

作者	生姜 DrGinger
脚本	生姜 DrGinger
视频	崔崔 CuiCui
开源学习资源	<a href="https://github.com/Visualize-ML">https://github.com/Visualize-ML</a>
平台	<a href="https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang">https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang</a> <a href="https://space.bilibili.com/3546865719052873">https://space.bilibili.com/3546865719052873</a> <a href="https://space.bilibili.com/513194466">https://space.bilibili.com/513194466</a>

# 01

## Vectors

### 向量

既有大小，又有方向

## 1.1 什么是向量？



### 本节你将掌握的核心技能：

- ▶ 向量的定义与本质：既有大小，又有方向，区别于标量。
- ▶ 向量的几何特性：通过箭头图理解大小与方向。
- ▶ 区分行向量与列向量：掌握它们在排列、记法、应用上的差异。
- ▶ 向量的转置操作：从行向量变列向量，反之亦然。
- ▶ 用 NumPy 创建和操作向量：包括一维数组和二维数组的索引与切片，以及转置操作。
- ▶ 向量与矩阵之间的关系：理解向量在矩阵结构中的位置。

向量既有大小、又有方向，在物理、计算机科学等领域广泛应用。本节首先介绍了向量的基本概念，并通过速度、位移等实例，说明向量、标量的区别。然后，引入了向量场的概念，展示了风速、水流等现象如何用向量场描述。接着，讲解了向量的大小、方向，并通过箭头示意图强调其特性。随后，介绍了 RGB 颜色模型，说明颜色如何用三维向量表示，并阐述了向量的维数概念。接下来，讨论了行向量、列向量的区别，并通过矩阵视角分析它们的排列方式，及通过转置完成相互转换。此外，本节还介绍了 NumPy 如何创建一维、二维数组，演示了索引、切片操作，并通过 Python 代码展示行向量、列向量相互转置。

### 向量无处不在

**向量** (vector) 是一种既有大小、又有方向的量。

几何上来看，向量是个**有向线段** (directed line segment)。

相比之下，**标量** (scalar) 就像一个单纯的数值，只有大小，没有方向。

汽车仪表盘上显示的车速，比如 60 千米/小时，是一个**标量**；因为它只表示速度的大小。

然而，如果加上行驶的方向，比如“以 60 千米/小时向正东行驶”，这个速度就变成了一个**向量**；因为它既包含了大小 (60 千米/小时)，也明确了方向 (正东)。

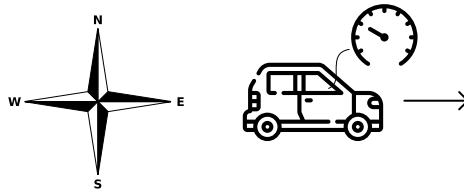


图 1. 速度，标量和矢量

再举个例子，在徒步越野时，假设你距离目的地还有 5 千米。这个距离是一个**标量**，因为它只表示大小，并不涉及方向。

但如果我们再加上方向，例如“西南方向 5 千米”，那么这个量就变成了位移 (向量)。位移不仅告诉我们要走多远，还确定了行进的方向。

生活中向量无处不在，风、水流、重力场、电磁场等现象，都可以用**向量场** (vector field) 来描述。向量场是一个数学描述，其中空间中每个点都关联一个向量，用来表示该点的某种物理量的大小和方向。

