

# 6

## Three-Dimensional Coordinate System

# 三维坐标系

平面直角坐标系上升起一根竖轴



虚空无尽的蔚蓝，神秘深邃的苍穹，漫天飘舞的虫鸟 ...

时时刻刻在召唤，“腾空而起吧，人类！”

*The blue distance, the mysterious Heavens, the example of birds and insects flying everywhere — are always beckoning Humanity to rise into the air.*

—— 康斯坦丁·齐奥尔科夫斯基 (Konstantin Tsiolkovsky) | 俄罗斯火箭专家 | 1857 ~ 1935



- ◀ `ax.plot_wireframe()` 绘制线框图
- ◀ `matplotlib.pyplot.contour()` 绘制平面等高线
- ◀ `matplotlib.pyplot.contourf()` 绘制平面填充等高线
- ◀ `numpy.meshgrid()` 产生网格化数据
- ◀ `numpy.outer()` 计算外积
- ◀ `plot_parametric()` 绘制二维参数方程
- ◀ `plot3d_parametric_line()` 绘制三维参数方程

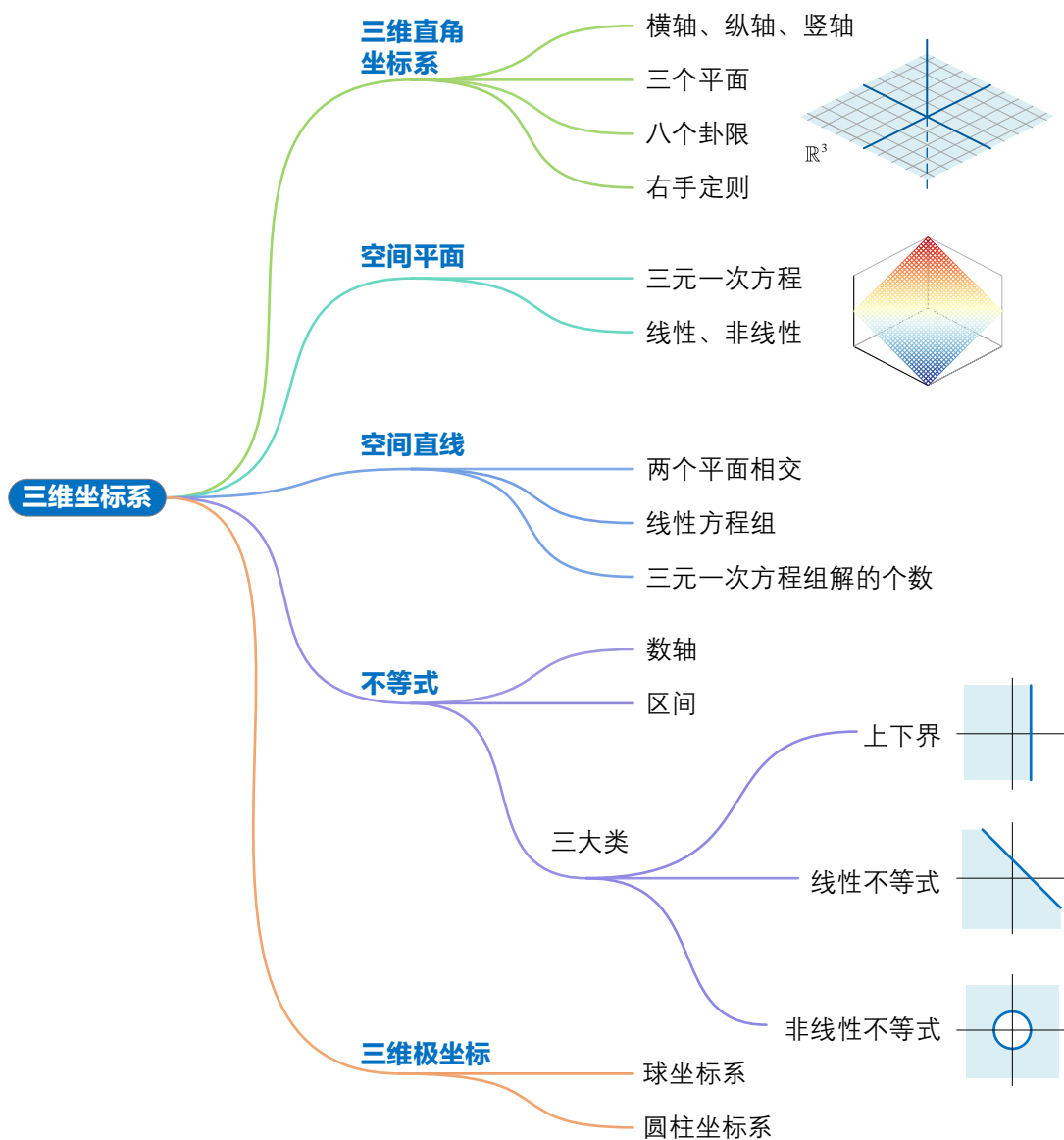
本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



## 6.1 三维直角坐标系

**费马** (Pierre de Fermat) 不但独立发明平面直角坐标系，他还在  $xy$  平面坐标系上插上  $z$  轴，创造了三维直角坐标系。

三维直角坐标系有三个坐标轴—— $x$  轴或**横轴** ( $x$ -axis),  $y$  轴或**纵轴** ( $y$ -axis) 和  $z$  轴或**竖轴** ( $z$ -axis)。本系列丛书也经常使用  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$  来代表横轴、纵轴和竖轴。

图 1 所示三维直角坐标系有三个平面： $xy$  平面、 $yz$  平面、 $xz$  平面。 $x$  轴和  $y$  轴构成  $xy$  平面， $z$  轴垂直于  $xy$  平面； $y$  轴和  $z$  轴构成  $yz$  平面， $x$  轴垂直于  $yz$  平面； $x$  轴和  $z$  轴构成  $xz$  平面， $y$  轴垂直于  $xz$  平面。这三个平面将三维空间分成了八个部分，称为**卦限** (octant)。

三维直角坐标系内坐标点可以写成  $(a, b, c)$ 。

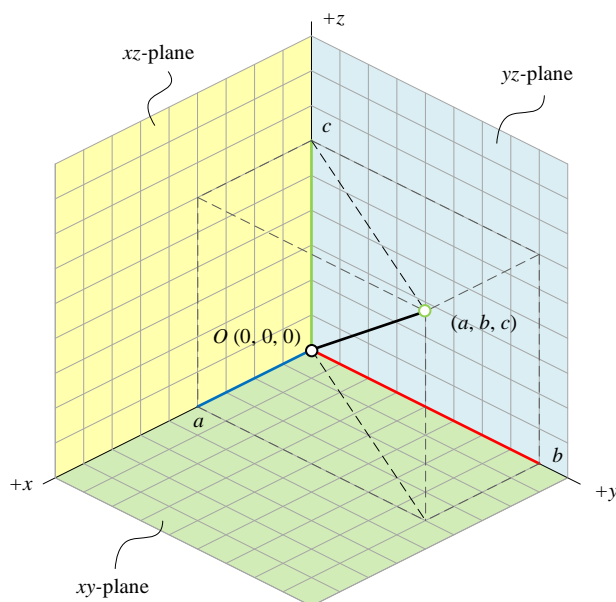


图 1. 三维直角坐标系和三个平面

图 2 所给出三种右手定则，用来确定三维直角坐标系  $x$ 、 $y$  和  $z$  轴正方向。比较常用的是图 2 中间这幅图所示定则。

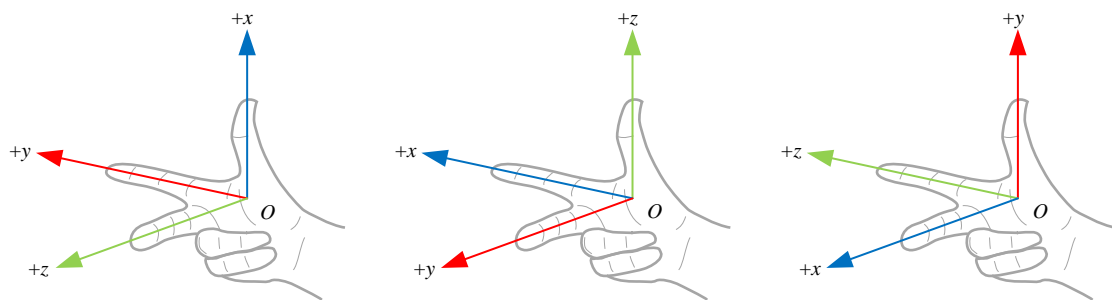


图 2. 右手定则确定三维直角坐标系  $x$ 、 $y$  和  $z$  轴正方向

## 6.2 空间平面：三元一次方程

三维直角坐标系中，平面可以写成如下等式：

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (1)$$

其中， $x$ 、 $y$ 、 $z$  为变量， $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  为参数。实际上，这个等式就是代数中的三元一次方程。

