

# 9

Dive into Conic Sections

## 深入圆锥曲线

探寻和数据科学、机器学习之间联系



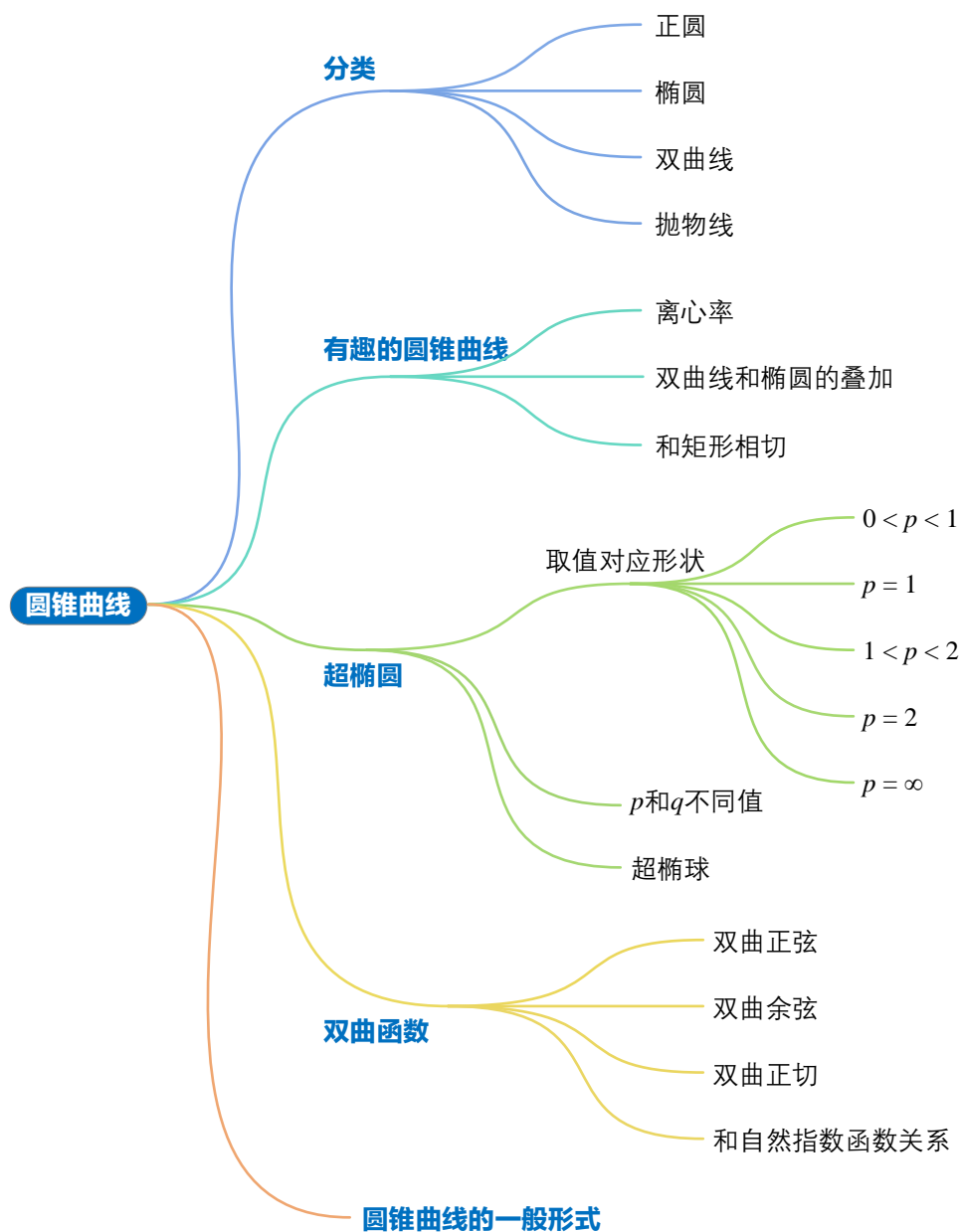
地球是人类的摇篮，但我们不能永远生活在摇篮里。

*Earth is the cradle of humanity, but one cannot live in a cradle forever.*

—— 康斯坦丁·齐奥尔科夫斯基 (Konstantin Tsiolkovsky) | 俄罗斯火箭专家 | 1857 ~ 1935



- ▶ `matplotlib.patches.Rectangle()` 绘制通过定位点，以及设定宽度和高度的矩形
- ▶ `matplotlib.pyplot.contour()` 绘制等高线图
- ▶ `matplotlib.pyplot.contourf()` 绘制填充等高线图
- ▶ `numpy.cosh()` 双曲余弦函数
- ▶ `numpy.isinf()` 判断是否存在无穷
- ▶ `numpy.maximum()` 计算最大值
- ▶ `numpy.sinh()` 双曲正弦函数
- ▶ `numpy.tanh()` 双曲正切函数
- ▶ `sympy.Eq()` 定义符号等式
- ▶ `sympy.evalf()` 将符号解析式中未知量替换为具体数值
- ▶ `sympy.plot_implicit()` 绘制隐函数方程
- ▶ `sympy.symbols()` 定义符号变量



本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

## 9.1 圆锥曲线：探索星辰大海

虽然正圆、椭圆、抛物线、双曲线这样的数学概念现在见诸于中学课本，但是它们现如今依旧展现着巨大能量。比如，在星辰大海的征途中，圆锥曲线扮演重要角色。

图 1 所示为四种航天器轨道。当航天器以**第一宇宙速度** (first cosmic velocity) 绕地运行时，运行的轨道为**正圆轨道** (circular orbit)，第一宇宙速度因此被称作**环绕速度** (orbit speed)。提高航天器绕行速度，轨道变为**椭圆轨道** (elliptical orbit)。

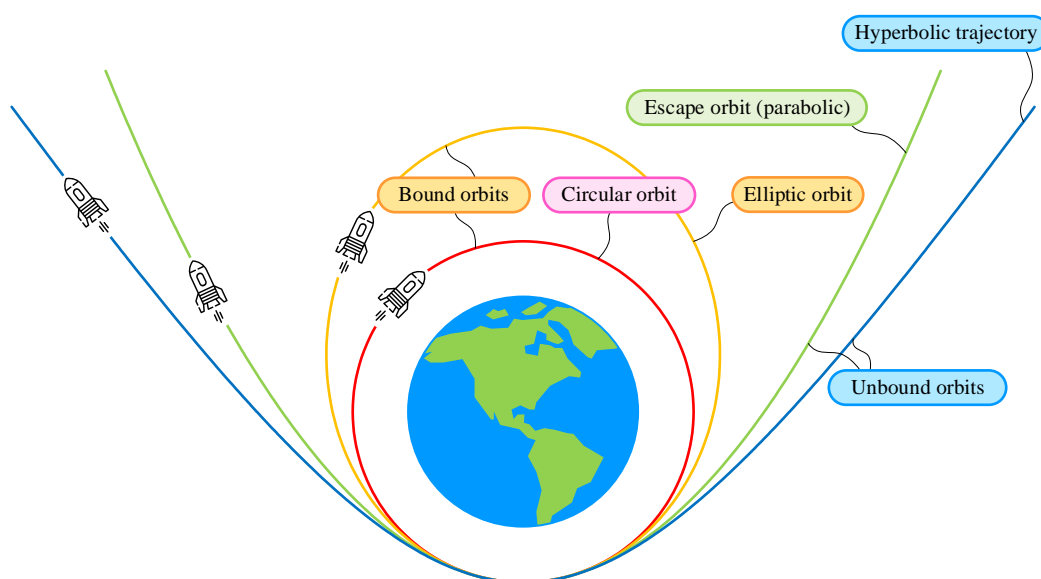


图 1. 航天器的几种轨道

继续提高绕行速度，当航天器速度达到**第二宇宙速度** (second cosmic velocity) 时，航天器便达到逃离地球所需速度，这一速度也叫**逃逸速度** (escape velocity)。这时，航天器运行轨道变为**抛物线轨道** (parabolic trajectory) 或**双曲线轨道** (hyperbolic trajectory)。这种条件下，航天器可以脱离地球的引力场而成为围绕太阳运行的人造行星。

