

作者	生姜 DrGinger
脚本	生姜 DrGinger
视频	崔崔 CuiCui
开源学习资源	https://github.com/Visualize-ML
平台	https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang https://space.bilibili.com/3546865719052873 https://space.bilibili.com/513194466

4.2 3×3 矩阵行列式



本节你将掌握的核心技能：

- ▶ 3×3 方阵的行列式表示由列向量构成的平行六面体体积，含正负号。
- ▶ 使用右手法则判断行列式正负，列向量构成右手系则为正，反之为负。
- ▶ 单位矩阵列向量构成单位正方体，体积为 1，行列式为 1。
- ▶ 对角矩阵的行列式等于其对角线元素的乘积，对应正方体或长方体体积。
- ▶ 上、下三角矩阵行列式等于对角线元素乘积，若主对角线元素含 0 则行列式也为 0。
- ▶ 3×3 方阵三列列向量共面或共线（线性相关），无法撑起体积，行列式为 0。
- ▶ 任意两列、行互换会改变右手系方向，行列式取相反数。

上一节聊了 2×2 矩阵行列式，并揭示了其与平行四边形面积之间的关系；本节在此基础上“升维”，让我们看看 3×3 矩阵行列式和平行六面体之间的联系。

在开始之前，让我们再回顾行列式重要的两点：

- 1) 行列式仅适用于方阵；对于非方阵，行列式没有定义，因此在处理非方阵时，不能使用行列式的概念；
- 2) 行列式运算 $\det()$ 是一个映射，它将一个 $n \times n$ 方阵转换为一个标量值；行列式能够反映方阵的某些关键特性，如面积/体积缩放因子、方阵是否可逆等。

上一节和本节的内容安排几乎完全一致，建议大家对照阅读，以便更直观地理解行列式在不同维度下的几何意义。

3×3 矩阵的行列式

给定如下 3×3 矩阵 A

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \quad (1)$$

矩阵 A 的行列式可以通过三个 2×2 行列式加权求和得到，具体为

$$\det(A) = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} \quad (2)$$

进而整理得到

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (3)$$

现在，我们先不去费心劳神理解这个式子的由来，拿来就用就好。怎么得到上述结果是本章最后要介绍的话题。

本节中，我们更关心的是几何视角如何用平行六面体来更好直观理解 3×3 矩阵的行列式。

平行六面体体积

首先将上面这个 3×3 矩阵 A 拆成三个列向量

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix} \quad (4)$$

本书前文介绍过 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 、 \mathbf{a}_3 这三个向量求和时，我们可以构造一个平行六面体，具体如图 1 所示。这里，我们将借用同一几何构造来理解 3×3 矩阵行列式。

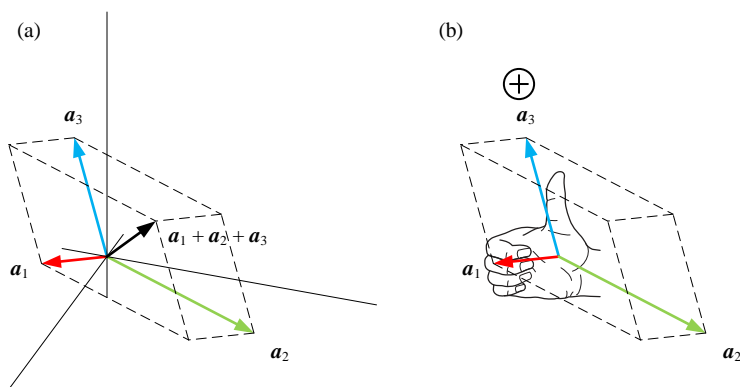


图 1. 平行六面体

在三维空间中，我们可以用右手握拳法则来判断 3×3 矩阵的行列式正负。具体步骤如下：

- 1) 握紧右手，伸出四指，并使四指弯曲；
- 2) 四指的方向代表矩阵 A 的第一列向量 \mathbf{a}_1 ；
- 3) 手心朝向第二列向量 \mathbf{a}_2 ；

4) 伸出的拇指指向第三列向量 \mathbf{a}_3 ;

如果拇指的方向与矩阵第三列向量 \mathbf{a}_3 一致，则行列式为**正**，矩阵的列向量构成**右手系**。反之，如果拇指的方向与 \mathbf{a}_3 相反，则行列式为**负**，矩阵的列向量构成**左手系**。

单位矩阵

如果 3×3 方阵 \mathbf{A} 为单位矩阵，把 \mathbf{A} 写成两个列向量

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

如图 2 所示， 3×3 方阵 \mathbf{A} 的列向量构成一个单位正方体。

单位矩阵显然是特殊的对角矩阵，上一节提到对角矩阵的行列式等于其对角线元素的乘积。

这个 3×3 方阵 \mathbf{A} 行列式为

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad (6)$$

这个单位正方体的体积为 1。

如图 2 所示，列向量 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 构成这个单位正方体的底面，底面积显然为 1。而 \mathbf{a}_3 则可视作单位正方体的高，即 1。