利用矩阵乘法，(1) 可以写成：

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + d = 0 \quad (2)$$

### 第一个平面

举个例子，图 3 所示的平面对应的解析式为：

$$x + y - z = 0 \quad (3)$$

图 3 中网格面的颜色对应  $z$  的数值。 $z$  越大，越靠近暖色系； $z$  越小，越靠近冷色系。

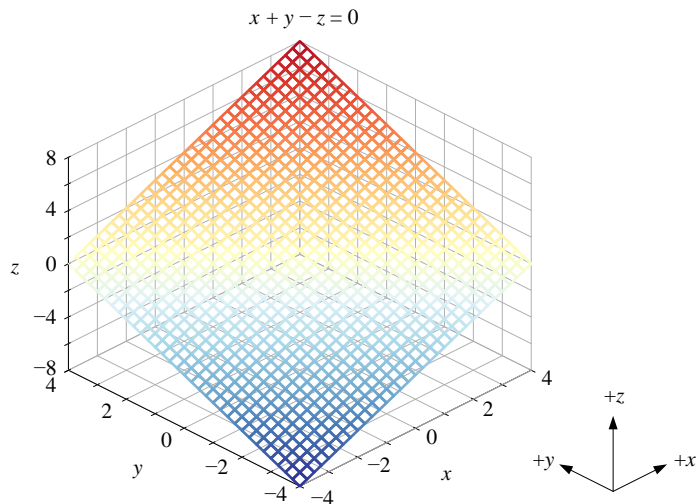


图 3. 等式  $x + y - z = 0$  对应的平面

以  $z$  作为因变量、 $x$  和  $y$  作为自变量的话，(3) 等价于如下二元函数：

$$z = f(x, y) = x + y \quad (4)$$

## 第二个平面

图 4 所示平面对应的解析式为：

$$y - z = 0 \quad (5)$$

图 4 中网格面平行于  $x$  轴，垂直于  $yz$  平面。从等式上来看，不管  $x$  取任何值，图 4 平面上的点对应的  $y$  和  $z$  都满足  $y - z = 0$ 。

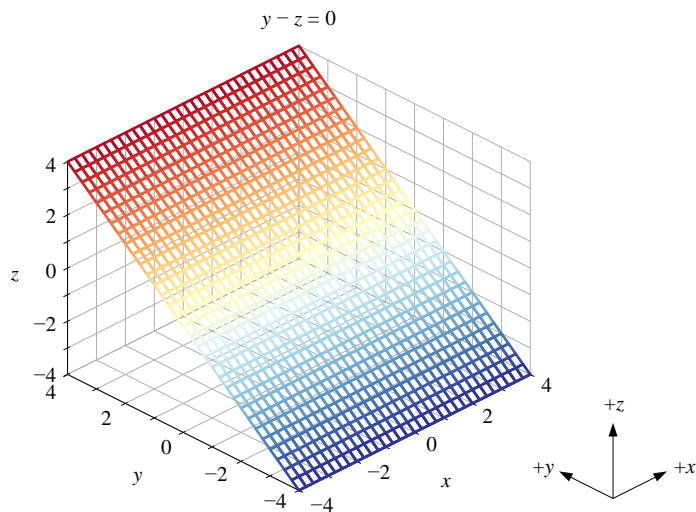


图 4. 等式  $y - z = 0$  对应的平面

## 第三个平面

图 5 所示的平面对应的解析式为：

$$x - z = 0 \quad (6)$$

图 5 中网格面平行于  $y$  轴，垂直于  $xz$  轴。不管  $y$  取任何值，图 5 平面上的点  $x$  和  $z$  的关系都满足  $x - z = 0$ 。

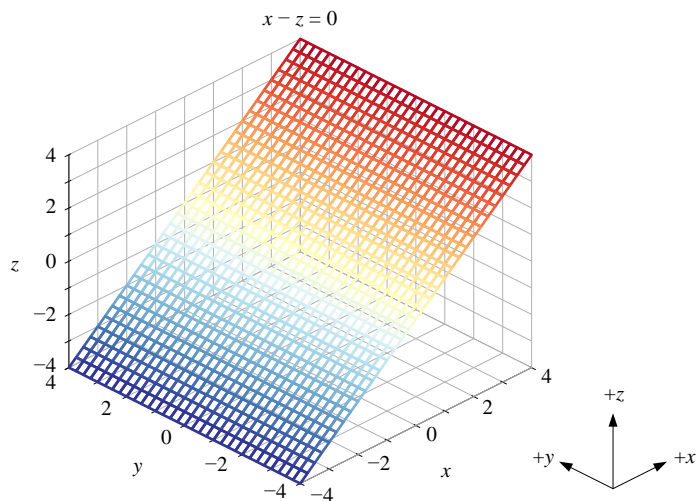
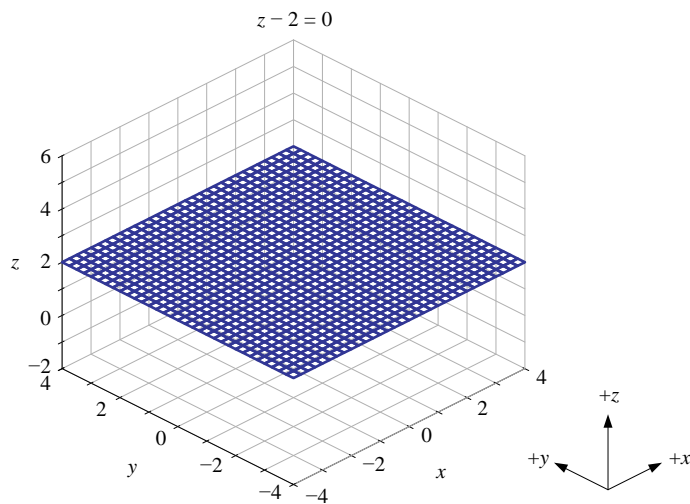


图 5. 等式  $x - z = 0$  对应的平面

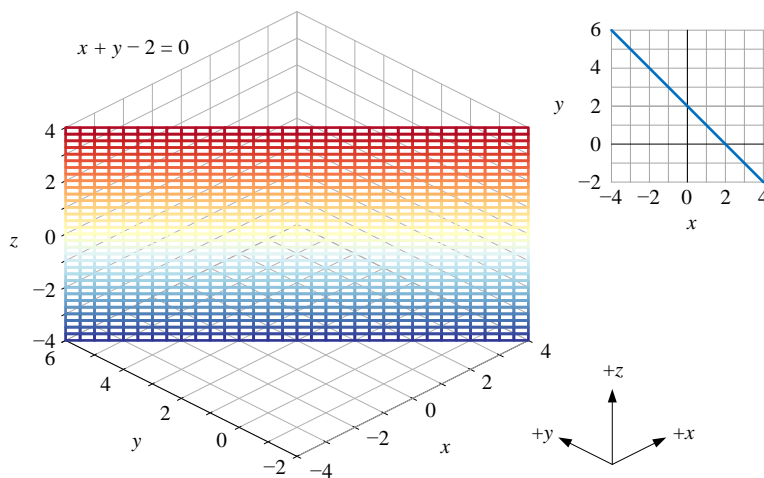
## 第四个平面

图 6 所示平面对应的等式为  $z - 2 = 0$ ，这个平面显然平行于  $xy$  平面，垂直  $z$  轴。从函数角度，这个平面可以看做是二元常数函数，写成  $f(x, y) = c$ 。

图 6. 等式  $z - 2 = 0$  对应的平面

## 最后三个例子

图 7 ~ 图 9 三幅图中平面有一个共同特点，它们都垂直于  $xy$  平面。这三个平面， $z$  的取值都不影响平面和  $xy$  平面的相对位置。三个平面都相当于， $xy$  平面上一条直线沿  $z$  方向展开。反过来，图 7 ~ 图 9 三幅图中平面在  $xy$  平面上的投影为一条直线。