比如，某个具体位置来看，风不仅有速度的大小 (如每秒 10 米)，还有明确的方向 (如从北向南吹)。

河流中某一点处的水流也是如此，既有流速的大小，也有流动的方向。

这些特定位置的物理现象可以用单个向量描述。但当我们观察整个区域时，就会发现风速、流速在不同位置各不相同，从而形成一个向量场。

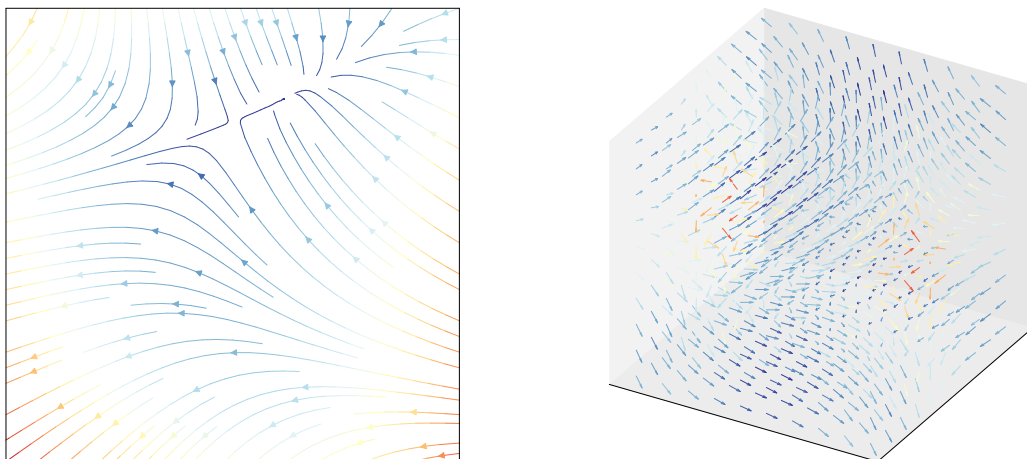


图 2. 平面、空间向量场

## 向量：既有大小、又有方向

我们可以把向量想象成一支箭，它有两个重要的特性——大小，箭的长度；方向，箭的指向。

这也就是为什么物理学中向量常被称为矢量的原因。

如图 3 所示，箭的长度代表**向量大小** (magnitude of a vector)，也叫**向量长度** (length of a vector)。

简单来说，向量长度定义为**起点** (initial point, start point, tail, origin)、**终点** (terminal point, end point, head) 之间的直线距离。

箭头指向的方向代表**向量方向** (direction of a vector)。

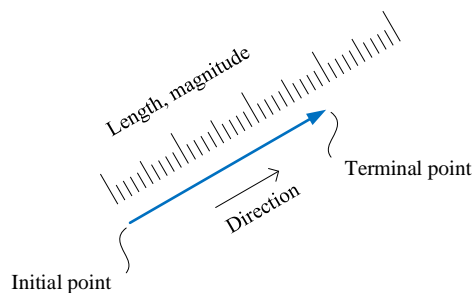


图 3. 向量既有大小又有方向

**向量大小**是一个标量 (只有大小，没有方向)。

如图 4 所示，即使两个**向量大小**完全相同，只要它们的方向不同，它们就代表了不同的物理量。例如，一个向量可能指向西方，而另一个则指向东方；虽然它们的长度一样，但在描述力、速度等现象时，它们所起的作用却截然不同。

图 4 中，有的向量彼此**垂直** (perpendicular)，也叫**正交** (orthogonal)；这意味着它们在各自的方向上是独立的，不会相互影响；而有的向量方向完全**相反** (opposite)，它们之间的相互作用可能会导致相互抵消。

另外，我们可以发现把这些平面上长度相同的向量起点放到一起，这些 (平面上的) 向量的终点在同一个**正圆** (circle) 上。

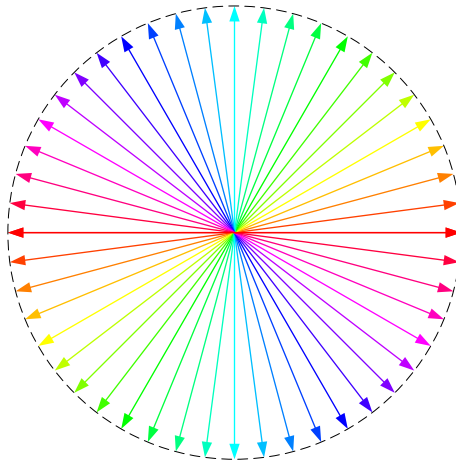


图 4. 大小相同、但是方向不同的向量

## RGB 颜色模型

在计算机图形学中，颜色也可以用向量表示。

例如，**RGB 颜色模型** (Red Green Blue color model) 中的颜色可以用 **3 维向量** (three-dimensional vector) 描述。**R** (red)、**G** (green)、**B** (blue) 每个**分量** (component) 代表一种颜色的强度。