如图 2 (b) 所示， \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 、 \mathbf{a}_3 的空间位置关系满足右手系，因此行列式为**正**。

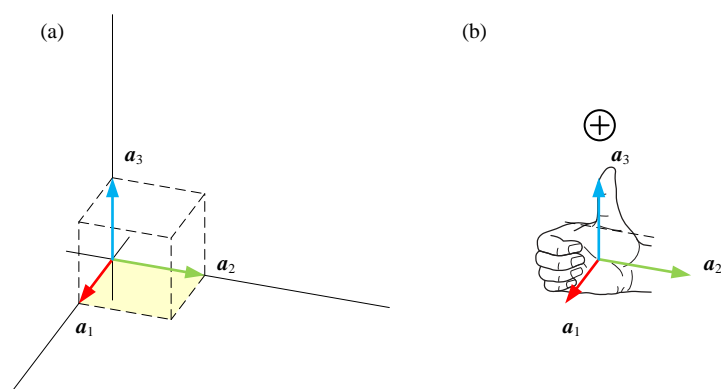


图 2. 单位正方体

交换 (5) 第 1、2 列，得到

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

如图 3 (a) 所示，上述矩阵的列向量撑起的还是一个单位正方体，也就是说体积为 1。

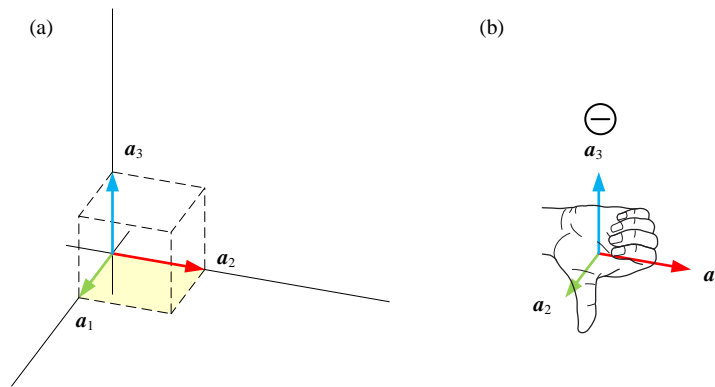


图 3. 单位正方体，交换第一、二列

但是，观察图 3 (b)，我们看到 a_3 的方向和拇指相反，因此交换 (5) 第 1、2 列后，行列式为负值，即

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \quad (8)$$

对角方阵，对角元素相同

3×3 方阵 A 对角方阵，且对角线上元素相同，比如

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

这个方阵的行列式为

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \times 3 \times 3 = 27 \quad (10)$$