图 7. 等式  $x + y - 2 = 0$  对应的平面

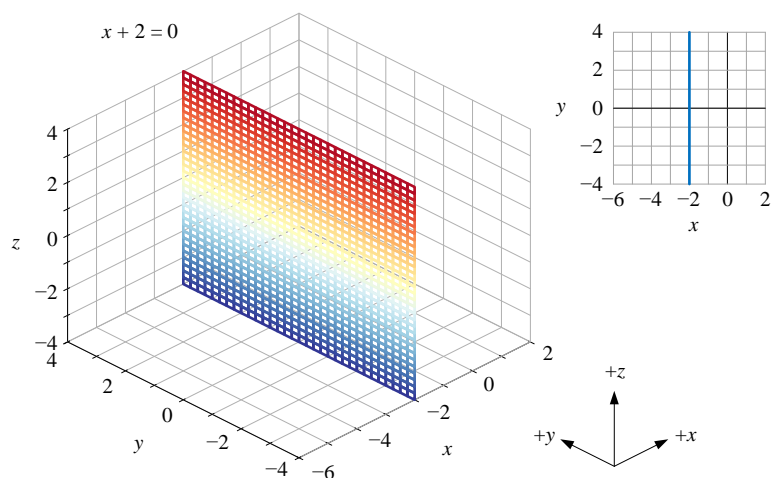
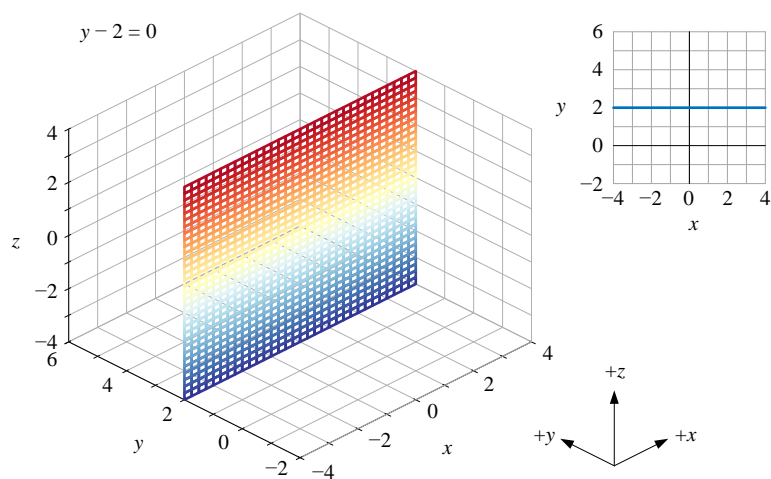
本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

图 8. 等式  $x + 2 = 0$  对应的平面图 9. 等式  $y - 2 = 0$  对应的平面

Bk3\_Ch6\_01.py 绘制本节几幅三维空间平面。



我们在 Bk3\_Ch6\_01.py 基础上，用 Streamlit 制作了绘制绘制三维空间斜面的 App，通过调整参数，请大家观察斜面位置变化。请参考代码文件 Streamlit\_Bk3\_Ch6\_01.py。



相信大家经常听到“线性”和“非线性”这两个词，下面简单区分两者。

在平面直角坐标系中，**线性** (linearity) 是指量与量之间的关系可以用一条斜线表示，比如  $y = ax + b$ 。平面上，线性函数即一次函数，对应图像为一条斜线。

注意，严格来讲，如果以满足叠加性和齐次性为条件，只有正比例函数是线性函数。

在三维直角坐标系中，“线性”对应几何形式是斜面，也就是二元一次函数，比如  $y = b_1x_1 + b_2x_2 + b_0$ 。

对于多元函数，线性的形式为  $y = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \dots + b_nx_n + b_0$ 。在多维空间中，其对应图像是**超平面** (hyperplane)。

图 10 给出线性关系三个例子。

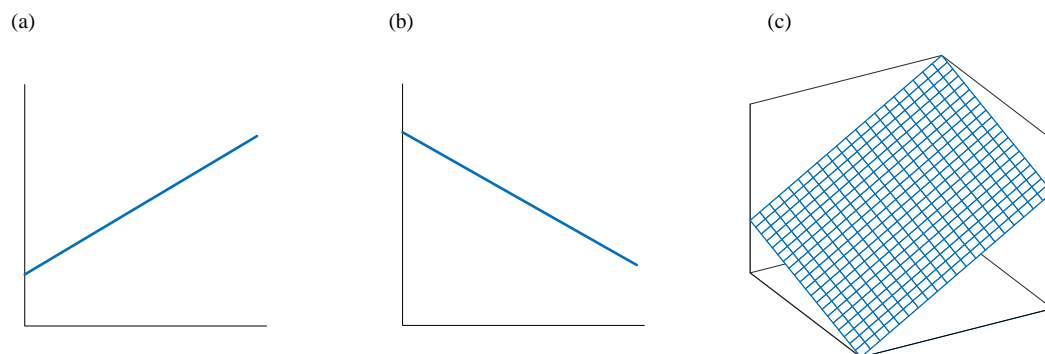


图 10. 线性关系

与线性相对的是**非线性** (nonlinearity)。“非线性”对应的图像不是直线、也不是平面、更不是超平面。平面上，非线性关系可以是曲线、折线，甚至不能用参数来描述。这种不能用参数描述的情况在数学上叫**非参数** (non-parametric)。图 11 给出平面上非线性关系例子。

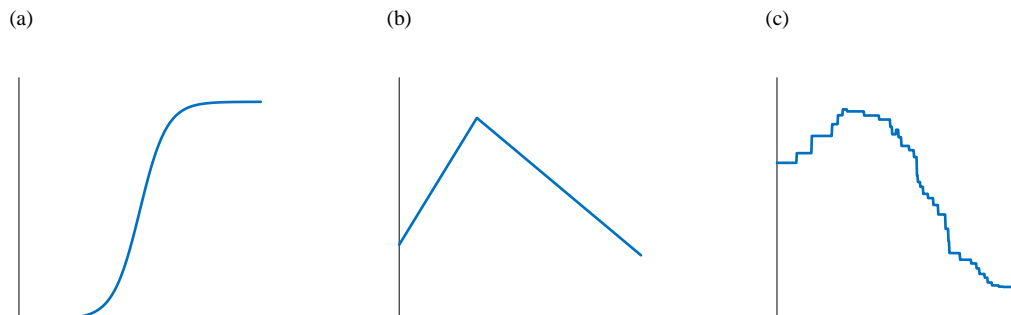


图 11. 非线性关系



机器学习中，回归模型是重要**监督学习** (supervised learning)。回归模型研究变量和自变量之间关系，目的是分析预测。图 12 给出三类回归模型，图 12 (a) 是线性回归模型，图 12 (b) (c) 则是非线性回归模型。

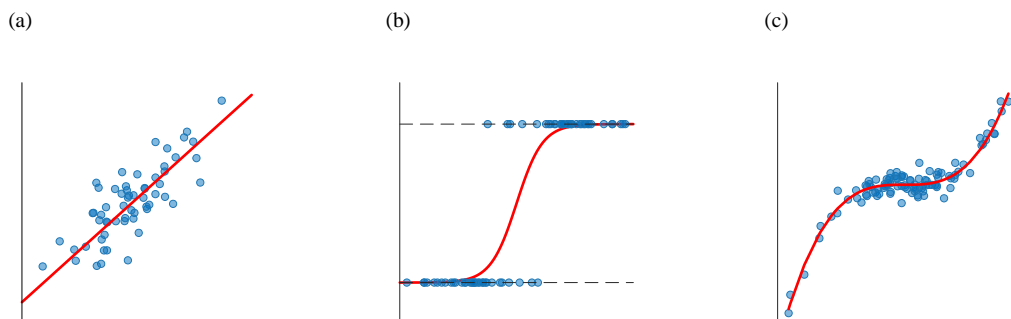


图 12. 机器学习中回归问题

监督学习中，二分类问题很常见，比如将图 13 中蓝色和红色数据点以某种方式分开，分割不同标签数据点的边界线叫**决策边界** (decision boundary)。二分类输出标签一般为 0 (蓝色)、1 (红色)。图 13 (a) 所示为用线性 (一根直线) 决策边界分割蓝色、红色数据点，图 13 (b) (c) 所示为非线性决策边界。