**向量维数**是指描述该向量所需的独立**分量**的数量。比如，**2 维向量**有两个独立分量，**3 维向量**有三个独立分量。

在本书中，R、G、B 颜色的每个分量取值范围为  $[0, 1]$ 。

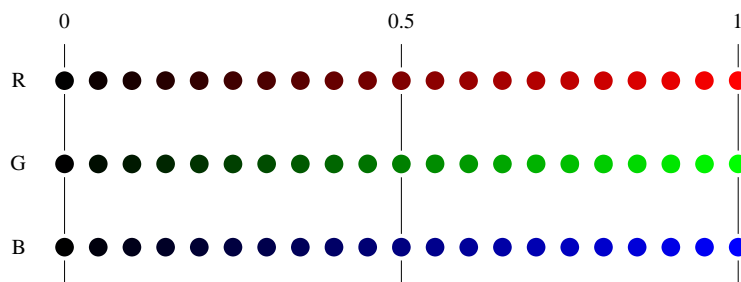


图 5. RGB 三原色分量取值

当  $R = 1$ ，而  $G$  和  $B$  均为 0 时，对应的色号  $(1, 0, 0)$  表示纯红色；类似地，纯绿色的色号为  $(0, 1, 0)$ ，纯蓝色的色号为  $(0, 0, 1)$ 。本书中，我们会用半角圆括号表示**元组** (tuple)。简单来说，元组是有序的元素序列。例如，坐标经常用**元组**来表示，在平面直角坐标系中可写作  $(x_1, x_2)$ 。我们会用方括号  $[]$  表示向量。

在某些实际应用中，R、G、B 颜色分量可能以  $[0, 255]$  区间内的整数表示，这是另一种常见的颜色编码方式。

⚠ 值得一提的是，RGB 是基于光的混合，而不是颜料的混合。

如图 6 所示，红光、绿光混合会产生黄光，这是因为光的叠加是加色混合，当红色和绿色的光同时作用于人眼时，我们感知到的就是黄色。

再如，蓝光、绿光混合会产生青色，而红光和蓝光混合则会产生品红色。

当红、绿、蓝三种光以最大强度混合时，就会产生白光，这是因为所有可见光谱的颜色都被叠加在一起。这种加色混合的原理广泛应用于显示器、电视和投影仪等设备中，通过调节红、绿、蓝三个通道的强度，可以呈现出丰富多彩的颜色。

本书后续会用 RGB 讲解各种线性代数概念。

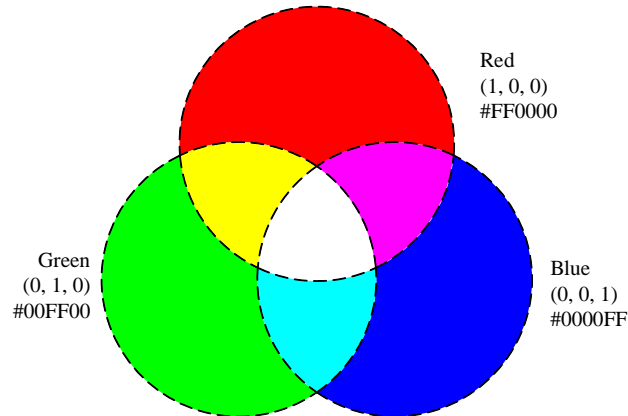


图 6. RGB 三原色混合

## 行向量

**行向量** (row vector) 中的**分量** (component) 按一行排布，比如

$$[a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n] \quad (1)$$

向量中**索引** (index) 为  $i$  的**分量** 为  $a_i$ 。

索引  $i$  的取值范围是从 1 到  $n$  的正整数。

再次强调，**向量维数**是指该向量中分量数量；显然，上述向量为  $n$  维向量。

例如，一个 **2 维行向量** 拥有 2 个分量，一个 **3 维行向量** 则有 3 个分量。

$$[1 \ 2], [1 \ 2 \ 3] \quad (2)$$

在机器学习中，一个样本的数据可以表示为一个行向量。

## NumPy 创建一维数组

本书将在讲解线性代数概念的同时，介绍如何使用 Python 进行相关计算。本书特别依赖 NumPy；NumPy 是一个强大的数值计算库，专门用于处理多维数组和矩阵运算，并提供了丰富的线性代数函数。

NumPy **数组** (array) 是其核心数据结构，它比 Python 的**列表** (list) 更高效，支持向量化计算，使得数学运算更加简洁、快速且易读。

