$  构造得到单位矩阵。不做特殊说明，本书中基底都默认是有序基。

基底  $[e_1, e_2]$  就是  $2 \times 2$  单位阵

$$[e_1 \ e_2] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{2 \times 2} \quad (25)$$

而基底  $[e_1, e_2, e_3]$  就是  $3 \times 3$  单位阵

$$[e_1 \ e_2 \ e_3] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{3 \times 3} \quad (26)$$

这就是为什么我们管  $[e_1, e_2]$ 、 $[e_1, e_2, e_3]$  叫**标准正交基** (standard basis, natural basis)，因为它们是张成  $\mathbb{R}^2$ 、 $\mathbb{R}^3$  最“自然”的骨架。然而，张成  $\mathbb{R}^2$ 、 $\mathbb{R}^3$  的基底有无数组。

## 维数

向量空间的**维数** (dimension) 是基底中基底向量的个数，表示空间的“大小”；本书采用的维数记号为  $\dim()$ 。

图 1 (a) 中  $\mathbb{R}^2 = \text{span}(e_1, e_2)$ ，即  $\mathbb{R}^2$  维数  $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ ，而  $[e_1, e_2]$  的秩也是 2。

图 1 (b) 中  $\mathbb{R}^3 = \text{span}(e_1, e_2, e_3)$ ，即  $\mathbb{R}^3$  维数  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ ， $[e_1, e_2, e_3]$  的秩为 3。

下面，为了理解维数这个概念，我们多看几组例子。

图 14 所示为 6 个维数为 1 的向量空间。从几何角度来看，这些向量空间都是直线。请大家特别注意，这些直线都经过原点  $0$ 。也就是说  $0$  分别在这些向量空间中。

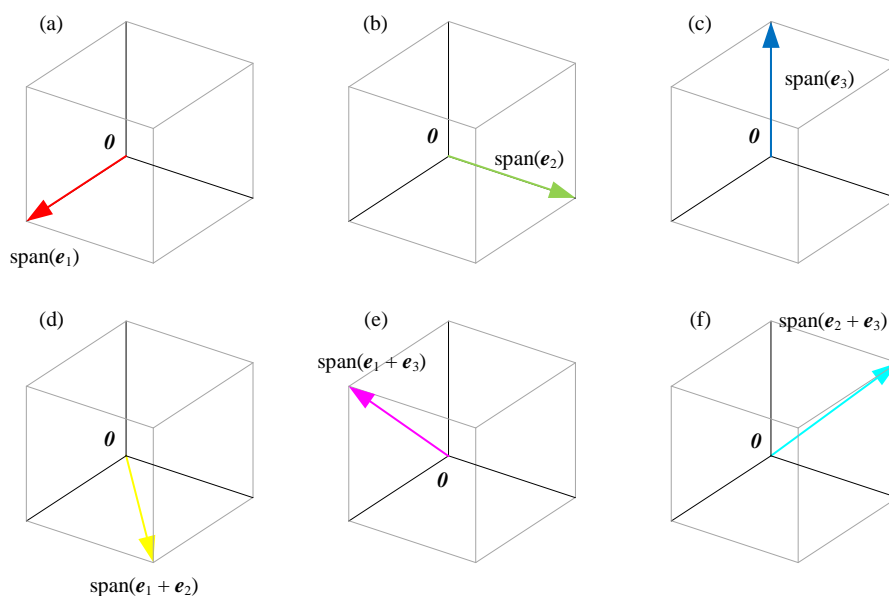


图 14. 维数为 1 的向量空间

图 15 所示为线性无关的向量张起的维数为 2 的向量空间。也就是说，图 15 每幅子图中的两个向量分别是该空间的基底向量。再次强调，基底中的基底向量必须线性无关。

从集合角度来看， $\text{span}(e_1) \subset \text{span}(e_1, e_2)$ ， $\text{span}(e_2) \subset \text{span}(e_1, e_2)$ 。