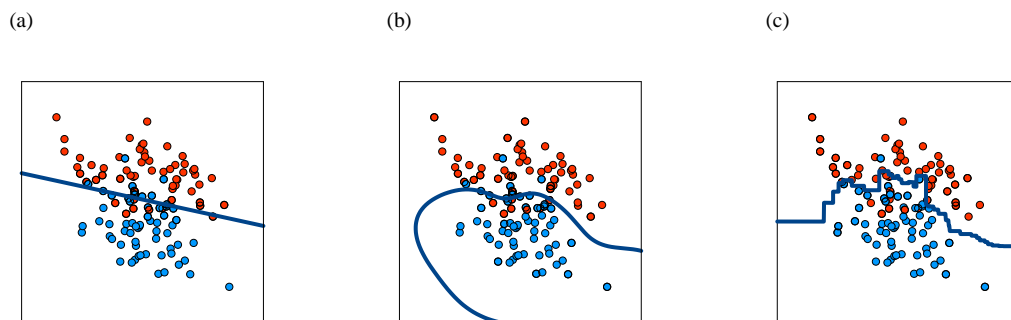


图 13. 机器学习中二分类问题

## 6.3 空间直线：三元一次方程组

有了三维空间平面，确定一条空间直线则变得很简单——两个平面相交便确定一条空间直线。也就是说，多数情况下，两个三元一次方程确定一条三维空间直线。

### 举个例子

比如，下例给出两个三元一次方程：

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \quad (7)$$

上式中，每个方程代表三维空间的一个平面。如图 14 所示，这两个平面相交得到一条直线。

从代数角度，可以这样理解 (7)，这两个三元一次方程构成的方程组有无数组解，这些解都在图 14 所示黑色直线上。

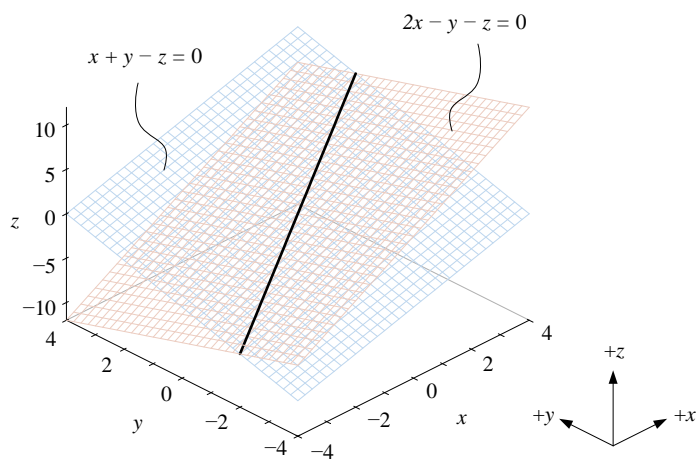


图 14. 两个相交平面确定一条直线

### 三个平面相交一点

在 (7) 基础上，再加一个三元一次方程，得到如下方程组：

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

如图 15 所示，这三个平面相交于一点。也就是说，(8) 这个三元一次方程组有唯一解。

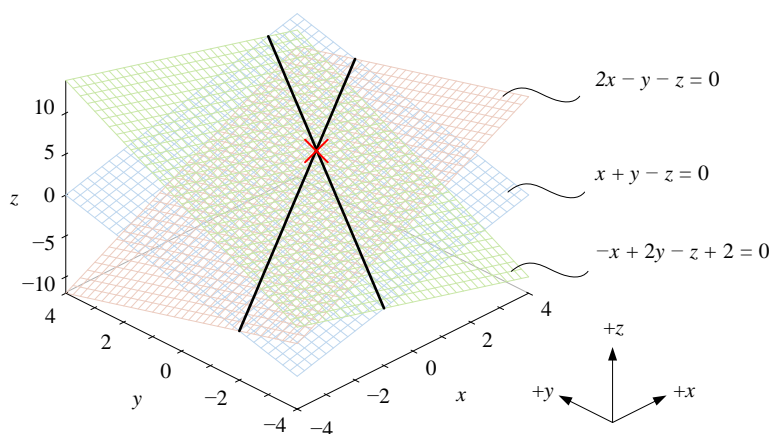


图 15. 三个平面相交于一点

## 矩阵形式

(8) 一般写成如下矩阵运算形式：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}_b \quad (9)$$

(9) 这种形式叫做**线性方程组** (system of linear equations)，一般写成  $Ax = b$ 。可以想见，当线性方程组的方程数有几百、几千、甚至更多， $Ax = b$  这种形式更规整，更便于计算。而且，对矩阵  $A$  和增广矩阵  $[A \ b]$  各种性质研究，可以判定线性方程组解的特点。



本书最后还会用“鸡兔同笼”问题再次讨论线性方程组。

## 三元一次方程组解的个数

图 16 所示为三元一次方程组解的个数几种可能性。

如图 16 (a) 所示，当三个平面相交于一点，方程组有且仅有一个解。

如图 16 (b) 所示，当三个平面相交于一条线，方程组有无数组解。无数组解还有其他情况，比如两个平面重合和第三个平面相交，再比如三个平面重合。

图 16 (c)、(d)、(e) 给出的是方程组无解的三种情况。图 16 (c) 中，两个平面平行，分别和第三个平面相交，得到两条交线相互平行。图 16 (d) 中，三个平面平行。图 16 (e) 中，两个平面重合，与第三个平面平行。方程组还有其他无解的情况，比如三个平面两两相交，得到三条交线，而三条交线相互平行。

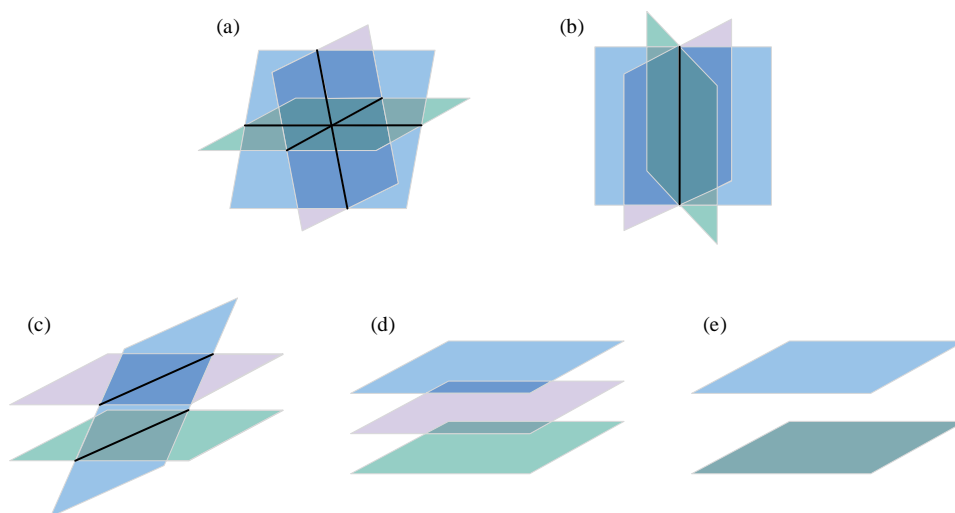


图 16. 图解三元一次方程组解的个数



Bk3\_Ch6\_02.py 绘制图 14。请大家自行修改代码绘制图 15。

## 6.4 不等式：划定区域

如图 17 所示，代数中，**等式** (equality) 可以是确定的值 ( $x = 1$ )、确定的直线 ( $x + y = 1$ )、确定的曲线 ( $x^2 + y^2 = 1$ )、确定的平面 ( $-x + y - z + 1 = 0$ ) 等等。

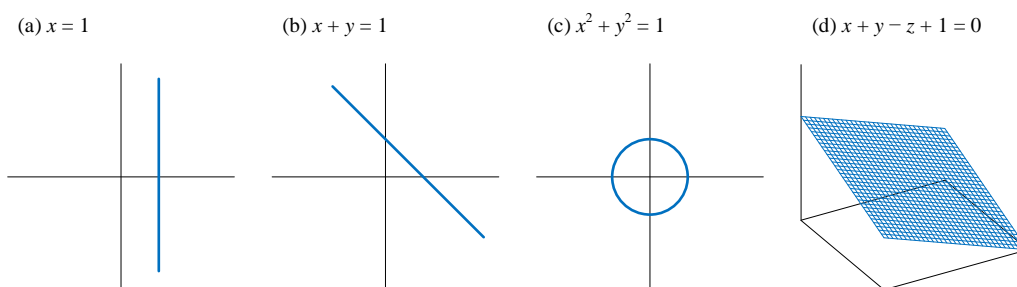


图 17. 等式的几何意义

然而，如图 18 所示，**不等式** (inequality) 的几何意义则是划定区域，比如  $x$  的取值范围 ( $x < 1$ )、直线在平面上划定的区域 ( $x + y \leq 1$ )、曲线在平面上划定的区域 ( $x^2 + y^2 > 1$ )、平面分割三维空间 ( $-x + y - z + 1 < 0$ )。

图 18 中当边界为虚线时，意味着划定区域不包括蓝色边界线。

▲ 注意，图 18 中蓝色箭头指向满足不等式条件区域方向，蓝色箭头和梯度向量 (gradient vector) 有关。本系列丛书《矩阵力量》一册将专门介绍梯度向量相关内容。