代码 1 这段代码首先导入了 NumPy 模块，并用一个包含 1 到 10 的列表构造了一维数组。接着，通过数组的属性获取了其维数和形状，然后展示了如何使用索引、切片操作来访问和提取数组中的元素。

如图 7 所示，NumPy 数组使用零索引，从 0 开始对数组的元素进行索引，这意味着数组的第 1 个元素在索引 0 位置上。然而，在数学中，通常我们从 1 开始索引。因此，在数学的视角下，向量的第 1 个元素的索引为 1。

值得注意的是，NumPy 中，一维数组最后一个分量的索引也可以用 -1 表示；倒数第二个分量的索引可以是 -2，以此类推。

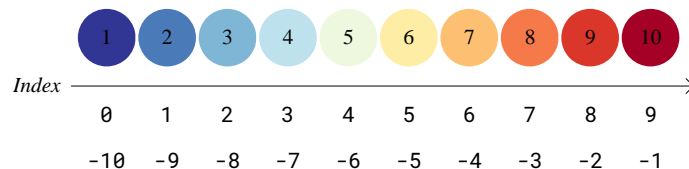


图 7. 一维 NumPy 数组的索引

代码 1. 一维数组 | LA\_01\_01\_01.ipynb

```
## 初始化
a import numpy as np

## 创建数组
b a_list = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
c a_ = np.array(a_list)
d # a_ = np.arange(1,11)
e dim = a_.ndim
f shape = a_.shape

## 索引
g a_[0]
h a_[1]
i a_[-1]
j a_[-2]

## 切片
k a_[0:2]
l a_[:2]
m a_[1:]
n a_[-3:]
o a_[7:]
```

下面让我们逐行解释代码 1。

**a** 的作用是导入 NumPy 模块，并将它命名为 np。这样，在后续代码中，就可以使用 np 来调用 NumPy 提供的函数和功能。

**b** 创建了一个 Python 列表，名字叫做 a\_list，里面包含了从 1 到 10 的整数。列表是 Python 中的一种数据结构，用于存储一系列数据。

③ 使用 NumPy 的 `numpy.array()` 函数将前面创建的列表 `a_list` 转换为一个 NumPy 数组，并赋值给变量 `a_`。NumPy 数组与 Python 列表类似，但提供了更多数学运算和操作功能。

④ 这行代码前面的 `#` 表示这是注释，不会被执行。注释中的代码提供了另一种创建相同数组的方法：`np.arange(1,11)` 会生成从 1 到 10 (不包含 11) 的连续整数序列。

⑤ 获取数组 `a_` 的数组的“轴”数，并将结果存储在变量 `dim` 中。对于一维数组来说，`ndim` 的值为 1。

⑥ 获取数组 `a_` 的形状，即数组在每个“轴”上的大小。形状是一个元组 (tuple)，对于这个一维数组，`shape` 会返回 `(10,)`，表示数组中有 10 个元素。

⑦ 取数组中索引为 0 的元素。由于索引从 0 开始，这里的元素是第一个数字 1。

⑧ 取数组中索引为 1 的元素，即第二个数字 2。

⑨ 取数组中最后一个元素。负数索引 -1 表示倒数第一个元素，即数字 10。

⑩ 取数组中倒数第二个元素 (索引为 -2)。

⑪ 取数组中从索引 0 到索引 2 (不包含索引 2) 的元素。结果是一个包含第一个和第二个元素的子数组，即 `array([1, 2])`。

⑫ 中切片的开始索引省略时，默认从头开始，所以这行代码也返回 `array([1, 2])`。

⑬ 当中切片的结束索引省略时，默认取到数组末尾，因此返回从索引 1 开始到最后的所有元素。

⑭ 使用负数索引表示从数组末尾开始切片，-3: 表示取倒数第三个元素到最后一个元素，所以返回 `array([8, 9, 10])`。

⑮ 从索引 7 开始取到最后的元素，即返回 `array([8, 9, 10])`。

⚠ 注意，本书不会专门讲解 Python 编程基础，相关内容请大家参考《编程不难》；此外，本书也不会讲解数学、数据等复杂的可视化方案，相关内容请大家参考《可视之美》；两本书的草稿、代码等开源资源在 <https://github.com/Visualize-ML>。