也就是说， $\text{span}(e_1)$  是  $\text{span}(e_1, e_2)$  的子空间。简单来说，向量空间的**子空间** (subspace) 是指该向量空间中的一个非空子集，对向量加法和数乘运算封闭，并包含零向量。

⚠ 注意， $\mathbb{R}^2$  不是  $\mathbb{R}^3$  的子空间；这是因为构成  $\mathbb{R}^2$  的  $e_1$ 、 $e_2$  为二维列向量，即  $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ， $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。

而构成  $\mathbb{R}^3$  的  $e_1$ 、 $e_2$ 、 $e_3$  为三维列向量，即  $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ， $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ， $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。零向量  $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  在中  $\mathbb{R}^2$  上，但是不在  $\mathbb{R}^3$  中。

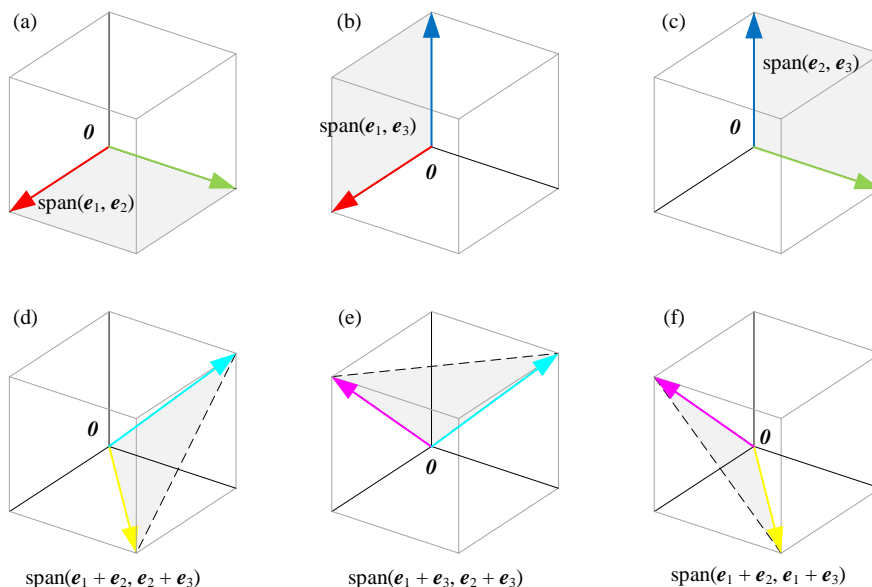


图 15. 维数为 2 的向量空间，张成空间的基底向量线性无关

图 16 所示为线性相关的向量张起的维数为 2 的空间。

举个例子， $\text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$  张起的空间维数为 2，显然  $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2]$  中向量线性相关，因此  $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2]$  不能叫做基底。进一步分析可以知道  $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2]$  的秩为 2。

基底中的基底向量必须线性无关。剔除掉冗余向量后， $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ 、 $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2]$ 、 $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2]$  三组中的任意一组向量都线性无关，因此它们三者都可以选做  $\text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$  空间的基底。

不同的是， $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$  中基底向量正交，但是  $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2]$ 、 $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2]$  这两个基底中的向量并非正交。也就是构成向量空间的基底向量可以正交，也可以非正交，这是下文马上要探讨的内容。

相信大家已经很清楚，基底中的向量之间必须线性无关，而用  $\text{span}()$  张成空间的向量可以线性相关，比如  $\text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ 。在基底  $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$  中，任意一点的坐标唯一。但是，在  $\text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$  中，任意一点的坐标不定。