探索火星约每 26 个月有一个发射窗口，这是因为地球在低轨道绕太阳运行，而火星在高轨道绕行。地球和火星的公转周期不同，两个行星大约每 26 个月“相遇”一次，也就是说地球与火星之间的距离最近。

如图 2 所示，探索火星需要利用**霍曼转移轨道** (Hohmann transfer orbit)。简单来说，霍曼轨道是一条椭圆形的轨道，通过两次加速将航天器从地球所在的低轨道送入火星运动的高轨道。

航天器首先进入绕太阳圆周运动的低轨道。

太空船在低轨道 A 点处上瞬间加速后，进入一个椭圆形的转移轨道。注意，加速瞬间火星位于 B。太空船由此椭圆轨道的近拱点开始，抵达远拱点后再瞬间加速，进入火星所在的目标轨道。反过来，霍曼转移轨道亦可将太空船送往较低的轨道，不过是两次减速而非加速。

**拱点** (apsis) 在天文学中是指椭圆轨道上运行天体 (比如地球) 最接近或最远离它的引力中心 (比如太阳) 的点。最靠近引力中心的点称为**近拱点** (periapsis)；而距离引力中心最远的点就称为**远拱点** (apoapsis)。

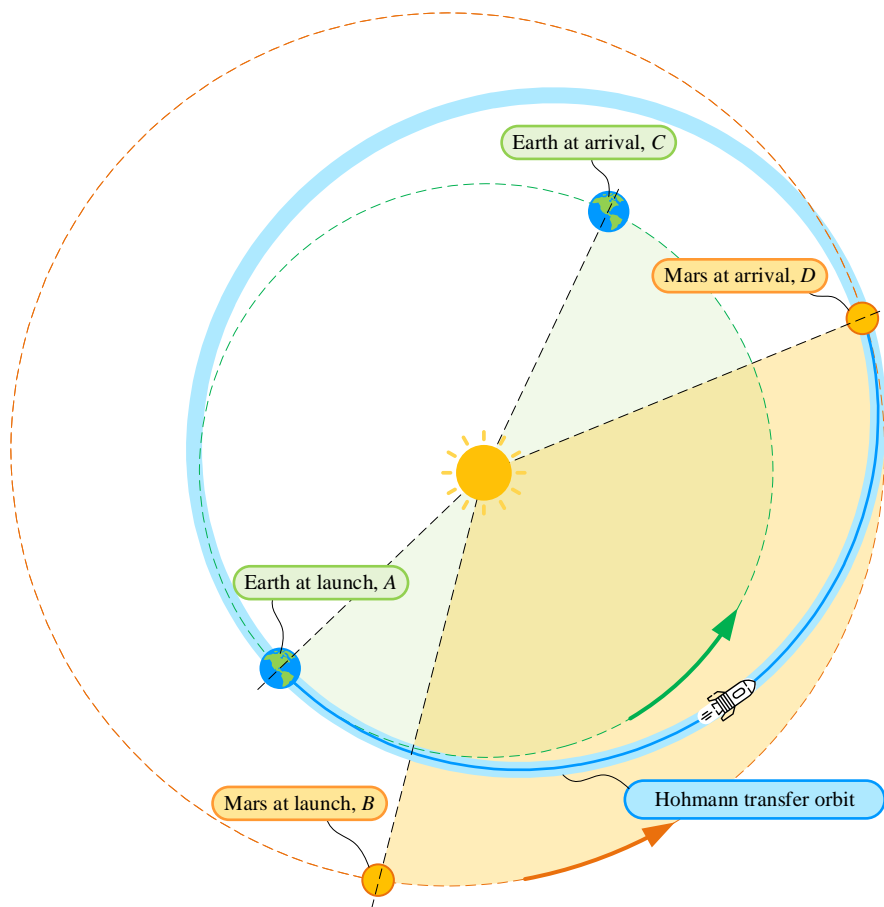


图 2. 探索火星的霍曼轨道

## 9.2 离心率：联系不同类型圆锥曲线

不同类型圆锥曲线可以通过同**离心率** (eccentricity)  $e$  联系起来：

$$x_2^2 = 2px_1 + (e^2 - 1)x_1^2, \quad e \geq 0 \quad (1)$$

正圆的离心率  $e = 0$ ，椭圆的离心率  $0 < e < 1$ ，抛物线离心率  $e = 1$ ，双曲线离心率  $e > 1$ 。(1) 对应的这一组曲线共用  $(0, 0)$  这个顶点。

当  $p = 1$  时，离心率  $e$  取不同数值，可以得到如图 3 所示一组圆锥曲线。

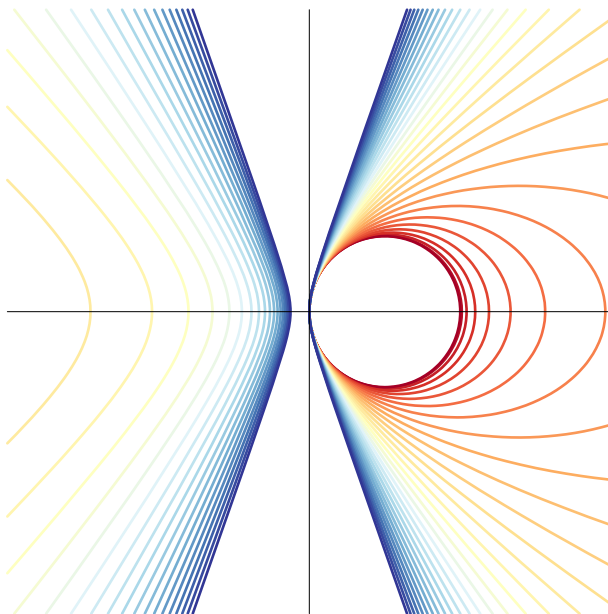


图 3. 离心率连续变化条件下一组圆锥曲线



Bk3\_Ch9\_01.py 绘制图 3。代码采用等高线方式可视化圆锥曲线。本书之后的圆锥曲线都会再用这种可视化方案。

## 9.3 一组有趣的圆锥曲线

本节介绍一组有趣的圆锥曲线，解析式如下：

$$\underbrace{\frac{x_1^2}{m^2} + \frac{x_2^2}{n^2}}_{\text{Ellipse}} - 2\rho \underbrace{\frac{x_1 x_2}{mn}}_{\text{Hyperbola}} = 1 \quad (2)$$

其中， $m > 0$ ， $n > 0$ 。

上式可以看做是椭圆和双曲线的“叠加”。 $x_1 x_2 = 1$  实际上是一个旋转双曲线。参数  $\rho$  可以视作调节双曲线“影响力”的参数， $\rho$  越大双曲线的影响越强。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

点  $(\pm m, 0)$ 、 $(0, \pm n)$  都满足 (2)，也就是说这四个点都在圆锥曲线上。

图 4 所示为当  $m = n = 1$  时，且  $\rho \geq 0$ ，圆锥曲线随  $\rho$  变化。而图 5 所示为当  $m = n = 1$  时，且  $\rho \leq 0$ ，圆锥曲线随  $\rho$  变化。不难发现， $-1 < \rho < 1$  时，椭圆的影响力占上风。而  $|\rho| > 1$ ，双曲线影响力更大。当  $\rho = \pm 1$  时，椭圆和双曲线势均力敌。