## 列向量

**列向量** (column vector) 中的分量按一列排列。

$n$  维列向量  $\mathbf{a}$ ，可以记作

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

不特殊说明，本书中向量都默认为列向量。本书中，列向量用小写、粗体、斜体字母表示，比如  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ 、 $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{y}$ 。

总结来说，行向量、列向量是向量的两种基本表示形式，它们在数学、物理和计算机科学中都有广泛应用。它们的本质区别在于排列方式，而行向量和列向量的选择通常取决于具体的应用场景和计算需求。

## RGB 颜色列向量



如图 8 所示，RGB 颜色中的红色、绿色、蓝色、青色 (cyan)、品红 (magenta)、黄色 (yellow)、白色可以写成列向量。

白色对应的列向量为  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，我们管这个每个分量都是 1 的列向量叫做**全 1 列向量** (all-ones column vector)，本书记作  $\mathbf{1}$  (数字 1 的粗体、斜体)。

如果什么光都没有，我们就会看到黑色，对应列向量  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。我们管这个每个分量都是 0 的列向量叫做**零向量** (zero vector)，记作  $\mathbf{0}$  (数字 0 的粗体、斜体)。

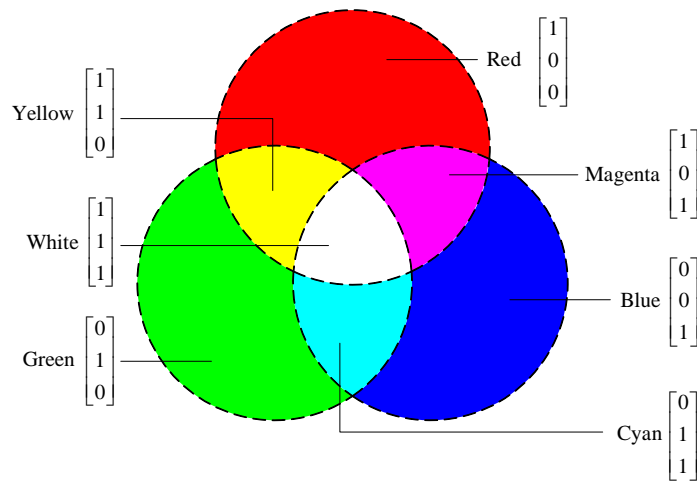


图 8. RGB 颜色的列向量

大家可能已经发现，红色 + 蓝色 = 品红，蓝色 + 绿色 = 青色，红色 + 绿色 = 黄色，红色 + 绿色 + 蓝色 = 白色；而这些运算从线性代数角度来看相当于向量加法。本章后续将介绍向量基本运算。

## 矩阵视角

为了区分行向量、列向量，本书中行向量会用上角标，比如  $\mathbf{a}^{(1)}$ ；列向量则用下角标，比如  $\mathbf{a}_1$ 。

比如， $n$  维行向量  $\mathbf{a}^{(1)}$

$$\mathbf{a}^{(1)} = [a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad \cdots \quad a_{1,n}] \quad (4)$$

实际上，如图 9 (a) 所示， $\mathbf{a}^{(1)}$  为一行、多列的**矩阵** (matrix)。

简单来说，**矩阵**是由若干行、若干列排列成的矩形数组，其中每个分量都可以通过行索引、列索引唯一确定。

**⚠ 注意**，行索引在先，列索引在后。

比如， $\mathbf{a}^{(1)}$  中分量的行索引都是 1，它们的列索引为从 1 到  $n$  的正整数。图 9 (a) 所示行向量对应的矩阵形状记作  $1 \times n$ 。