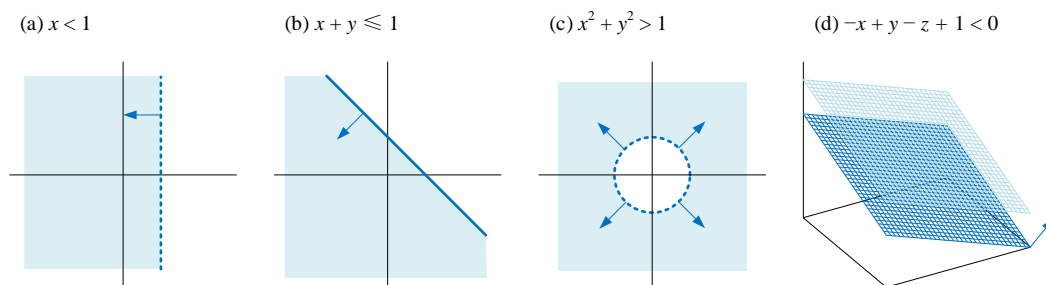


图 18. 不等式的几何意义

此外，图 17 和图 18 这两幅图告诉我们几何视角是理解代数式最直接的方式。本书在讲解每个数学工具式，都会给大家提供几何视角，以便加强理解，请大家格外留意。

## 数轴、绝对值、大小

为了理解不等式，让我们首先回顾数轴这个概念，数轴上的每一个点都对应一个实数，数轴上原点右侧的数为正数，原点左侧的数为负数。

某个数的**绝对值** (absolute value) 是指，数轴上该数与原点的距离。比如， $|-5| = 5$  (读作 the absolute value of negative five equals five) 可以理解为 -5 距离原点的距离为 5 个单位长度。 $x$  的绝对值记做  $|x|$  (读作 absolute value of  $x$ )。显然，实数绝对值为非负数，即  $|x| \geq 0$ 。

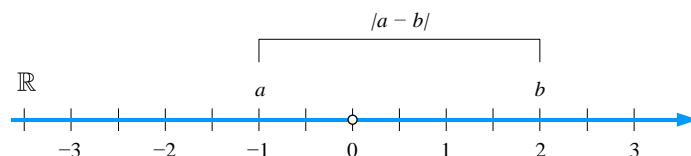


图 19. 实数轴上比较  $a$  和  $b$  大小

如果两个实数相等，这就意味着它们位于数轴同一点。当两个数不相等时，位于数轴左侧的数较小。如图 19 所示，实数  $a$  小于实数  $b$ ，可以表达为  $a < b$  (读作  $a$  is less than  $b$ )。也可以说，在数轴上  $a$  在  $b$  的左侧 ( $a$  is to the left of  $b$  on the number line)。

表 1 总结六个不等式符号。这种用**不等号** (inequality sign) 表达的式子被称作为不等式。

表 1. 六个不等式符号

数学表达	英文表达	汉语表达
------	------	------

<	less than	小于
>	greater than	大于
≤	less than or equal to	小于等于
≥	greater than or equal to	大于等于
≪	much less than	远小于
≫	much greater than	远大于

表 2. 不等式相关的英文表达

数学表达	英文表达
$4 > 3$	Four is greater than three. Three is less than four.
$y \leq 9$	Small $y$ is less than or equal to nine.
$x \geq -1$	Small $x$ is greater than or equal minus one.
$-3 < x < 2$	Small $x$ is greater than minus three and less than two.
$0 \leq x \leq 1$	$x$ is greater than or equal to zero and less than or equal to one.
$a < b$	$a$ is less than $b$ .
$a > b$	$a$ is greater than $b$ .
$a \leq b$	$a$ is less than or equal to $b$ . $a$ is not greater than $b$ .
$a \geq b$	$a$ is greater than or equal to $b$ . $a$ is not less than $b$ .
$a \ll b$	$a$ is much less than $b$ .
$a \gg b$	$a$ is much greater than $b$ .
$a \approx b$	$a$ is approximately equal to $b$ .
$a \neq b$	$a$ is not equal to $b$ .

## 区间

在数学上，某个变量的上下界可以写成区间。集合角度来看，**区间** (interval) 是指在一定范围的数的集合。

通用的区间记号中，圆括号表示“排除”，方括号表示“包括”。

如图 20 (a) 所示，**开区间** (open interval) 不包括区间左右端点，可以记作  $(a, b)$ ，两端均为圆括号 (parentheses)。

如图 20 (b) 所示，**闭区间** (closed interval) 包括区间两端端点，可以记作  $[a, b]$ ，两端均为**方括号** (square brackets)。

如图 20 (c) 所示，**左开右闭区间** (left-open and right-closed)，可以记做  $(a, b]$ ，不包括区间左端点、包括右端点。如图 20 (d) 所示，**左闭右开区间** (right-open and left-closed)，可以记做  $[a, b)$ ，包括区间左端点、不包括右端点。

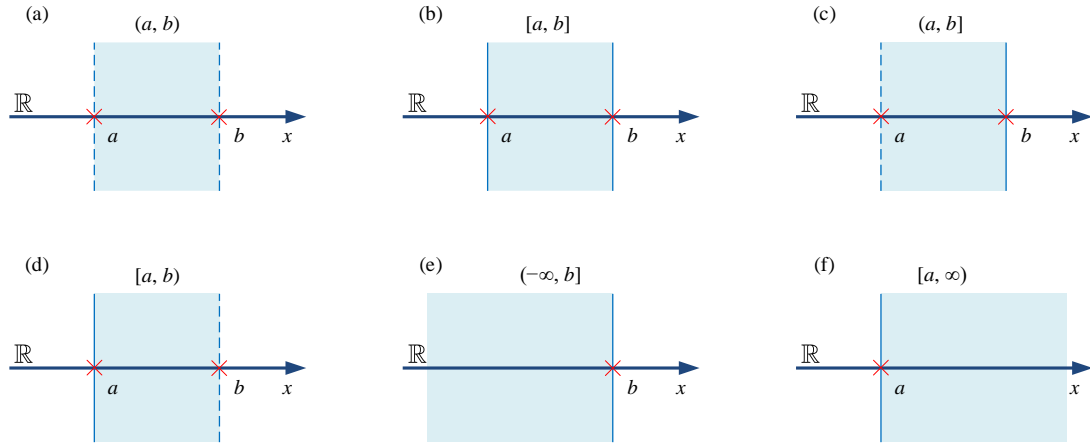


图 20. 六个区间

⚠ 请大家特别注意，在优化问题求解中，如果变量两端均有界，一般只考虑闭区间，即可以取到区间端点数值。也就是，图 20 中 (a)、(b)、(c)、(d) 对应的四个区间在优化问题中等价， $a$  叫做下界 (lower bound)， $b$  叫做上界 (upper bound)。

此外，构造优化问题时，一般都将各种不等式符号调整为小于等于号，即“ $\leq$ ”。



本书后文将在第 19 章专门讲解优化问题和约束条件。

区间两端可能**有界** (bounded) 或**无界** (unbounded)，也就是区间某侧可能没有端点，即为无穷。**正无穷** (infinity) 记作  $\infty$  或  $+\infty$ ，**负无限** (negative infinity) 记作  $-\infty$ 。

图 20 (e) 所示为**左无界右有界** (left-unbounded and right-bounded) 区间，比如  $(-\infty, b]$ 。

图 20 (f) 所示为**左有界右无界** (left-bounded and right-unbounded) 区间，比如  $[a, \infty)$ 。

**左右均无界** (unbounded at both ends)，即  $(-\infty, \infty)$ ，代表整根实数轴。

表 3. 区间相关的英文表达

数学表达	英文表达
$(a, b)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	The open interval from $a$ to $b$ . The interval from $a$ to $b$ , exclusive. The values between $a$ and $b$ , but not including the endpoints. $x$ is greater than $a$ and less than $b$ . The set of all $x$ such that $x$ is in between $a$ and $b$ , exclusive.
$[a, b]$ $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	The closed interval from $a$ to $b$ . The interval from $a$ to $b$ , inclusive. The values between $a$ and $b$ , including the endpoints. $x$ is greater than or equal to $a$ and less than or equal to $b$ . The set of all $x$ such that $x$ is in between $a$ and $b$ , inclusive.
$(a, b]$ $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	The half-open interval from $a$ to $b$ , excluding $a$ and including $b$ . The values between $a$ and $b$ , excluding $a$ and including $b$ . The set of all $x$ such that $x$ is greater than $a$ but less than or equal to $b$ .

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

$[a, b)$	The half-open interval from $a$ to $b$ , including $a$ and excluding $b$ .
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	The values between $a$ and $b$ , including $a$ and excluding $b$ .
	The set of all $x$ such that $x$ is greater than or equal to $a$ but less than $b$ .