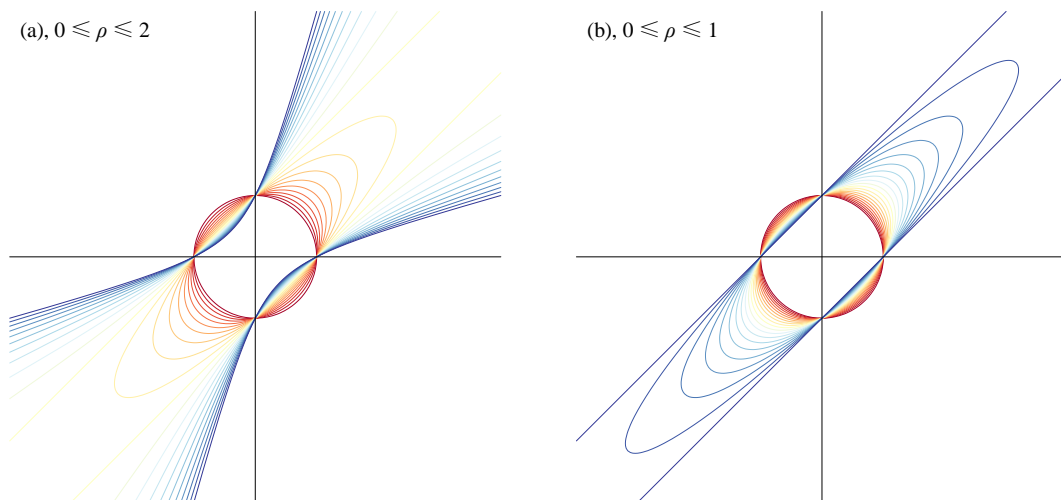


图 4.  $m = n = 1$ ，圆锥曲线随  $\rho$  变化， $\rho$  非负

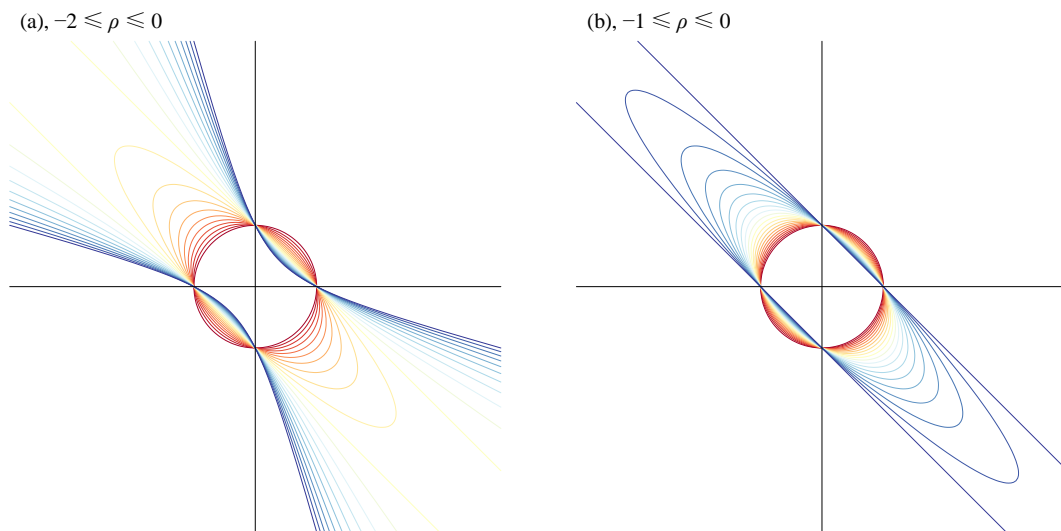


图 5.  $m = n = 1$ ，圆锥曲线随  $\rho$  变化， $\rho$  非正

当  $m = n = 1$  时，且  $\rho = 1$  时，(2) 为：

$$(x - y)^2 = 1 \quad (3)$$

以上解析式对应两条直线：

$$x - y = 1, \quad x - y = -1 \quad (4)$$

当  $m = n = 1$  时，且  $\rho = -1$  时，(2) 也对应两条直线。

图 6 所示为  $m = 2, n = 1$ ，圆锥曲线随  $\rho$  变化， $\rho$  的变化范围为  $[-2, 2]$ 。

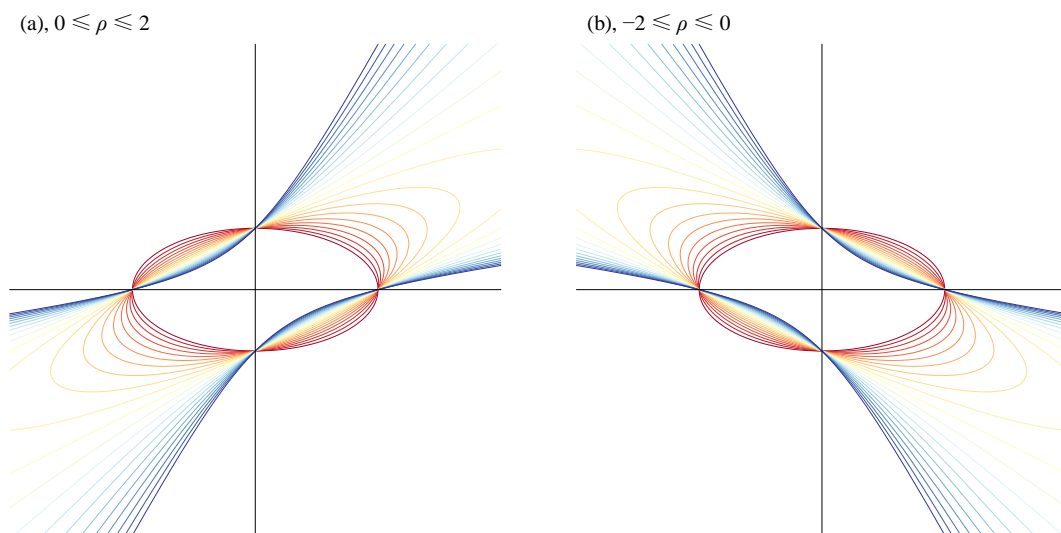


图 6.  $m = 2, n = 1$ ，圆锥曲线随  $\rho$  变化， $\rho$  的变化范围为  $[-2, 2]$

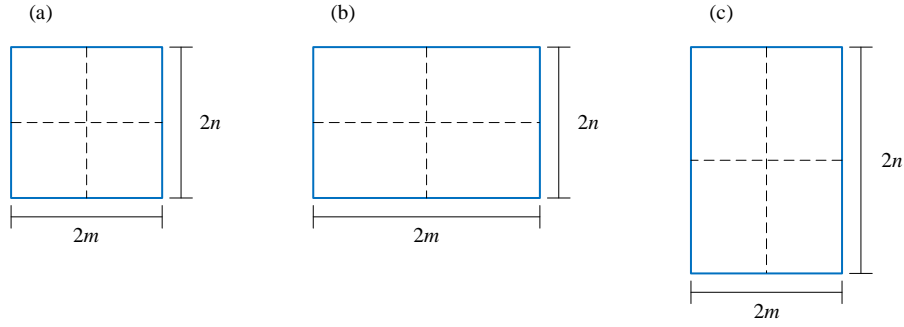


Bk3\_Ch9\_02.py 绘制图 4、图 5 和图 6 几幅图像。

## 9.4 特殊椭圆：和给定矩形相切

这一节，我们要在特殊条件约束下绘制椭圆。

给定如图 7 所示的三类矩形，假定它们的中心都位于原点。本节绘制和矩形四个边相切的椭圆。椭圆可以是正椭圆，也可以是旋转椭圆。

图 7.  $m$ 、 $n$  大小关系不同的矩形

对上一节 (2) 稍作修改，得到如下解析式：

$$\frac{x_1^2}{m^2} + \frac{x_2^2}{n^2} - \frac{2\rho x_1 x_2}{mn} = 1 - \rho^2 \quad (5)$$