如图 4 (a) 所示，(9) 三个列向量 a_1 、 a_2 、 a_3 撑起的是一个正方体，边长为 3；显然这个正方体的体积为 27。

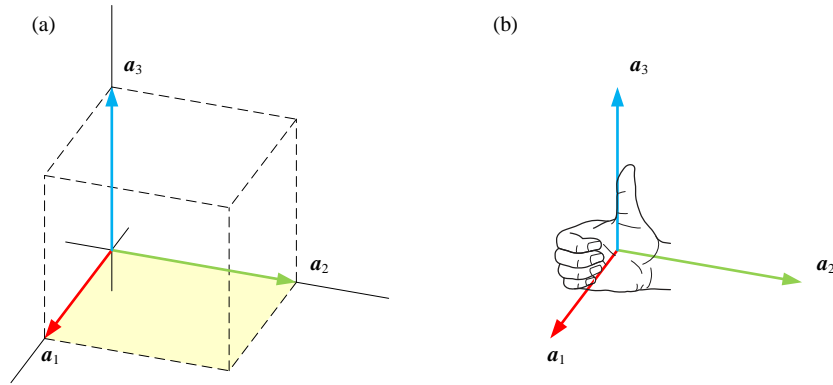


图 4. 正方体

对角方阵，对角元素不同

当 3×3 方阵 A 为对角方阵，但对角元素不同时， A 对应的几何形状为长方形。

如图 5 (a) 所示，这个 3×3 方阵 A 的面积为“长 \times 宽 \times 高”，即

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 6 \quad (11)$$

图 5 (b) 所示， a_1 、 a_2 、 a_3 满足右手系，显然这个行列式为正。

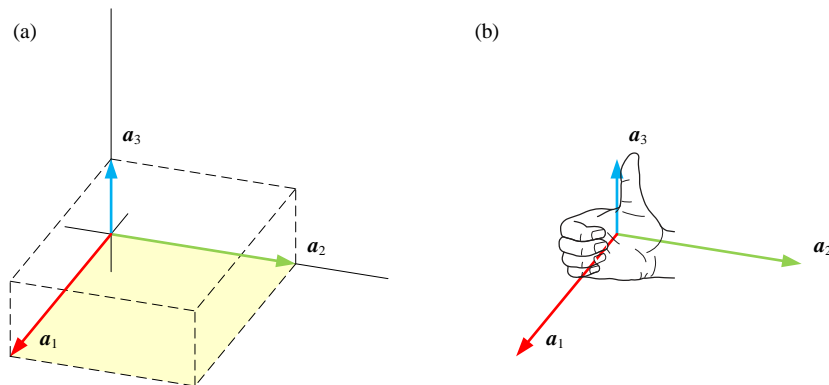


图 5. 长方体

上三角矩阵

上一节介绍过上三角矩阵的行列式等于其对角线元素的乘积，让我们看看如下这个例子。

计算如下 3×3 上三角矩阵的行列式

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \quad (12)$$

然后，让我们看一下，这个 3×3 上三角矩阵的 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 、 \mathbf{a}_3 三个列向量

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

\mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 、 \mathbf{a}_3 撑起的平行六面体如图 6 (a) 所示。

\mathbf{a}_1 在 x_1 轴上， \mathbf{a}_2 在 x_1x_2 平面上。 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 构成平行四边形的面积为 1，这是平行六面体的“底面”。

而这个平行六面体的高仅由 \mathbf{a}_3 在 x_3 轴的分量贡献，即 1。

很容易计算图 6 (a) 这个平行六面体的体积为 1，结果和 (12) 一致。

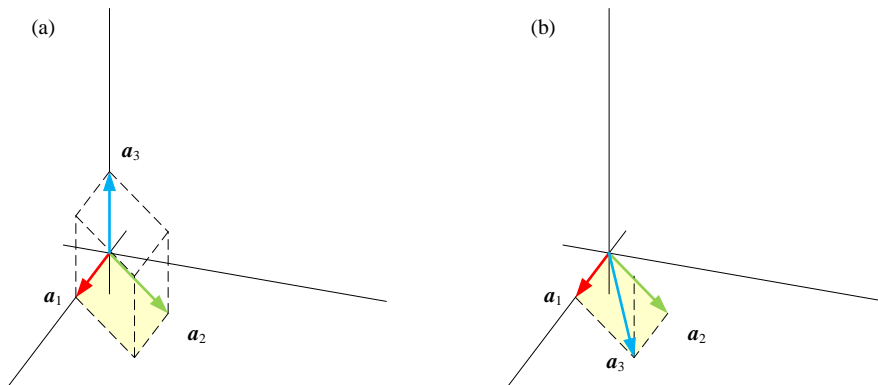


图 6. 上三角矩阵

如果， \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 不变， \mathbf{a}_3 改为

$$\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

如图 6 (b) 所示，我们发现 \mathbf{a}_3 在 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 张成的平面上；换个角度， \mathbf{a}_3 、 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 三个向量线性相关！

这时候，平行六面体“趴在”了平面上，这样这个平行六面体的体积为 0。

显然，此时行列式为 0

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (15)$$

上一节提过如果上三角矩阵的任意对角元素为 0，这个上三角矩阵的行列式为 0。

下三角矩阵

上一节提过，类似对角方阵、上三角矩阵，**下三角矩阵的行列式等于其对角线元素的乘积**。

如下 3×3 下三角矩阵的行列式为 1

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad (16)$$

这个矩阵三个列向量 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 、 \mathbf{a}_3 撑起的平行六面体如图 7 (a) 所示。请大家自行分析这个平行六面体的体积。

