

作者	生姜 DrGinger
脚本	生姜 DrGinger
视频	崔崔 CuiCui
开源学习资源	https://github.com/Visualize-ML
平台	https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang https://space.bilibili.com/3546865719052873 https://space.bilibili.com/513194466

4.3 常见行列式性质



本节你将掌握的核心技能：

- ▶ 方阵列向量共线、共面时面积、体积为 0，说明方阵不可逆。
- ▶ 连乘方阵行列式等于各方阵行列式的乘积。
- ▶ 任意两行或两列互换会使行列式变号。
- ▶ 方阵每行、列同时乘以标量 k ，行列式缩放 k^n 倍。
- ▶ 置换矩阵用于行列交换，是正交矩阵，其行列式为 ± 1 。
- ▶ 方阵转置不改行列式。

有了前两节行列式的几何直觉，理解本节介绍的行列式常见性质就变得直观而自然。接下来，我们通过具体的例子来解释这些性质。

行列式为 0

方阵行列式为 0 有几种情况，下面让我们聊聊。

如下 2×2 矩阵的列向量共线，行列式为 0

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

如图 1 (a) 所示， a_1 、 a_2 在同一条直线上， a_1 、 a_2 撑起的平行四边形面积为 0。

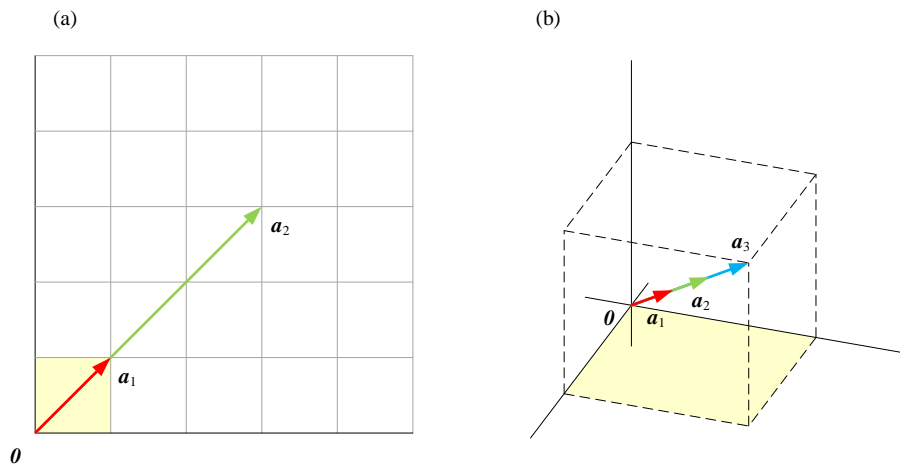


图 1. 矩阵的列向量共线

如下 3×3 矩阵的列向量共线，行列式为 0

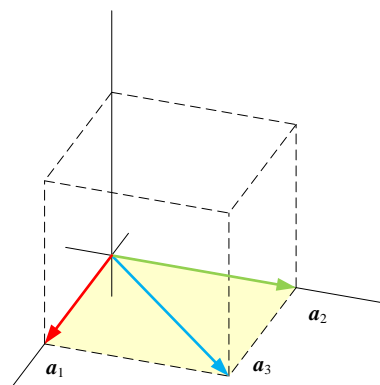
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

如图 1 (b) 所示，在三维空间中，上式矩阵的三个列向量共线，它们无法撑起一个平行六面体，其体积为 0。

如下 3×3 矩阵行列式也为 0

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

如图 2 所示，在三维空间中，上式中矩阵三个列向量共面，也无法撑起一个平行六面体，其体积也为 0。

图 2. 3×3 矩阵的列向量共面

这也告诉我们，如果矩阵存在一行、一列都为 0，行列式为 0。比如

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4)$$

再如

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0 \quad (5)$$

总结来说，当方阵 A 的行列式为 0 时，说明方阵列向量线性相关。

矩阵连乘的行列式

大家已经很清楚，行列式可以看作是面积 (或体积) 的缩放因子。

如果一个方阵 A 将面积 (或体积) 缩放 $\det(A)$ 倍，而另一个方阵 B 将面积 (或体积) 缩放 $\det(B)$ 倍，则总的放大倍数是两者的乘积。