$\rho$  取值范围在  $-1$  和  $1$  之间。大家很快就会发现参数  $\rho$  影响椭圆的倾斜程度。

(5) 可以进一步写成：

$$\frac{1}{1-\rho^2} \left( \frac{x_1^2}{m^2} + \frac{x_2^2}{n^2} - \frac{2\rho x_1 x_2}{mn} \right) = 1 \quad (6)$$

如图 8 所示，以矩形的中心为原点构造平面直角坐标系，容易计算得到矩形和椭圆相切的切点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  的坐标为：

$$A(m, \rho n), B(\rho m, n), C(-m, -\rho n), D(-\rho m, -n) \quad (7)$$

⚠ 请大家格外注意  $AC$  连线，我们将在本系列丛书的条件概率和线性回归话题中谈到这条直线。

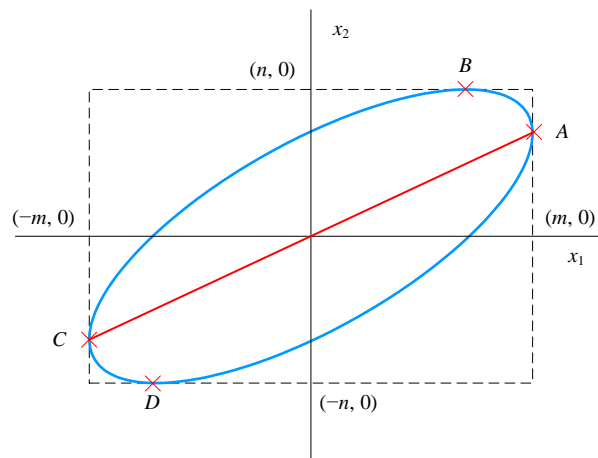




图 8. 四个切点的位置

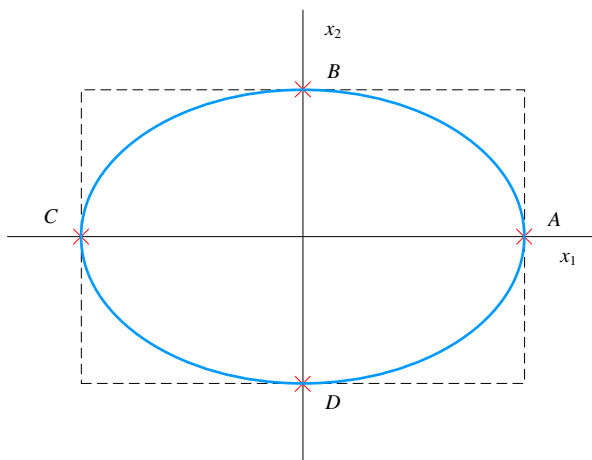
### 正椭圆

当  $\rho = 0$  时，椭圆为正椭圆，即，

$$\frac{x_1^2}{m^2} + \frac{x_2^2}{n^2} = 1 \quad (8)$$

如图 9 所示，椭圆和矩形相切的四个切点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  的坐标为：

$$A(m, 0), B(0, n), C(-m, 0), D(0, -n) \quad (9)$$

图 9. 当  $\rho = 0$  时，四个切点的位置

### 线段

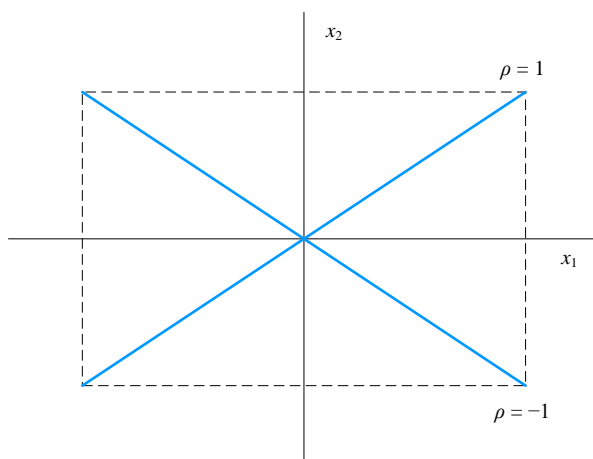
当  $\rho = 1$  时，椭圆退化为一条线段，对应解析式为：

$$\frac{x_1}{m} - \frac{x_2}{n} = 0 \quad (10)$$

当  $\rho = -1$  时，椭圆也是一条线段：

$$\frac{x_1}{m} + \frac{x_2}{n} = 0 \quad (11)$$

两种情况对应的图像为图 10。

图 10. 当  $\rho = \pm 1$  时，椭圆退化成线段

### 旋转椭圆

图 11 所示为，当  $m = n$ ，椭圆形状随参数  $\rho$  变化。当  $\rho$  靠近 0 时，椭圆形状越接近正圆； $\rho$  的绝对值越靠近 1，椭圆越扁，形状越接近线段。此外，请大家格外关注切点位置随  $\rho$  如何移动。

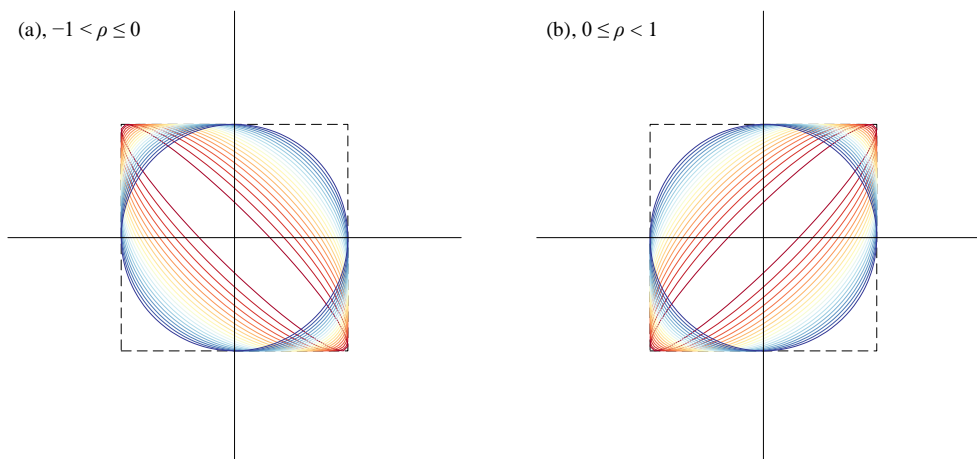
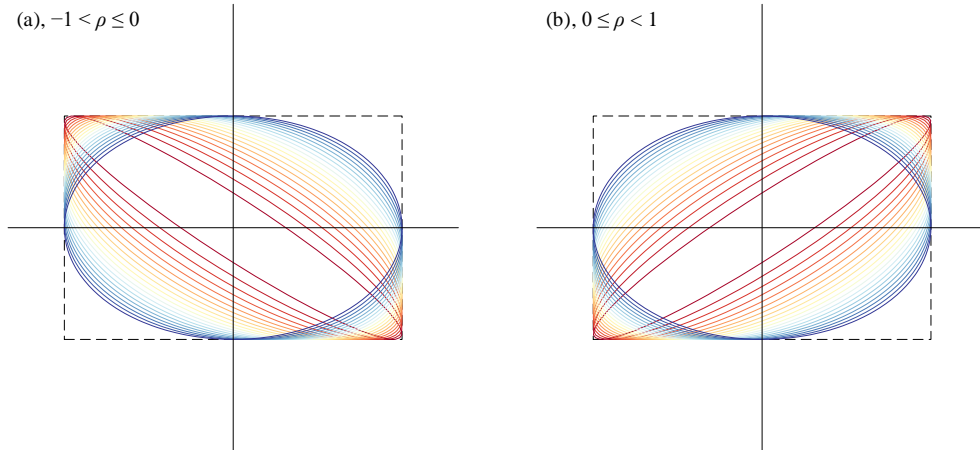
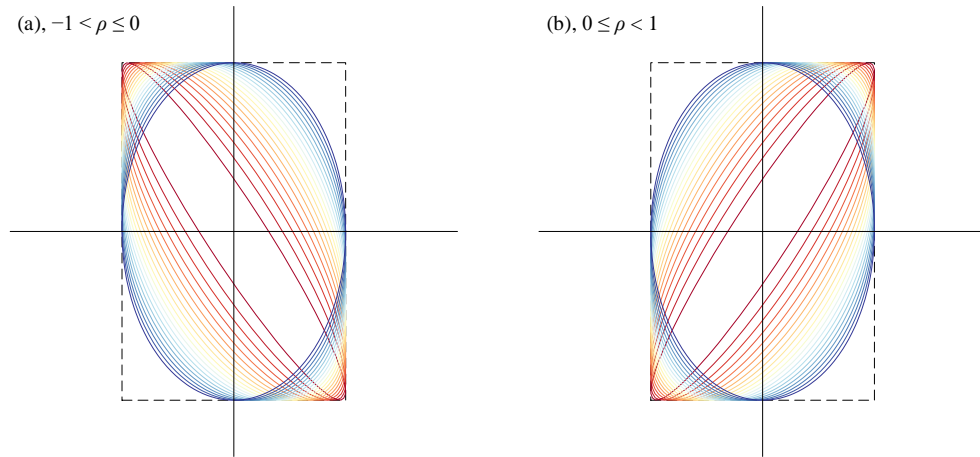
图 11.  $m = n$  时，和给定正方形相切椭圆