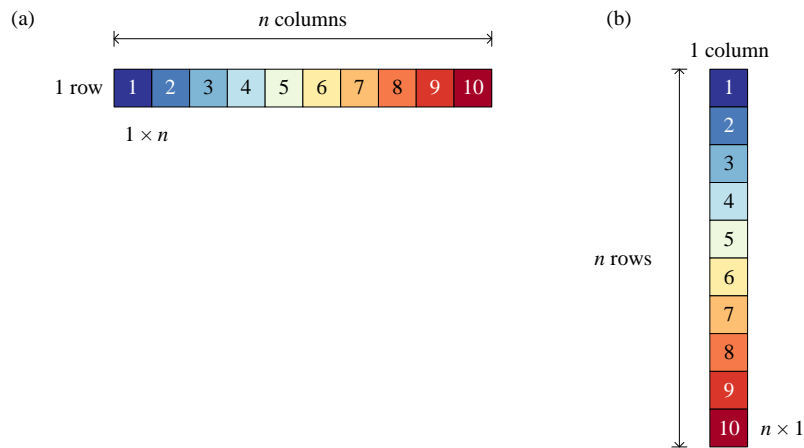


图 9. 从矩阵视角看行向量、列向量

如图 9 (b) 所示,  $n$  维列向量  $\mathbf{a}_1$  为

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{bmatrix} \quad (5)$$

类似地,  $\mathbf{a}_1$  为多行、一列的矩阵。 $\mathbf{a}_1$  中分量的行索引为从 1 到  $n$  的正整数, 它们的列索引都是 1。

图 9 (b) 所示列向量对应的矩阵形状记作  $n \times 1$ 。

**转置** (transpose) 将矩阵的行、列进行互换。

如图 10 所示, 行向量转置后变成列向量, 列向量转置后变成行向量。

本书中, 矩阵转置的记号用上角标  $T$  表示, 比如下例

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}^T = [1 \ 2 \ 3], \quad [1 \ 2 \ 3]^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

转置不改变行向量、列向量分量数量, 也不改变分量之间的相对位置关系。

很多时候, 为了减小行间距, 本书会用转置来表示列向量, 比如  $\mathbf{a} = [3, 4]^T$ 。这个列向量偶尔也会记作  $\mathbf{a} = [3; 4]$ , 分号 ; 表示分行。

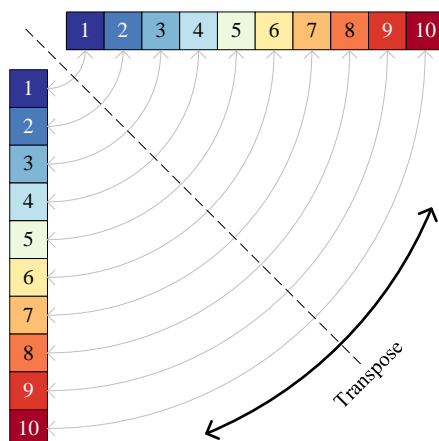


图 10. 行向量、列向量之间的转置变换

## NumPy 创建二维数组来代表向量

代码 2 利用 NumPy 创建二维数组，构造 1 行、10 列的行向量，并通过转置得到 10 行、1 列的列向量。示例展示了数组的索引和切片操作，如访问特定元素和提取子数组。

代码 2. 一维数组 |  LA\_01\_01\_02.ipynb

```

## 初始化
import numpy as np

## 创建行向量 (二维)
a row_vector = np.array([[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]])
row_vector.ndim
row_vector.shape

### 索引
b row_vector[0, 0]
row_vector[0, 1]
row_vector[0, -1]

### 切片
c row_vector[:, :2]
row_vector[:, 1:]
row_vector[:, -3:]

## 创建列向量 (二维)

### 转置
d col_vector = row_vector.T

### 索引
e col_vector[0, 0]
col_vector[1, 0]
col_vector[-1, 0]

### 切片
f col_vector[:, :2]
col_vector[1:, :]
col_vector[-3:, :]

```

下面讲解这段代码。

**a** 使用 `numpy.array()` 函数将一个嵌套的列表转换成二维数组，其中内层列表包含 1 到 10 的数字，外层列表表示这个数组只有一行，因此它构成了一个  $1 \times 10$  的行向量。`row_vector.ndim` 调用 `row_vector` 的 `ndim` 属性，用来获取数组的维数；由于数组是以二维形式存储，所以返回值为 2。`row_vector.shape` 调用 `row_vector` 的 `shape` 属性，返回一个元组 (1, 10)，表示该数组有 1 行、10 列，即数组的行数、列数。

**b** 中 `row_vector[0, 0]` 通过索引访问数组中第 1 行、第 1 列的元素 (注意 Python 中索引从 0 开始)，返回的值为 1，即行向量的第 1 个分量。

`row_vector[0, 1]` 访问 `row_vector` 中第 1 行、第 2 列的元素，返回值为 2，对应于行向量中的第 2 个分量。

`row_vector[0, -1]` 使用负索引来访问 `row_vector` 的元素，其中 -1 表示最后一列，因此返回值为 10，即行向量中的最后一个元素。