这意味着，矩阵乘积 AB 的行列式等于方阵 A 的行列式乘以方阵 B 的行列式，即

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \quad (6)$$

上式也告诉我们，

$$\det(BA) = \det(B) \cdot \det(A) \cdot \quad (7)$$

这说明，顺序会影响变换结果 ($AB \neq BA$)，虽然面积不改变。

举个例子，给定如下 2×2 方阵 A 、 B

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

方阵 A 的作用是平面绕原点旋转，方阵 B 的作用是“缩放 + 镜像”。

很容易计算的方阵 A 、 B 行列式均为 1，即 $\det(A) = \det(B) = 1$ 。

图 3 所示为矩阵乘法 ABx 对应的几何变换。列向量 x 对应的单位正方形，面积为 1；经过 AB 变换后，面积还是 1。

图 4 对应 BAx 的几何变换；显然，图 3 不同于图 4。但是图 4 最后的几何图形的面积还是 1。

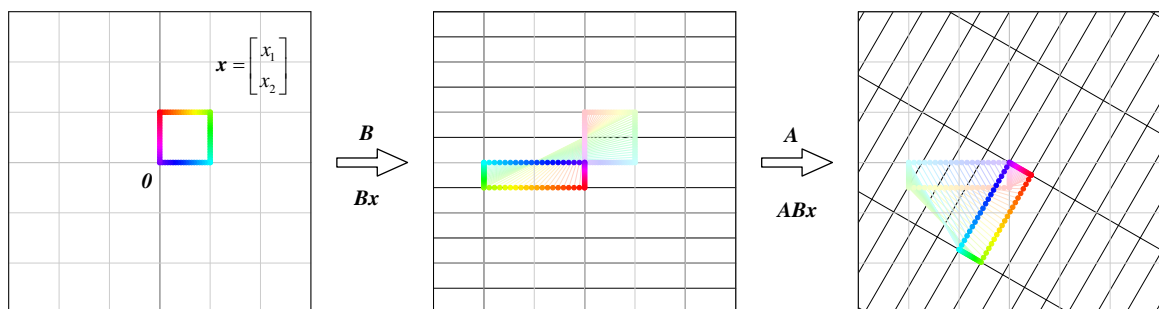
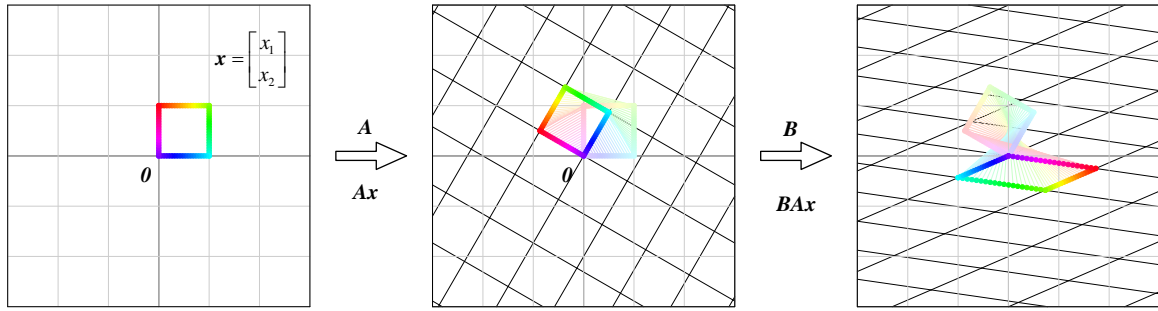