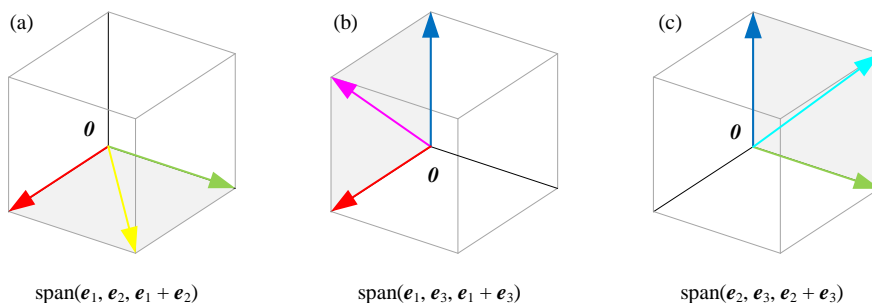


图 16. 维数为 2 的向量空间，张成空间的向量线性相关

图 17 所示为线性无关的向量张起维数为 3 的空间。每一组向量组都是这个向量空间的基底。

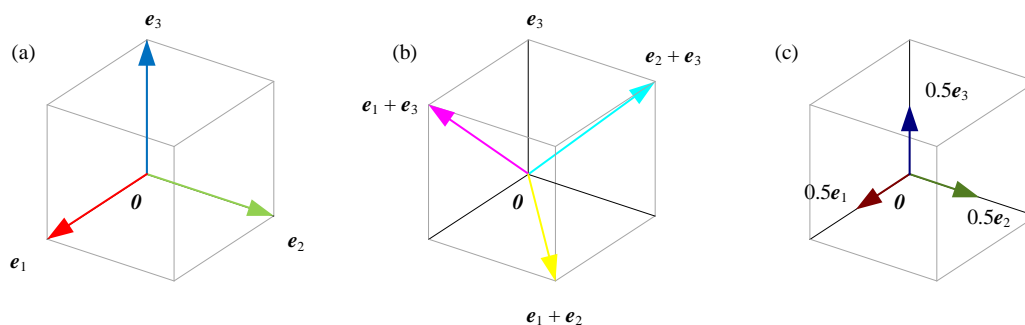


图 17. 维数为 3 的向量空间

## 仿射空间

“过原点”这一点对于向量空间极为重要。图 14 所示的几个一维空间（直线）显然过原点；也就是说，原点  $0$  在向量空间中。几何角度来看，图 15、图 16 所示的维数为 2 的空间是平面，这些平面都过原点。原点  $0$  也在图 17 所示的维数为 3 的空间中。

向量空间平移后得到的空间叫做**仿射空间** (affine space)，如图 18 所示的三个例子。图 18 所示的三个仿射空间显然都不过原点。本书后续会专门介绍**仿射变换** (affine transformation)。

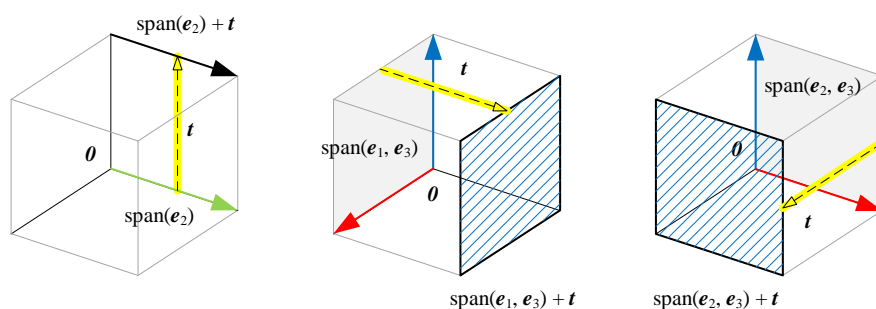


图 18. 向量空间平移得到仿射空间



请大家用 DeepSeek/ChatGPT 等工具完成本节如下习题。

**Q1.** 下面哪些不是基底？

- ▶  $[e_1, e_2]$
- ▶  $[e_1, e_2, e_1 + e_2]$
- ▶  $[e_1, e_2, e_3]$
- ▶  $[e_2, e_3]$
- ▶  $[e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2]$
- ▶  $[0.5e_1, e_2, 0.5e_3]$



**Q2. Q1** 中不是基底的向量组，各自删除哪些向量可以构成基底。

**Q3.** 方阵列向量线性相关、线性无关，和矩阵逆的关系如何？

**Q4.** 方阵列满秩、列不满秩，和矩阵逆的关系如何？

**Q5.** 方阵列向量线性相关、线性无关，和行列式是否为 0 关系如何？