

# 3 Geometry 几何

音乐之美由耳朵来感受，几何之美让眼睛去欣赏



不懂几何，勿入斯门。

*Let no one destitute of geometry enter my doors.*

—— 柏拉图 (Plato) | 古希腊哲学家 | 424/423 ~ 348/347 BC



- ▶ `ax.add_patch()` 绘制图形
- ▶ `math.degrees()` 将弧度转换为角度
- ▶ `math.radians()` 将角度转换成弧度
- ▶ `matplotlib.patches.Circle()` 创建正圆图形
- ▶ `matplotlib.patches.RegularPolygon()` 创建正多边形图形
- ▶ `numpy.arccos()` 计算反余弦
- ▶ `numpy.arcsin()` 计算反正弦
- ▶ `numpy.arctan()` 计算反正切
- ▶ `numpy.cos()` 计算余弦值
- ▶ `numpy.deg2rad()` 将角度转化为弧度
- ▶ `numpy.rad2deg()` 将弧度转化为角度
- ▶ `numpy.sin()` 计算正弦值
- ▶ `numpy.tan()` 计算正切值

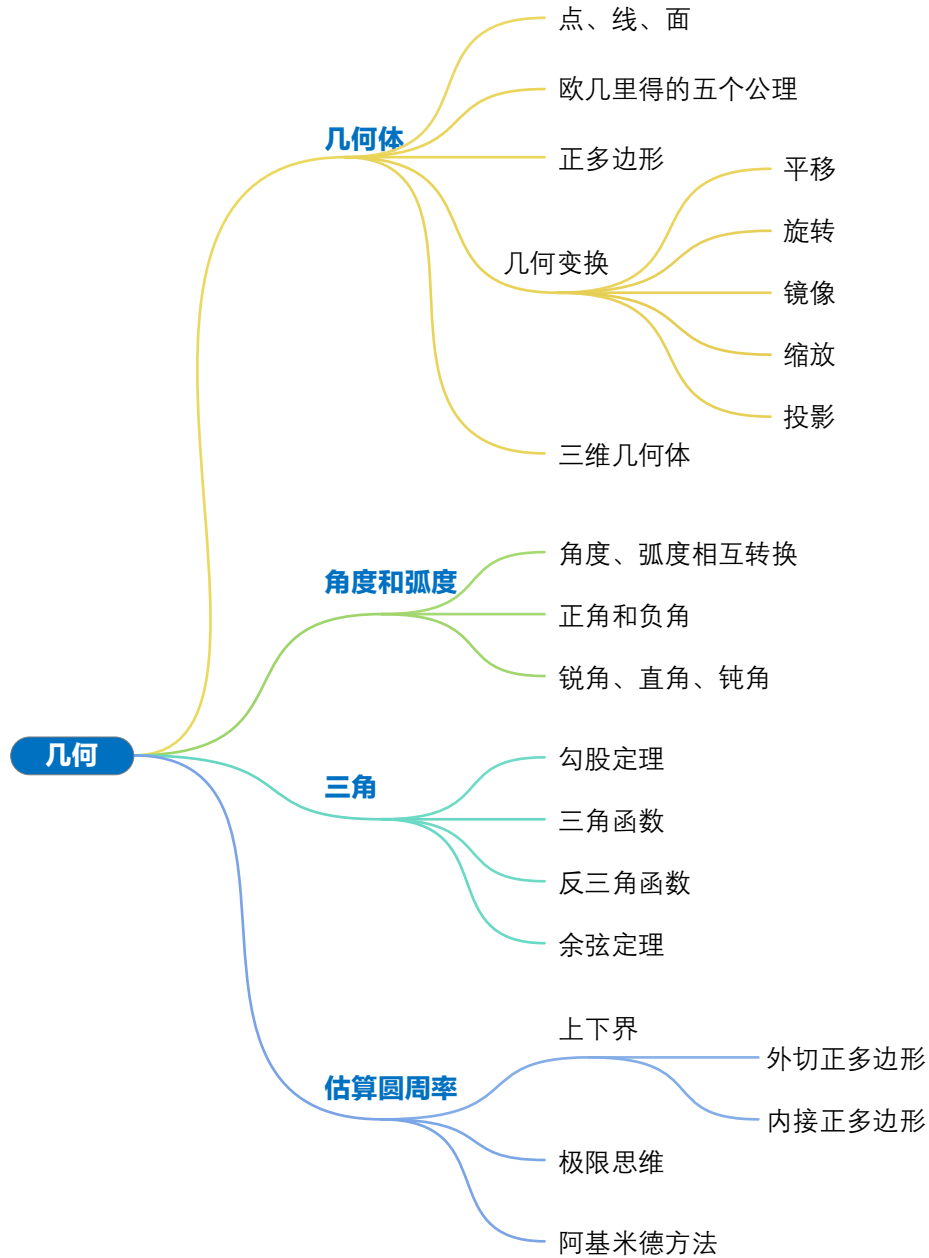
本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