## 6.5 三大类不等式：约束条件

本节介绍不等式的目的是服务优化问题求解，优化问题中不等式一般分为三大类：

- ◀ **上下界** (lower and upper bounds)，比如  $x > 2$
- ◀ **线性不等式** (linear inequalities)，比如  $x + y \leq 1$
- ◀ **非线性不等式** (nonlinear inequalities)，比如  $x^2 + y^2 \geq 1$

在优化问题中，这些不等式统称为**约束** (constraint)，即限制变量的取值范围。本节后续将采用三种可视化方案呈现不等式划定的区域。

### 上下界

举个例子，给定  $x_1$  的取值范围为：

$$x_1 + 1 > 0 \quad (10)$$

首先将上式“大于号”调整为“小于号”，(10) 改写成：

$$-x_1 - 1 < 0 \quad (11)$$

⚠ 注意，本节后续不再区分  $<$  和  $\leq$ 。

根据 (11)，构造如下二元函数  $f(x_1, x_2)$ ：

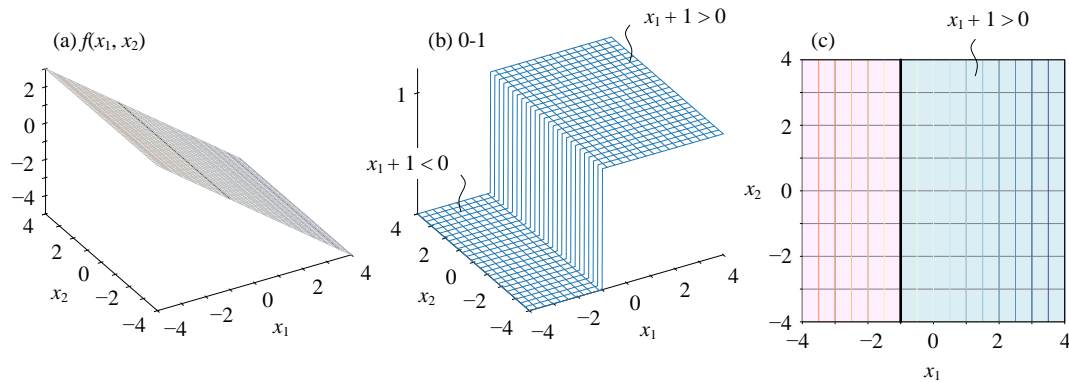
$$f(x_1, x_2) = -x_1 - 1 \quad (12)$$

图 21 (a) 所示为三维直角坐标系中  $f(x_1, x_2)$  的**等高线图** (contour plot)。对于一个二元函数  $f(x_1, x_2)$ ，等高线代表函数值相等的点连成的线，即满足  $f(x_1, x_2) = c$ 。函数等高线类似地形图上海拔高度相同点连成曲线。等高线可以在三维空间展示，也可以在平面上绘制。

➡ 对于等高线这个概念陌生的读者不要怕，本书第 10 章将深入介绍等高线。此外，本书第 13 章将专门讲解常用二元函数，本节内容相当于热身。

图 21 (a) 三维等高线采用“红黄蓝”色谱。暖色系颜色等高线对应  $f(x_1, x_2) > 0$ ，即不满足 (11)；冷色系颜色等高线对应  $f(x_1, x_2) < 0$ ，满足 (11)。值得注意的是，图 21 (a) 中等高线相互平行。



图 21.  $x_1 + 1 > 0$  三个可视化方案

然后，我们做一个“二分类”转换，满足 (11) 不等式的点  $(x_1, x_2)$  标签设为 1 (即 True)，不满足 (11) 的点设为 0 (即 False)，这样我们获得图 21 (b)。相当于把  $f(x_1, x_2)$  变成一个 0-1 (False-True) 两值阶梯面。

再进一步，将图 21 (a) 等高线投影在  $x_1x_2$  平面上，获得图 21 (c) 平面等高线。

图 21 (c) 中黑色线就是决策边界，它将整个  $x_1x_2$  平面划分成两个区域：一个满足 (11)，一个不满足 (11)。图 21 (c) 中，蓝色阴影区域满足 (11) 不等式，对应图 21 (b) 中取值为 1 的区域。粉色阴影区域不满足 (11) 不等式，对应图 21 (b) 中取值为 0 的区域。

再举个例子， $x_1$  的取值范围给定为：

$$-1 < x_1 < 2 \quad (13)$$

其中，-1 为下限，2 为上限。

利用绝对值运算，将 (13) 整理为：

$$|x_1 - 0.5| - 1.5 < 0 \quad (14)$$

可以这样理解 (14)，数轴上离 0.5 距离小于 1.5 所有点的集合。

⚠ 注意，上式也可以看成是一个非线性不等式。

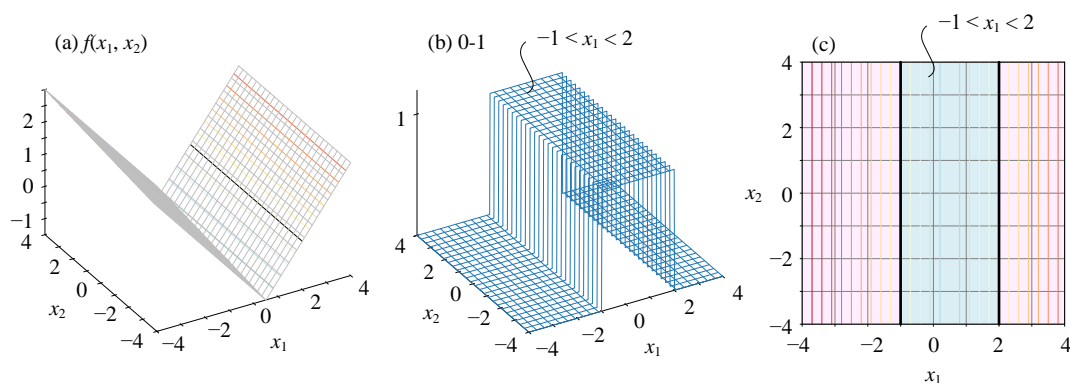
根据 (14)，构造如下二元函数  $f(x_1, x_2)$ ：

$$f(x_1, x_2) = |x_1 - 0.5| - 1.5 \quad (15)$$

图 22 (a) 所示为  $f(x_1, x_2)$  函数在三维直角坐标系中图像，整个曲面呈现 V 字形。同样，蓝色等高线处满足 (14)，而红色等高线处不满足 (14)。

图 22 (b) 中取值 1 的区域满足 (14)。

图 22 (c) 中背景色为蓝色区域满足 (14)。图 22 (c) 中两条黑色线为决策边界，两者相互平行。

图 22.  $-1 < x_1 < 2$  三个可视化方案

再举个例子，给定  $x_2$  的取值范围：

$$x_2 < 0 \text{ or } x_2 > 2 \quad (16)$$

▲ 注意，上式可以看成两个区间构造而成。

将 (16) 整理为：

$$-|x_2 - 1| + 1 < 0 \quad (17)$$

可以这样理解上式，数轴上离 1 距离大于 1 的所有点的集合。

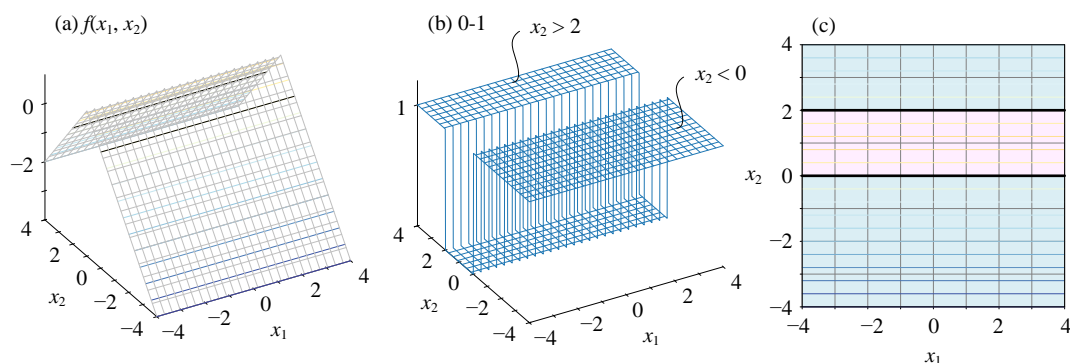
根据 (17) 构造如下二元函数  $f(x_1, x_2)$ ：

$$f(x_1, x_2) = -|x_2 - 1| + 1 \quad (18)$$

图 23 (a) 所示为二元函数  $f(x_1, x_2)$  在三维直角坐标系中图像。

图 23 (b) 中 1 表示满足 (16)，0 表示不满足 (16)。

图 23 (c) 中蓝色背景色区域满足 (16)。

图 23.  $x_2 < 0$  或  $x_2 > 2$  三个可视化方案

而几个不等式可以叠加构成不等式组。比如，(13) 和 (16) 叠加得到：

$$\begin{cases} -1 < x_1 < 2 \\ x_2 < 0 \text{ or } x_2 > 2 \end{cases} \quad (19)$$

这相当于在  $x_1x_2$  平面上，同时限定了  $x_1$  和  $x_2$  的取值范围。图 24 所示为同时满足 (19) 两组不等式的区域。请大家根据本节文末代码，自行绘制这两幅图像。