图 12 和图 13 分别展示  $m > n$  和  $m < n$  两种情况条件下，椭圆形状随  $\rho$  变化。

图 12.  $m > n$  时, 和给定矩形相切椭圆图 13.  $m < n$  时, 和给定矩形相切椭圆

## 二元高斯分布

我们之所以讨论这种特殊形态的椭圆, 是因为它和二元高斯分布的概率密度函数直接相关。

**二元高斯分布** (bivariate Gaussian distribution) 的概率密度函数  $f_{X,Y}(x,y)$  解析式如下:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{X,Y}^2}} \times \exp \left( \underbrace{-\frac{1}{2(1-\rho_{X,Y}^2)} \left( \left( \frac{x-\mu_X}{\sigma_X} \right)^2 - 2\rho_{X,Y} \left( \frac{x-\mu_X}{\sigma_X} \right) \left( \frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} \right) + \left( \frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2 \right)}_{\text{Ellipse}} \right) \quad (12)$$

其中,  $\mu_X$  和  $\mu_Y$  分别为随机变量  $X$ 、 $Y$  的期望值。 $\sigma_X$  和  $\sigma_Y$  分别为随机变量  $X$ 、 $Y$  的均方差;  $\rho_{X,Y}$  为  $X$  和  $Y$  线性相关系数, 取值区间为  $(-1, 1)$ 。

相信大家已经在 (12) 看到了 (6)。



Bk3\_Ch9\_03.py 绘制图 11、图 12、图 13。



我们把 Bk3\_Ch9\_03.py 转化成了一个 App，大家可以调节不同参数观察椭圆形状变化，以及切点位置。请大家参考代码文件 Streamlit\_Bk3\_Ch9\_03.py。

## 9.5 超椭圆：和范数有关

**超椭圆** (superellipse) 是对椭圆的拓展，最常见的超椭圆的解析式为：

$$\left| \frac{x_1}{a} \right|^p + \left| \frac{x_2}{b} \right|^p = 1 \quad (13)$$

一般情况， $p$  为大于 0 的数值。

特别地，当  $p = 2$ ，(13) 所示为椭圆解析式。

还有两个特殊的情况，当  $p = 1$  时，超椭圆图形为菱形：

$$\left| \frac{x_1}{a} \right| + \left| \frac{x_2}{b} \right| = 1 \quad (14)$$

当  $p = +\infty$  时，超椭圆图形为长方形，对应的解析式为：

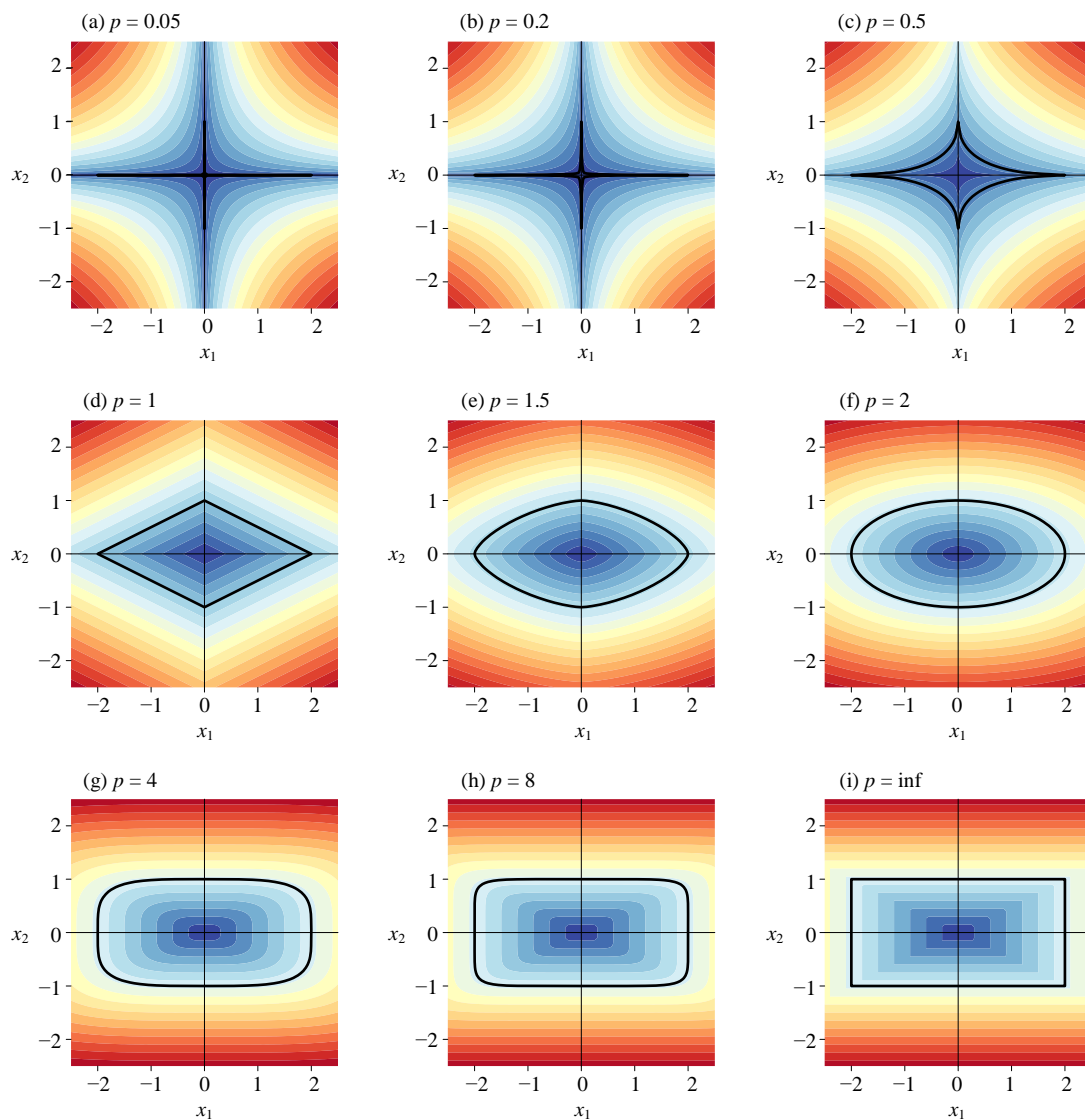
$$\max \left( \left| \frac{x_1}{a} \right|, \left| \frac{x_2}{b} \right| \right) = 1 \quad (15)$$