图 3. $ABx = y$ 对应的几何变换

图 4. $BAx = y$ 对应的几何变换

交换两列、行，行列式变号

如果方阵行列式不为 0，交换方阵的任意两列，行列式会变号。交换方阵任意两行，行列式也变号。

这一点利用置换矩阵最容易理解。置换矩阵 (permutation matrix) 是一种特殊的方阵，由单位矩阵的行、列经过置换得到。置换矩阵是正交矩阵。

置换矩阵的元素只包含 0 和 1；矩阵的每一行和每一列都有且仅有一个 1，其余元素均为 0。

举个例子， 2×2 置换矩阵 P

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

对于矩阵 A ， AP 的作用是交换 A 的第 1 列、第 2 列

$$AP = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \quad (10)$$

PA 的作用是交换 A 的第 1 行、第 2 行

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \quad (11)$$

计算方阵 P 的行列式，大家会发现 $\det(P) = -1$ 。

再看两个复杂点的例子。矩阵 A 乘置换矩阵，让 A 的列向量顺序改变。

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,4} & a_{1,2} \\ a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,4} & a_{2,2} \\ a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,4} & a_{3,2} \\ a_{4,3} & a_{4,1} & a_{4,4} & a_{4,2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

同样这个置换矩阵左乘矩阵 A ，改变 A 的行向量的排序

$$\begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \mathbf{a}^{(3)} \\ \mathbf{a}^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(2)} \\ \mathbf{a}^{(4)} \\ \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

矩阵乘标量

对于 $n \times n$ 方阵 A ，标量乘法 kA 的行列式为

$$\det(kA) = k^n \det(A) \quad (14)$$

从几何角度，很容易理解上式。

比如，给定 2×2 矩阵 A ， kA 可以写成

$$kA_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} k & \\ & k \end{bmatrix} A_{2 \times 2} \quad (15)$$