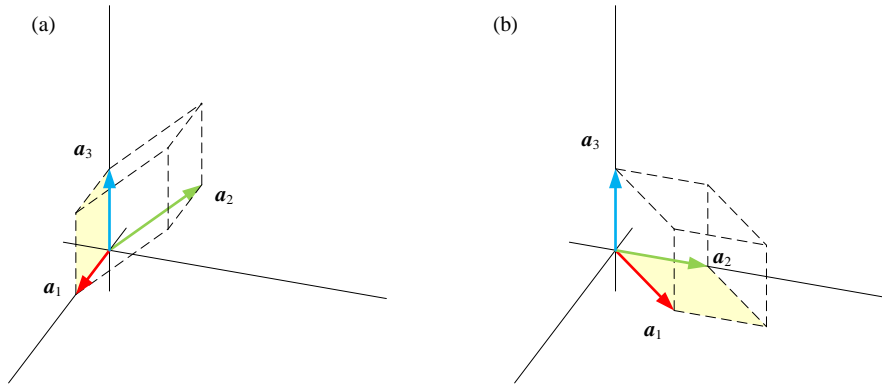


图 7. 下三角矩阵


图 7 (b) 给出的是第二个 3×3 下三角矩阵例子，对应的行列式为

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad (17)$$

也请大家自行分析这个矩阵的行列式对应的平行六面体。

代码 1 可视化 3×3 方阵对应的平行六面体。下面聊聊其中关键语句。

- a** 从一个专门用来画 3D 图的 `mpl_toolkits.mplot3d.art3d` 模块中，导入了一个类叫 `Poly3DCollection`，我们稍后用它来画一个 3D 立体图形的面。
 - b** 创建了一个 3 行 3 列的矩阵 A 。
 - c** 从矩阵 A 中提取出它的 3 个列，分别存到 `a1`、`a2` 和 `a3` 中。
 - d** 得到了平行六面体的顶点。
 - e** 这个列表定义了六个面，每个面是由 4 个顶点组成的。这些面组合在一起形成一个像砖头一样的立体图形，叫平行六面体。
 - f** 创建了一个空的图形窗口对象 `fig`，后面所有图形都放在里面。用 `fig.add_subplot(111, projection='3d')` 在图中添加一个子图，参数 111 表示 1 行、1 列、第 1 个子图，然后 `projection='3d'` 表示我们要画的是三维图。
 - g** 用 `quiver()` 绘制列向量箭头图。比如，`ax.quiver(0, 0, 0, *a1)` 前 3 个数是起点坐标，这里是 0、0、0；`*a1` 表示把 `a1` 的三个坐标拆开传进去当作箭头的方向。然后，依次绘制第二、第三个箭头。
 - h** 用 `Poly3DCollection` 创建了一个多面体对象，它由前面定义的六个面组成。`alpha=0.3` 是设置透明度，`facecolor='yellow'` 是面是黄色的，`edgecolor='black'` 是边是黑色的，`ls='--'` 表示边是虚线的。
- 然后，`ax.add_collection3d(face_collection)` 把刚才创建的那个多面体添加到图中，让它显示出来。

代码 1. 可视化 3×3 方阵对应的平行六面体 |  LA_04_02_01.ipynb

```

## 初始化
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
a from mpl_toolkits.mplot3d.art3d import Poly3DCollection

## 定义一个  $3 \times 3$  矩阵 A
b A = np.array([[2, 0, 2],
                [2, 2, 0],
                [0, 2, 2]])

## 提取列向量
c a1 = A[:, 0]; a2 = A[:, 1]; a3 = A[:, 2]

## 构造平行六面体的8个顶点
d 0 = np.array([0, 0, 0])
P1 = a1; P2 = a2; P3 = a3
P4 = a1 + a2; P5 = a1 + a3; P6 = a2 + a3
P7 = a1 + a2 + a3
vertices = [0, P1, P2, P4, P3, P5, P6, P7]

## 定义六个面
# 每个面是4个点
e faces = [[0, P1, P4, P2], # 底面
            [0, P2, P6, P3], # 侧面
            [0, P1, P5, P3], # 侧面
            [P7, P4, P1, P5], # 上面
            [P7, P4, P2, P6], # 侧面
            [P7, P5, P3, P6]] # 背面

## 可视化
f fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

# 绘制向量箭头
g ax.quiver(0, 0, 0, *a1, color='red', linewidth=2)
ax.quiver(0, 0, 0, *a2, color='green', linewidth=2)
ax.quiver(0, 0, 0, *a3, color='blue', linewidth=2)

# 绘制平行六面体
h face_collection = Poly3DCollection(faces, alpha=0.3,
                                     facecolor='yellow',
                                     edgecolor='black', ls = '--')
ax.add_collection3d(face_collection)

# 图像装饰
ax.set_xlim([0, 3]); ax.set_ylim([0, 3]); ax.set_zlim([0, 3])
ax.set_xlabel("x1"); ax.set_ylabel("x2"); ax.set_zlabel("x3")
ax.view_init(elev=30, azim=30) # 设置视角
ax.set_proj_type('ortho')
ax.set_box_aspect([1, 1, 1])

```




请大家用 DeepSeek/ChatGPT 等工具完成本节如下习题。

Q1. 请计算如下对角方阵的行列式，并指出列向量构造的平行六面体有什么特点，最后用右手法则判断行列式正负。

▶
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

▶
$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$
 (空白位置元素为 0)

▶
$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

▶
$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

Q2. 请计算下面两个上三角矩阵的行列式，并指出列向量构造的平行六面体有什么特点，最后用右手法则判断行列式正负。

▶
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

▶
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

Q3. 请计算下面两个下三角矩阵的行列式，并指出列向量构造的平行六面体有什么特点，最后用右手法则判断行列式正负。

▶
$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

▶
$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 2 & \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Q4. 请将 Q1、Q2、Q3 题目中任意一对列向量调换，再计算行列式。