### 第一个例子

当  $a = 2$ ， $b = 1$  时，超椭圆的解析式为：

$$\left| \frac{x_1}{2} \right|^p + \left| \frac{x_2}{1} \right|^p = 1 \quad (16)$$

图 14 所示为  $p$  取不同值时，超椭圆的形状。

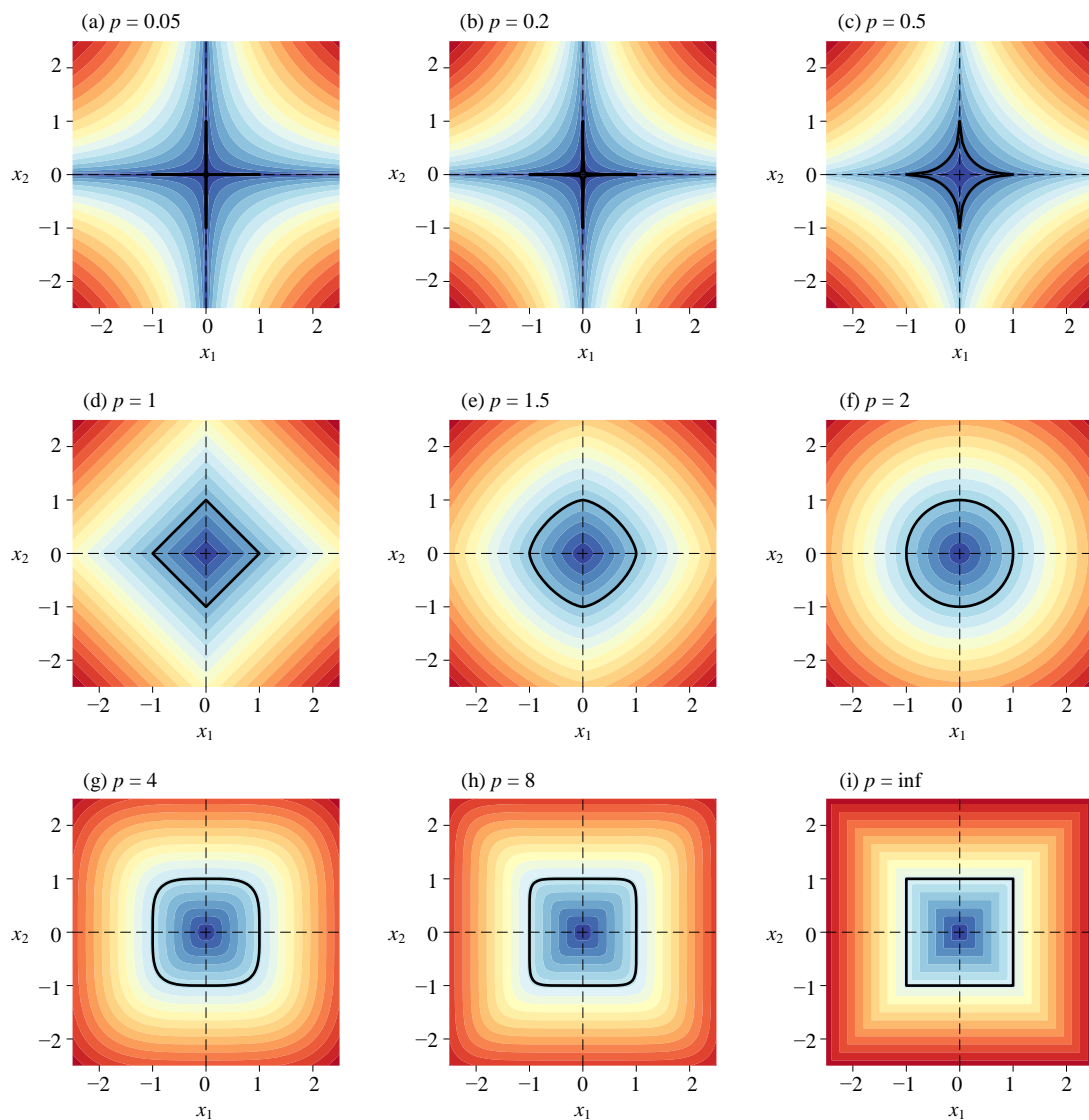
图 14. 超椭圆  $p$  取不同值时，超椭圆的形状， $a = 2$ ， $b = 1$ 

## 第二个例子

当  $a = 1$ ， $b = 1$  时，超椭圆的解析式为：

$$|x_1|^p + |x_2|^p = 1 \quad (17)$$

图 15 所示为  $p$  取不同值时，超椭圆的形状。

图 15. 超椭圆  $p$  取不同值时, 超椭圆的形状,  $a = 1$ ,  $b = 1$ 

### $p$ 和 $q$ 两个参数

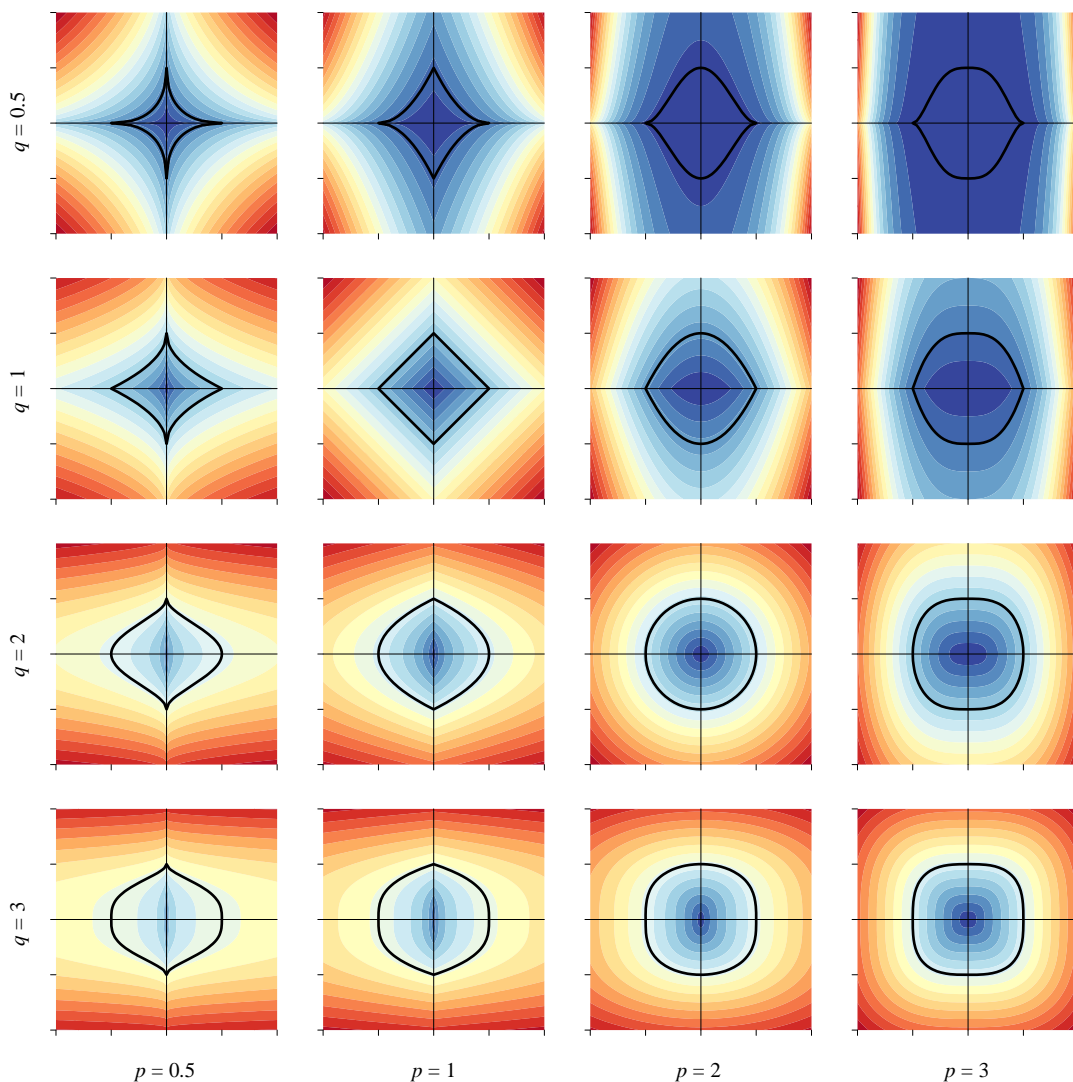
将 (13) 解析式进一步推广, 得到如下二维平面的超椭圆解析式:

$$\left| \frac{x_1}{a} \right|^p + \left| \frac{x_2}{b} \right|^q = 1 \quad (18)$$