此外，(16) 就相当于两个不等式叠加，请大家用不等式叠加的思路再来分析 (16)。

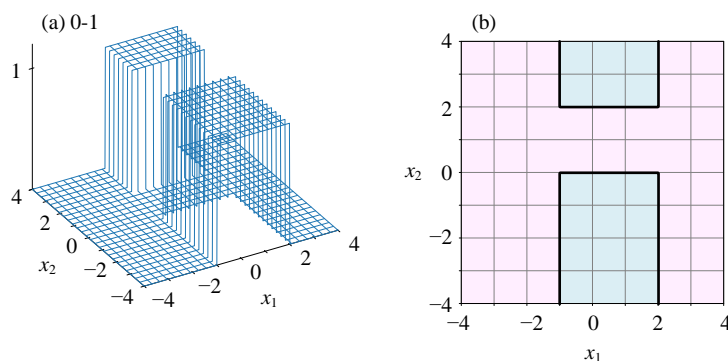


图 24. 同时满足  $-1 < x_1 < 2$  和  $x_2 < 0$  或  $x_2 > 2$  对应区域

## 线性不等式

线性不等式就是一次不等式，也就是不等式中单项式的变量次数最高为 1 次。线性不等式中可以含有若干未知量。虽然上下界也可以看做是线性不等式，但是在构造优化问题时，我们还是将两类不等式分开处理。

举个例子，给定如下线性不等式：

$$x_1 - x_2 < -1 \quad (20)$$

将 (20) 整理为：

$$x_1 - x_2 + 1 < 0 \quad (21)$$

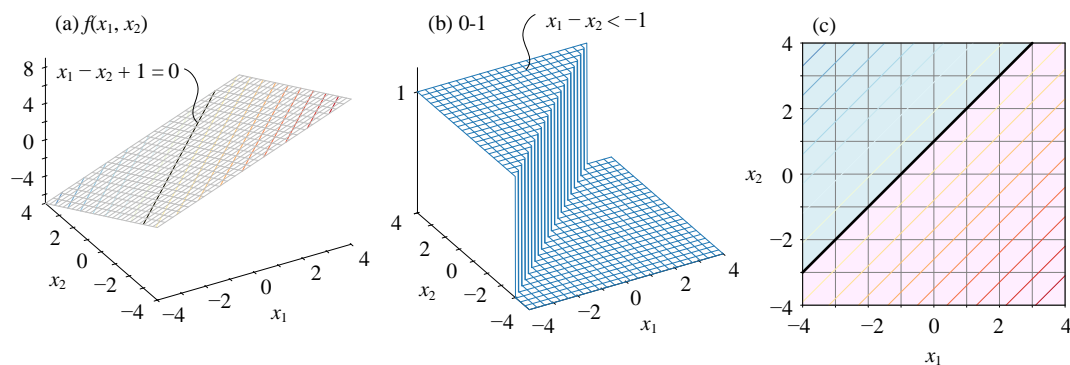
构造如下二元函数  $f(x_1, x_2)$ ：

$$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 1 \quad (22)$$

图 25 (a) 所示为  $f(x_1, x_2)$  在三维直角坐标系的图像为斜面。

图 25 (b) 中取值为 1 的区域满足 (21)。

图 25 (c) 中蓝色阴影的区域满足 (21)，黑色直线对应等式  $x_1 - x_2 + 1 = 0$ 。

图 25.  $x_1 - x_2 < -1$  三个可视化方案

再举一个例子，给定如下线性不等式：

$$x_1 > 2x_2 \quad (23)$$

将 (23) 整理为：

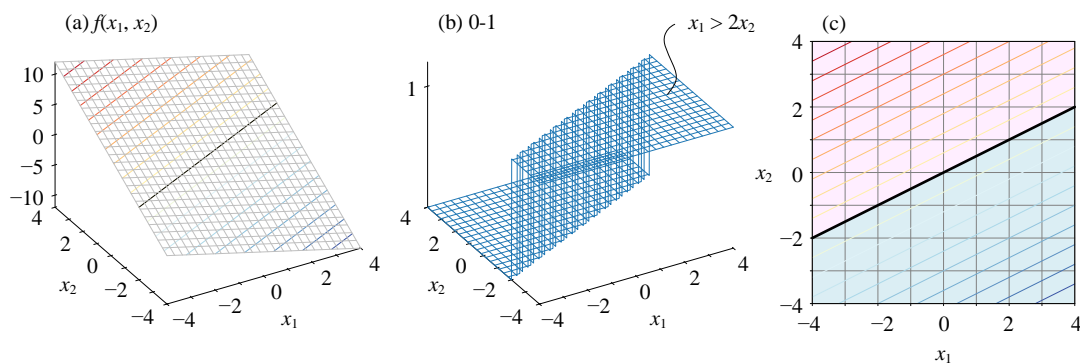
$$-x_1 + 2x_2 < 0 \quad (24)$$

根据 (24)，构造如下二元函数  $f(x_1, x_2)$ ：

$$f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \quad (25)$$

图 26 (a) 中蓝色等高线满足 (23)，而红色等高线不满足 (23)。

图 26 (b) 中取值为 1 和图 26 (c) 中蓝色阴影区域满足 (23)。

图 26.  $x_1 > 2x_2$  三个可视化方案

请大家将 (20) 和 (23) 两个不等式叠加构造一个不等式组，并绘制类似图 24 两图，可视化其划定的区域。

## 非线性不等式

除了线性不等式之外，其他各种形式的不等式都可以归类为非线性不等式。下面举三个例子。

给定如下绝对值构造的不等式：

$$|x_1 + x_2| < 1 \quad (26)$$

(26) 整理为：

$$|x_1 + x_2| - 1 < 0 \quad (27)$$

构造如下二元函数  $f(x_1, x_2)$ ：

$$f(x_1, x_2) = |x_1 + x_2| - 1 \quad (28)$$

图 27 (a) 所示为 (28) 对应三维直角坐标系图像。图 27 (b) 中取值为 1 对应的区域和图 27 (c) 中蓝色阴影区域满足 (26)。

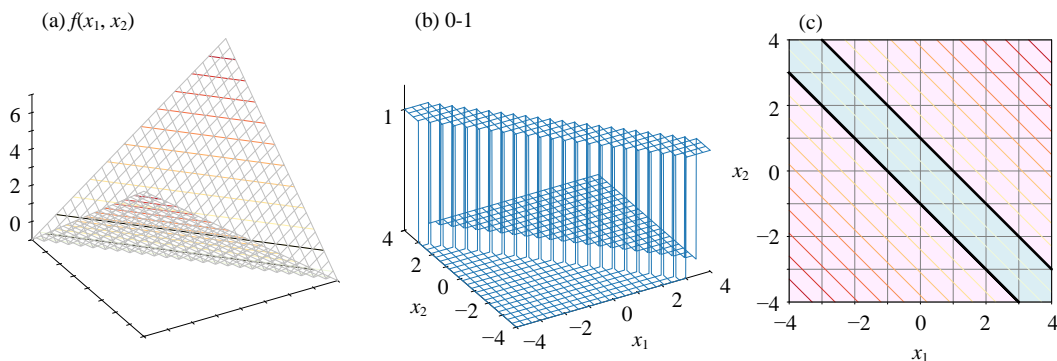


图 27.  $|x_1 + x_2| < 1$  三个可视化方案

此外，(26) 等价于：

$$(x_1 + x_2)^2 < 1 \quad (29)$$

请大家自行绘制 (29) 对应的三幅图像。

第二个例子，也用绝对值构造不等式：

$$|x_1| + |x_2| < 2 \quad (30)$$

将上式整理为：

$$|x_1| + |x_2| - 2 < 0 \quad (31)$$

构造如下二元函数  $f(x_1, x_2)$ :

$$f(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2| - 2 \quad (32)$$

图 28 (a) 所示为  $f(x_1, x_2)$  等高线，有意思的是等高线为一个个旋转  $45^\circ$  的正方形。大家还会在很多不同场合看到类似图像。图 28 (b) 中取值为 1 对应的区域和图 28 (c) 中蓝色阴影区域满足 (30)。

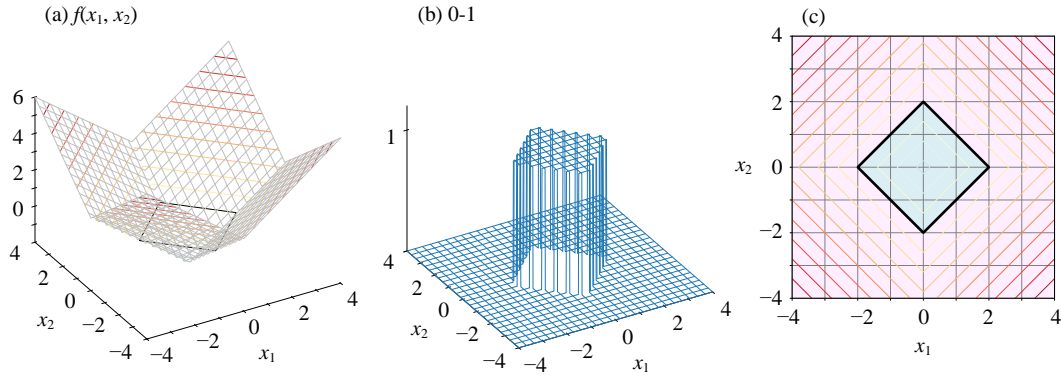


图 28.  $|x_1| + |x_2| < 2$  三个可视化方案

再看个例子，给定如下非线性不等式：

$$x_1^2 + x_2^2 < 4 \quad (33)$$

首先将整理为：

$$x_1^2 + x_2^2 - 4 < 0 \quad (34)$$

在  $x_1x_2$  平面上，构造如下二元函数  $f(x_1, x_2)$ :