几何上来看，上式告诉我们 k 让几何图形面积缩放 k^2 倍。

比如，图 5 中标量 2 让平面图形的面积放大 4 倍。如图 6 所示，标量 2 让三维几何体的体积放大 8 倍。

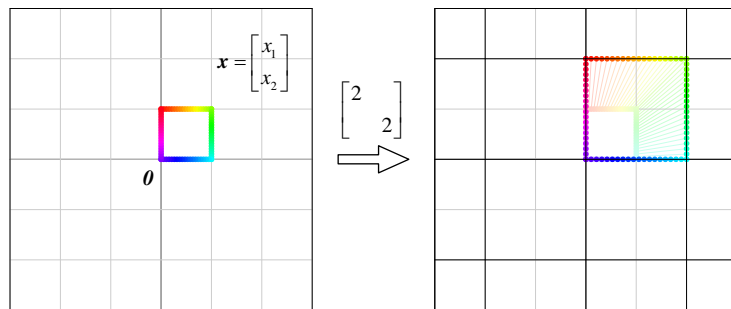


图 5. 给定 2×2 矩阵 A ， $2A$ 中标量 2 对应几何变换

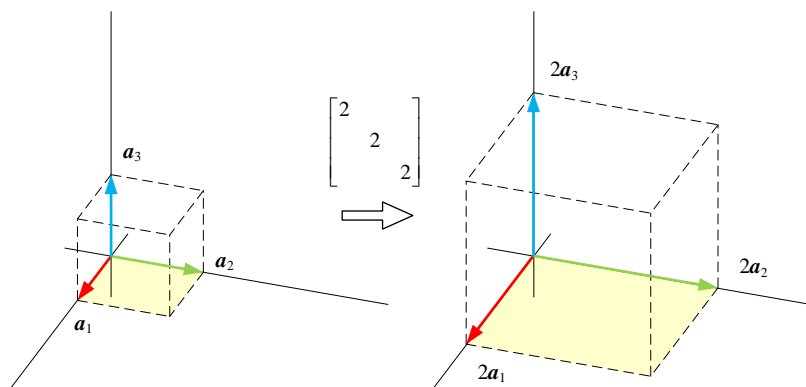


图 6. 给定 3×3 矩阵 A ， $2A$ 中标量 2 对应几何变换

转置行列式值不变

方阵 A 的行列式等于其转置 A^T 的行列式

$$\det(A) = \det(A^T) \quad (16)$$

利用几何视角解释上式需要用到奇异值分解 (Singular Value Decomposition, SVD)。简单来说，奇异值分解把方阵 A 分解成

$$A = USV^T \quad (17)$$

其中， U 为正交矩阵，代表旋转。 U 行列式绝对值为 1。

S 为对角方阵，代表缩放；显然， $S = S^T$ 。

V 为正交矩阵，代表旋转； V^T 也是正交矩阵，也代表旋转。 V 行列式绝对值为 1。

下面看一个例子。给定如下矩阵 A

$$A = \begin{bmatrix} -1.2 & -2.4 \\ 2.4 & -0.2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

计算 A 的行列式得到， $\det(A) = 6$ 。

图 7 所示为矩阵 A 对列向量 x 产生的“一步到位”的几何变换。把矩阵 A 替换为 $USV^T x$ ，我们可以得到分步几何变换，具体如图 8 所示。

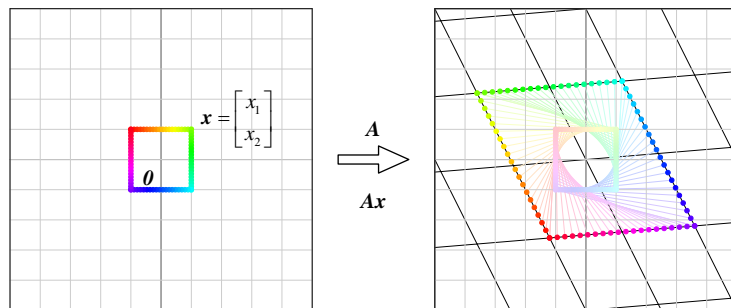
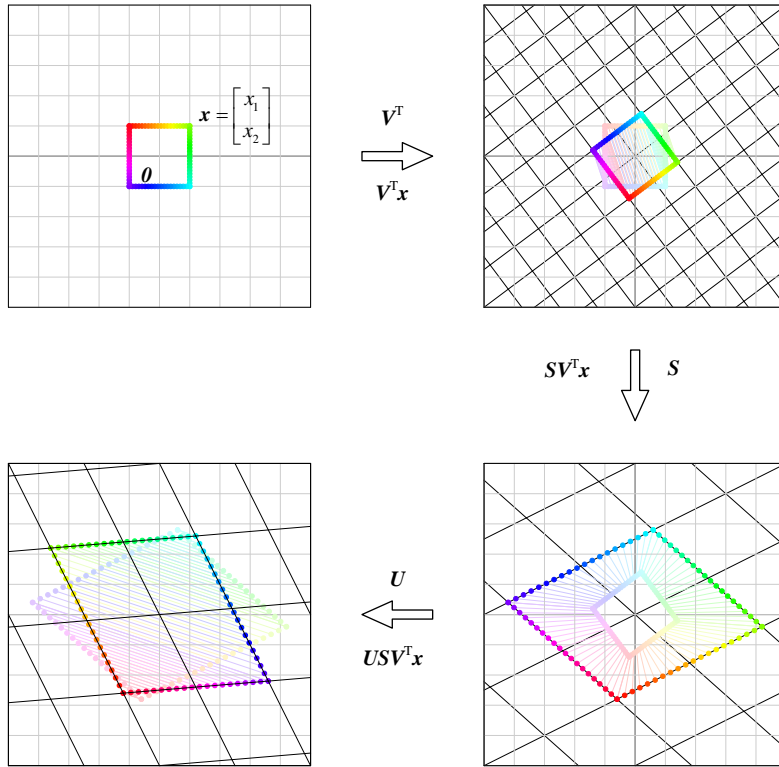