其中,  $p$  和  $q$  为正数。

举个例子, 当  $a = 1$ ,  $b = 1$  时, (18) 对应的超椭圆的解析式为:

$$|x_1|^p + |x_2|^q = 1 \quad (19)$$

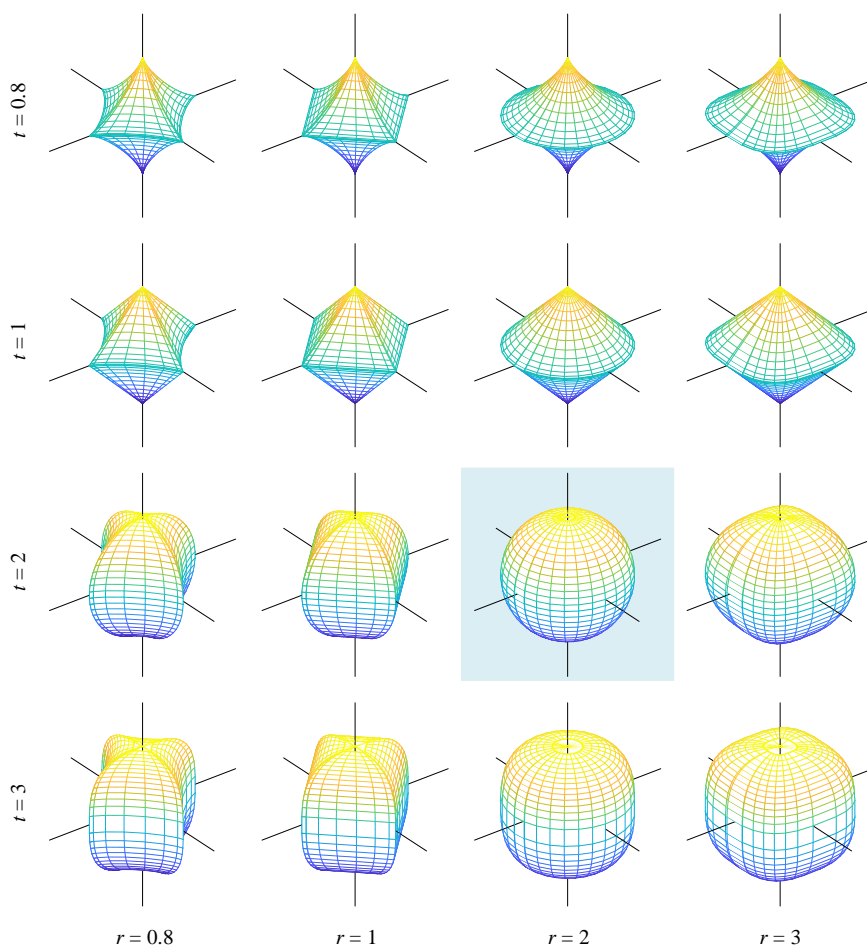
图 16 所示为  $p$  和  $q$  取不同值时, (19) 对应超椭圆的形状。图 16.  $p$  和  $q$  取不同值时, 超椭圆的形状,  $a = 1$ ,  $b = 1$ 

### 超椭圆

从二维到三维, 可以得到超椭圆 (superellipsoid) 的解析式:

$$\left( \left| \frac{x_1}{a} \right|^r + \left| \frac{x_2}{b} \right|^r \right)^{\frac{t}{r}} + \left| \frac{x_3}{c} \right|^t = 1 \quad (20)$$

图 17 所示为  $a = 1$  和  $b = 1$ ,  $t$  和  $r$  取不同值时, 超椭球的形状。

图 17.  $t$  和  $r$  取不同值时，超椭球的形状， $a = 1$ ， $b = 1$ 

本节介绍的超椭圆和  $L^p$  范数紧密联系。 $L^p$  范数的定义如下：

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( |x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_D|^p \right)^{1/p} = \left( \sum_{i=1}^D |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (21)$$

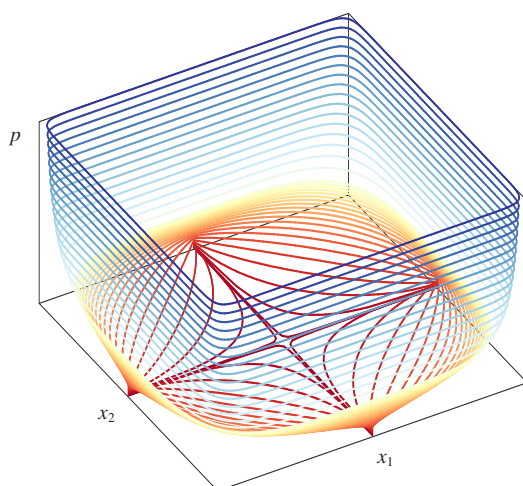
其中，

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_D]^T \quad (22)$$

图 18 所示为随着  $p$  增大， $L^p$  范数等距线一层层包裹。在数据科学和机器学习中， $L^p$  范数常用来度量距离。当  $p = 2$ ，(21) 就是  $L^2$  范数，这便是前文介绍的欧氏距离。

本系列丛书将在《矩阵力量》一册系统讲解范数。



图 18. 随着  $p$  增大,  $L^p$  范数等距线一层层包裹

Bk3\_Ch9\_04.py 绘制图 14、图 15、图 16。



在 Bk3\_Ch9\_04.py 基础上, 我们做了一个 App, 大家可以调节参数观察超椭圆形状变化。请大家参考代码文件 Streamlit\_Bk3\_Ch9\_04.py。

## 9.6 双曲函数：基于单位双曲线

当  $a = 1$  和  $b = 1$  时, 双曲线为**单位双曲线** (unit hyperbola):

$$x_1^2 - x_2^2 = 1 \quad a, b > 0 \quad (23)$$

类似前文提到过的三角函数和单位圆之间关系, 单位双曲线可以用来定义**双曲函数** (hyperbolic function)。

如图 19 所示, 最基本的双曲函数是双曲正弦函数  $\sinh()$  和双曲余弦函数  $\cosh()$ 。

双曲正切  $\tanh()$ , 可以通过如下比例计算得到:

$$\tanh \theta = \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta} \quad (24)$$