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4 \quad (35)$$

图 29 (a) 所示为 (35) 中二元函数对应的曲面，曲面的等高线为同心圆。这种同心圆等高线还会在本书中反复出现，请大家留意。图 29 (b) 中取值为 1 对应的区域和图 28 (c) 中蓝色阴影区域满足 (33)。

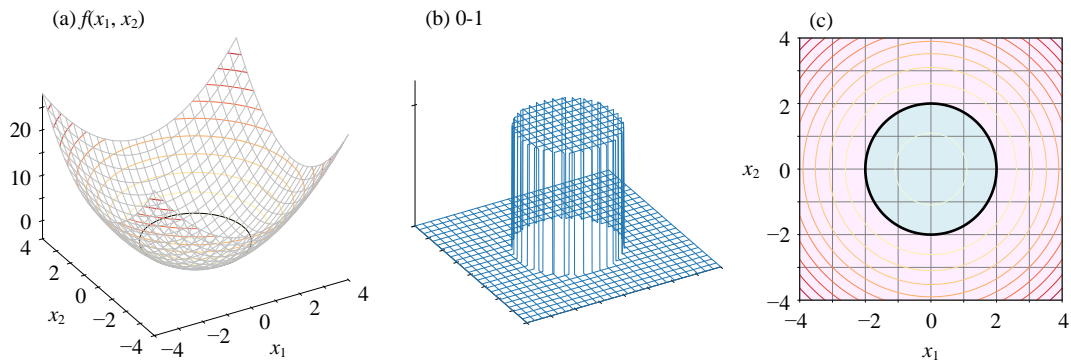


图 29.  $x_1^2 + x_2^2 < 4$  三个可视化方案

此外, (33) 等价于:

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 2 \quad (36)$$

请大家自行绘制 (36) 对应的三幅图像。另外, 请将 (26) 和 (33) 两个不等式叠加构造不等式组, 并绘制取值区域。



Bk3\_Ch6\_03.py 绘制本节大部分图像。

## 6.6 三维极坐标

三维空间中也可以构造类似平面极坐标的坐标系, 如图 30 (a) 所示的**球坐标系** (spherical coordinate system) 和图 30 (b) 所示的**圆柱坐标系** (cylindrical coordinate system)。

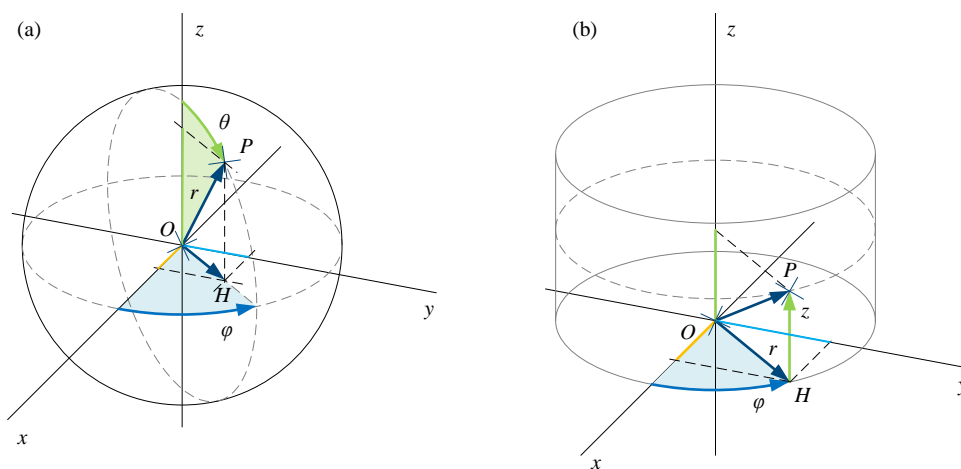


图 30. 球坐标系和圆柱坐标系

### 球坐标系

图 30 (a) 所示, 球坐标相当于由两个平面极坐标系构造。

球坐标系中定位点  $P$  用的是球坐标  $(r, \theta, \varphi)$ 。其中,  $r$  是  $P$  与原点  $O$  之间距离, 也叫**径向距离** (radial distance);  $\theta$  是  $OP$  连线和  $z$  轴正方向夹角, 叫做**极角** (polar angle);  $OP$  连线在  $xy$  平面投影线为  $OH$ ,  $\varphi$  是  $OH$  和  $x$  轴正方向夹角, 叫做**方位角** (azimuth angle)。



球坐标到三维直角坐标系坐标的转化关系为：

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = \underbrace{r \cos \theta}_{PH} \end{cases} \quad (37)$$

图 31 所示正圆球体对应解析式为：

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2 \quad (38)$$

其中， $r = 1$ 。在绘制图 31 中这个正圆球体时，采用的就是球坐标。

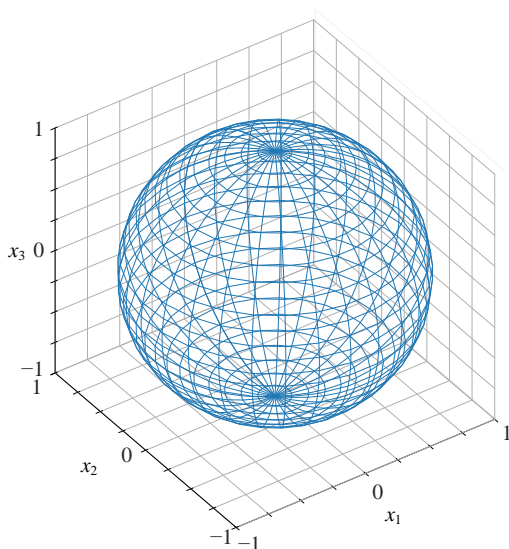


图 31. 球体网格面



Bk3\_Ch6\_04.py 绘制图 31。

## 圆柱坐标系

图 30 (b) 所示，圆柱坐标系相当于二维极坐标所在平面上在极点处升起一根  $z$  轴。

在圆柱坐标系中，点  $P$  的坐标为  $(r, \varphi, z)$ 。这时， $r$  是  $P$  点与  $z$  轴的垂直距离； $\varphi$  还是  $OP$  在  $xy$  平面的投影线  $OH$  与正  $x$  轴之间的夹角； $z$  和三维直角坐标系的  $z$  一致。



从圆柱坐标到三维直角坐标系坐标转化关系为：

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (39)$$

上一章介绍的参数方程可以扩展到三维乃至多维。`plot3d_parametric_line()` 函数可以用来绘制参数方程构造的三维线图。

图 32 所示三维线图的参数方程就是采用圆柱坐标：

$$\begin{cases} x_1 = \cos(t) \\ x_2 = \sin(t) \\ x_3 = t \end{cases} \quad (40)$$

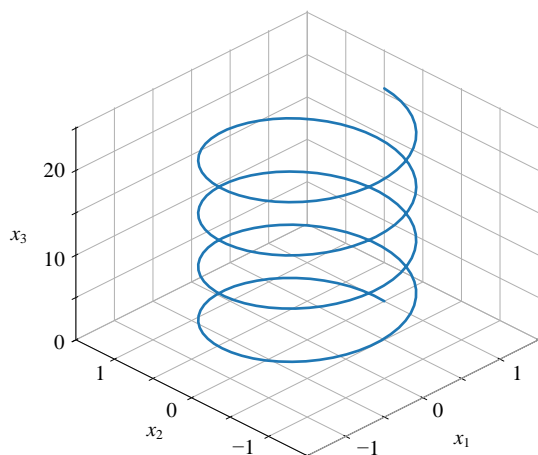


图 32. 三维参数方程线图



`Bk3_Ch6_05.py` 绘制图 32。图 32 也可以用 `plot3d_parametric_line()` 函数绘制，代码文件为 `Bk3_Ch6_06.py`。



坐标系让代数和几何紧密结合，坐标系使几何参数化，让代数可视化。

接下来第 7、8、9 三章，我们聊一聊解析几何相关内容。请大家特别注意距离、椭圆这两个数学工具的应用场合。

坐标系给一个个函数插上了翅膀，让它们能够在二维平面和三维空间自由翱翔。函数是本书第 10 到 13 章重点讲解的内容。