图 7. $Ax = y$ 一步到位的几何变换

图 8. $USV^T x = y$ 分步几何变换

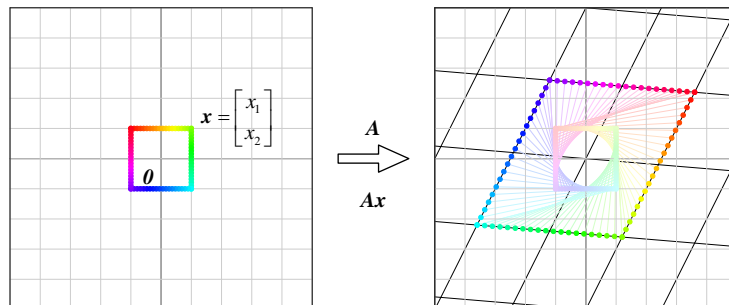
方阵 A 转置则可以写成

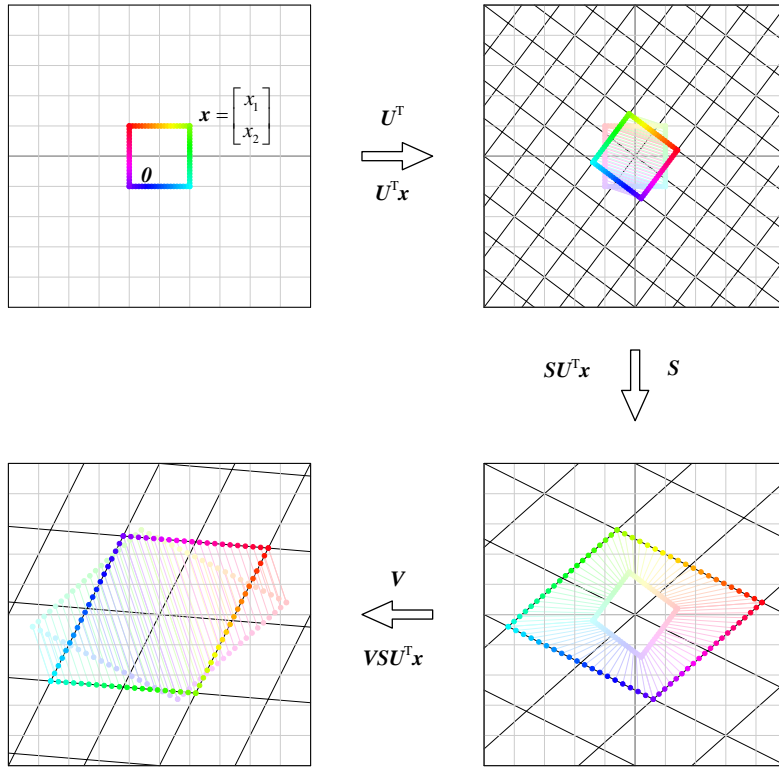
$$(A)^T = (USV^T)^T = VS^T U^T = VSU^T \quad (19)$$

几何角度来看，矩阵 A 中真正影响图形面积、体积的因素来自于对角矩阵 S 。

这便告诉我们 (17) 和 (19) 产生的面积、体积的变化一致。

图 9 所示为矩阵 A^T 对列向量 x 产生的“一步到位”的几何变换。把矩阵 A^T 替换为 VSU^T ，我们可以得到分步几何变换，具体如图 10 所示。

图 9. $A^T x = y$ 一步到位的几何变换

图 10. $VSU^T x = y$ 分步几何变换

这里仅仅需要大家对 SVD 有初步印象，SVD 是本书后续要专门讲解的内容。



请大家用 DeepSeek/ChatGPT 等工具完成本节如下习题。

Q1. 请判断如下行列式是否为 0。

▶ $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Q2. 给定任意 2×2 矩阵 A ，以及如下对角矩阵 D ，请解释 AD 、 DA 发生了怎样几何变换？

▶ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Q3. 给定任意 3×3 矩阵 A ，以及如下置换矩阵 P ，请解释 AP 、 PA 发生了怎样几何变换？

▶ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Q4. 请自学奇异值分解。

Q5. 请学习使用如下 NumPy 函数对 (18) 进行 SVD 分解。

<https://numpy.org/doc/2.2/reference/generated/numpy.linalg.svd.html>