双曲正切函数  $\tanh()$  是 S 型函数中重要的一种，本书第 12 章将深入介绍。

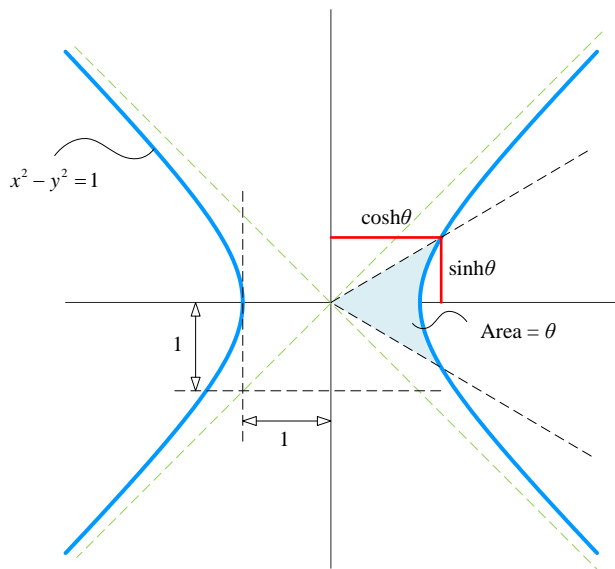


图 19. 单位双曲线和双曲函数的关系

图 20 所示为  $\sinh\theta$ 、 $\cosh\theta$  和  $\tanh\theta$  三个函数之间的图像关系。

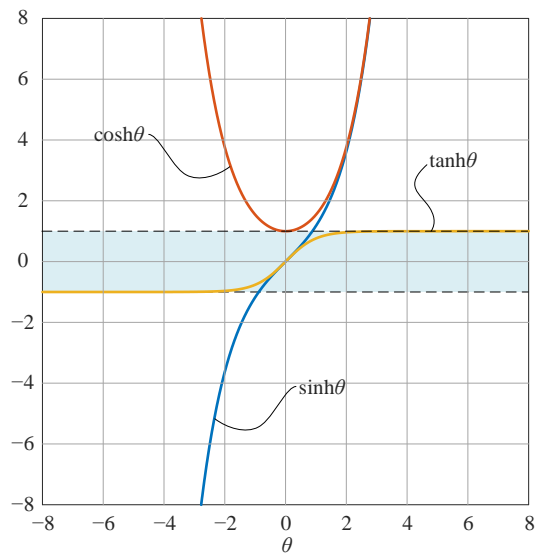


图 20.  $\sinh\theta$ 、 $\cosh\theta$  和  $\tanh\theta$  三者关系

表 1. 用英文表达双曲函数

数学表达	英文表达	中文表达
$\sinh \theta$	hyperbolic sine theta sinh /sɪntʃ/ theta	双曲正弦
$\cosh \theta$	hyperbolic co sine theta cosh /kɒʃ/ theta	双曲余弦
$\tanh \theta$	hyperbolic tangent theta tanh /tæntʃ/ theta	双曲正切

### 和指数函数关系

此外， $\sinh \theta$ 、 $\cosh \theta$  和  $\tanh \theta$  三个函数和指数函数  $\exp(\theta)$  存在以下关系：

$$\begin{aligned}\sinh \theta &= \frac{\exp(\theta) - \exp(-\theta)}{2} \\ \cosh \theta &= \frac{\exp(\theta) + \exp(-\theta)}{2} \\ \tanh \theta &= \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta} = \frac{\exp(\theta) - \exp(-\theta)}{\exp(\theta) + \exp(-\theta)}\end{aligned}\quad (25)$$

图 21 所示为  $\sinh \theta$  和  $\cosh \theta$  与指数函数关系。

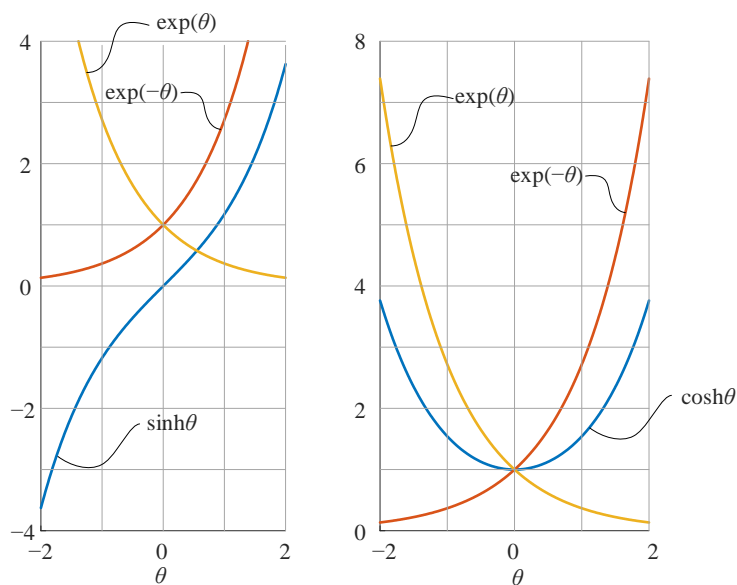


图 21.  $\sinh \theta$  和  $\cosh \theta$  与指数函数关系

## 9.7 圆锥曲线一般式

圆锥曲线的一般形如下：

$$Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2 + Dx_1 + Ex_2 + F = 0 \quad (26)$$

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

满足下列条件，圆锥曲线为正圆：

$$Ax_1^2 + Cx_2^2 + Dx_1 + Ex_2 + F = 0, \quad A = C \quad (27)$$

满足下列条件，圆锥曲线为正椭圆，即没有旋转：

$$Ax_1^2 + Cx_2^2 + Dx_1 + Ex_2 + F = 0, \quad A \neq C, \quad AC > 0 \quad (28)$$

满足下列条件，圆锥曲线为正双曲线：

$$Ax_1^2 + Cx_2^2 + Dx_1 + Ex_2 + F = 0, \quad AC < 0 \quad (29)$$

满足下列任一等式，圆锥曲线为正抛物线：

$$\begin{cases} Ax_1^2 + Dx_1 + Ex_2 + F = 0 \\ Cx_2^2 + Dx_1 + Ex_2 + F = 0 \end{cases} \quad (30)$$

⚠ 注意当  $B \neq 0$  时，圆锥曲线存在旋转，需要通过  $B^2 - 4AC$  来判断圆锥曲线类型。

$B^2 - 4AC < 0$  时，圆锥曲线为椭圆； $B^2 - 4AC = 0$ ，圆锥曲线为抛物线； $B^2 - 4AC > 0$  时，圆锥曲线为双曲线。

大家可能会问，为何要采用  $B^2 - 4AC$  来判断圆锥曲线类型？我们将在《矩阵力量》回答这个问题。

### 矩阵运算

把 (26) 写成如下矩阵运算式：

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ E \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + F = 0 \quad (31)$$

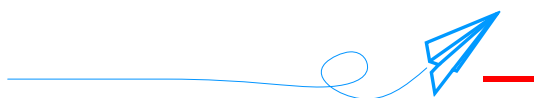
进一步写成：

$$\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{w}^T \mathbf{x} + F = 0 \quad (32)$$

其中，

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} D \\ E \end{bmatrix} \quad (33)$$

目前不需要大家掌握 (31) 这个矩阵运算式。我们也将《矩阵力量》一册深入分析这个等式。



正如牛顿所言，“我不知道世人看我的眼光。依我看来，我不过是一个在海边玩耍的孩子，不时找到几个光滑卵石、漂亮贝壳，而惊喜万分。而展现在我面前的是，真理的浩瀚海洋，静候探索。”

人类何尝不是在宇宙某个角落玩耍的一群孩子，手握的知识不过沧海一粟，却雄心万丈一心要去探索星辰大海。

但也正是这群孩子将无数的不可能变成了可能，现在他们已经在地月系、甚至太阳系的边缘跃跃欲试。

今人不见古时月，今月曾经照古人。宇宙的星辰大海一直都在人类眼前，它从未走远。路漫漫其修远兮，吾将上下而求索。

地球不过是人类的摇篮，我们的征途是星辰大海。这句话含蓄而浪漫。刘慈欣《三体》中则说的更为露骨而冷酷——“我们都是阴沟里的虫子，但总还是得有人仰望星空。”