## 3.1 几何缘起：根植大地，求索星空

毫不夸张地说，几何思维印刻在人类基因中。生而为人，时时刻刻看到的、触摸的都是各种各样的几何形体。

大家现在不妨停下来看看、摸摸周围环境中的物体，相信你一定会惊叹整个物质世界就是几何的世界。

宏观如天体，微观至原子，几何无处不在。正如**约翰内斯·开普勒** (Johannes Kepler, 1571 ~ 1630) 所言“但凡有物质的地方，就有几何。”

哪怕在遥远的古代文明，人类活动也离不开几何知识，丈量距离、测绘地形、估算面积、计算体积、营造房屋、设计工具、制作车轮、工艺美术...无处不需要几何这个数学工具。

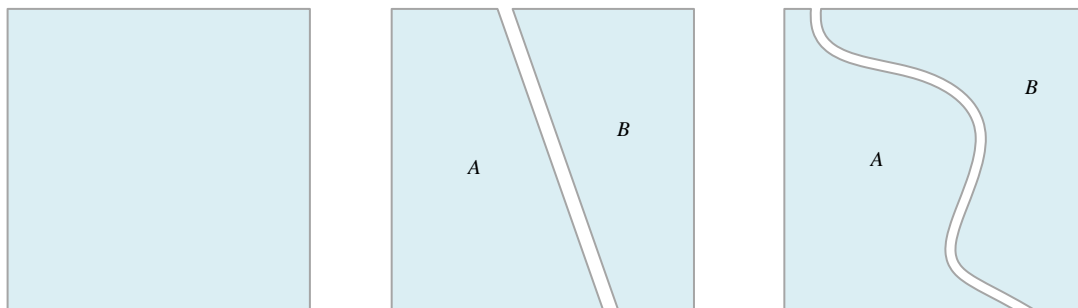
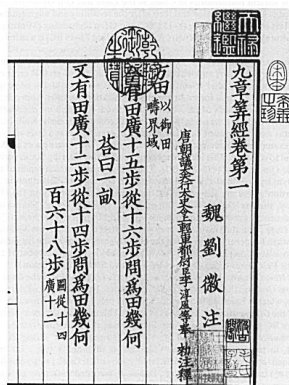


图 1. 各种形状田地地块

几何滥觞于田间地头。在古埃及，尼罗河每年都要淹没河两岸。当洪水退去，留下的肥沃土壤让河两岸平原的农作物生长。但是洪水同样冲走了标示不同耕地界桩。

法老每年都要派大量测量员重新丈量土地。测绘员们用打结的绳子去丈量土地和角度，以便重置这些界桩。计算矩形、三角形农田面积当然简单。对于对于复杂的几何形体，测绘员经常将土地分割成矩形和三角形来估算土地面积。古埃及的几何知识则随着测量精度提高而不断累积精进。

无独有偶，中国古代重要的数学典籍之一《九章算术》的第一章名为“方田”。这一章多数题目以丈量土地为例，讲解如何计算长方形、三角形、梯形、圆形等等各式几何形状的面积。



本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

图 2. 《九章算术》第一章开篇

几何学的重大飞跃来自古希腊。古希腊人创造了几何 geometron (英文: geometry) 这个词; “geo”在希腊语里是“大地”的意思, “metron”的意思是“测量”。