**c** 中 `row_vector[:, :2]` 使用切片操作，冒号 `:` 表示选取所有行，而 `:2` 表示选取每行中从索引 0 到 1 的元素 (不包含索引 2)，结果为一个子数组 `array([[1, 2]])`。注意，这个结果还是二维数组。

`row_vector[:, 1:]` 操作中, 1: 表示从索引 1 开始一直到最后, 冒号表示选取所有行。

`row_vector[:, -3:]` 使用切片选取每行中从倒数第三个元素到最后一个元素, -3: 表示从倒数第三列开始。

**d** 利用 `.T` 属性将行向量 `row_vector` 进行转置操作, 得到一个列向量, 即将原来一行多列的数组变换为多行一列的数组。

**e** 中 `col_vector[0, 0]` 通过索引访问转置后列向量的第 1 行、第 1 列的元素, 返回值为 1, 即列向量中的第一个分量。

`col_vector[1, 0]` 访问 `col_vector` 的第 2 行第 1 列的元素, 返回值为 2, 对应列向量中的第二个分量。

`col_vector[-1, 0]` 用负索引 -1 表示最后一行, 访问转置后列向量的最后一个元素, 返回值为 10, 即列向量中的最后一个分量。

**f** 中 `col_vector[:2, :]` 使用切片操作, :2 表示选取前两行, 而冒号 : 表示选取所有列, 因此返回一个包含列向量前两个元素的子数组。这个子数组也是二维数组。

`col_vector[1:, :]` 使用切片操作, 1: 表示从第 2 行开始一直到最后一行, 选取所有列, 因此返回从第二个元素到最后一个元素构成的子数组。

`col_vector[-3:, :]` 这一行代码的切片操作中, -3: 表示从倒数第三行开始选取到最后一行, 冒号表示所有列, 因此返回包含列向量最后三个元素的子数组。



请大家用 DeepSeek/ChatGPT 等工具完成本节如下习题。

**Q1.** 请安装 Anaconda, 并学习使用 JupyterLab; 可以参考《编程不难》前 3 章, 开源书稿在:

[https://github.com/Visualize-ML/Book1\\_Python-For-Beginners](https://github.com/Visualize-ML/Book1_Python-For-Beginners)

**Q2.** 请学习 Python 中列表 list、元组 tuple、变量 variable 等概念。

**Q3.** 定义一维 NumPy 数组 `numpy.array([1, 2, 3, 4, 5, 6])`, 分别取出其中

▶ 奇数;

▶ 偶数。

**Q4.** 定义二维 NumPy 数组 `numpy.array([[ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3]])`, 分别取出其中

▶ 大于 0 的分量;

▶ 大于等于 0 的所有分量;

▶ 小于 2 的所有分量;

▶ 小于等于 2 的所有分量。

**Q5.** 请对一维数组 `numpy.array([1, 2, 3, 4, 5, 6])` 进行转置运算, 并解释结果。

**Q6.** 请对二维数组 `numpy.array([[ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3]])` 进行转置运算, 并解释结果。

**Q7.** 请逐个学习、使用如下这些 NumPy 函数。

▶ `numpy.linspace()`

本 PDF 文件为作者草稿, 发布目的为方便读者在移动终端学习, 终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有, 请勿商用, 引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载: <https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教, 本书专属邮箱: [jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

- ▶ `numpy.zeros()`
- ▶ `numpy.ones()`
- ▶ `numpy.random.rand()`

**Q8.** 请学习如何在 Matplotlib 中定义颜色。

<https://matplotlib.org/stable/users/explain/colors/colors.html>

**Q9.** 请 DeepSeek/ChatGPT 逐行注释下例，并学习绘制水流图。

[https://matplotlib.org/stable/gallery/images\\_contours\\_and\\_fields/plot\\_streamplot.html](https://matplotlib.org/stable/gallery/images_contours_and_fields/plot_streamplot.html)

**Q10.** 请 DeepSeek/ChatGPT 逐行注释下例，并学习绘制三维箭头图。

<https://matplotlib.org/stable/gallery/mplot3d/quiver3d.html>

**Q11.** 请学习 Python 中列表 `list`、元组 `tuple`、变量 `variable` 等概念。