在古希腊, 几何学受到高度重视。几何是博雅教育七艺的重要一门课程。据传说, 柏拉图学院门口刻着如下这句话: “不懂几何者, 不许入内。”

图 3 所示为古希腊几何发展时间轴上重要的数学家, 以及同时代的其他伟大思想家。值得注意的是, 中国春秋时代的孔子和苏格拉底、柏拉图、亚里士多德, 竟然是同属一个时代。东西方两条历史轴线给人平行时空的错觉。

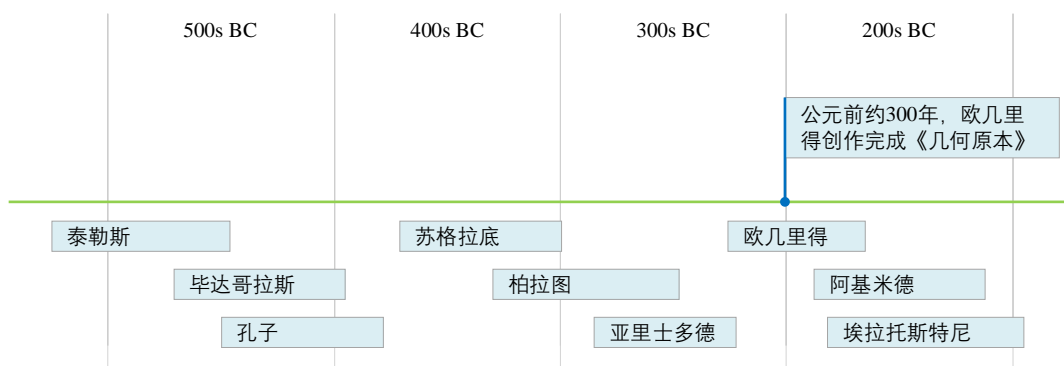


图 3. 古希腊几何发展历史时间轴



#### 欧几里得 (Euclid)

古希腊数学家 | 约公元前330年 ~ 公元前275年

被称为“几何之父”，他的《几何原本》堪称西方现代数学的开山之作



古希腊数学家中关键人物是**欧几里得** (Euclid)，他的巨著《**几何原本**》(The *Elements*) 首次尝试将几何归纳成一个系统。

不夸张地说，欧几里得《几何原本》是整个人类历史上最成功、影响最深刻的数学教科书，没有之一。《几何原本》不是习题集，它引入严谨的推理，使得数学体系化。

古希腊的几何学发展要远远领先于其他数学门类，可以说古希腊的算术和代数知识也都是建立在几何学基础之上。而代数的大发展要归功于一位波斯数学家——花拉子密，这是我们下一章要介绍的人物。

中文“几何”一词源自于《几何原本》的翻译。1607 年，明末科学家徐光启和意大利传教士**利玛窦** (Matteo Ricci) 共同翻译完成《几何原本》前六章。

他们确定了包括“几何”、“点”、“直线”、“角”等大量中文译名。“几何”一词的翻译特别精妙，发音取自 geo，而“几何”二字的中文又有“大小如何”的含义。《九章算术》几乎所有的题目都以“几何”这一提问结束，比如“问：为田几何？”

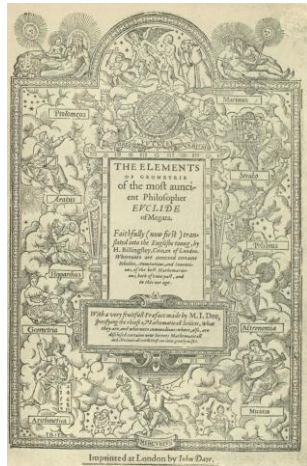
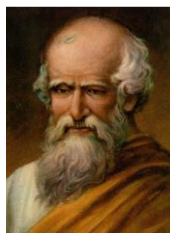


图 4. 《几何原本》1570 年首次被翻译为英文版



图 5. 《中国图说》(China Illustrata) 中插图描绘利玛窦和徐光启

在估算圆周率的竞赛中，**阿基米德** (Archimedes) 写下浓墨重彩的一笔。阿基米德利用圆内接正多边形和圆外切正多边形，估算圆周率在  $223/71$  和  $22/7$  之间，即 3.140845 和 3.142857 之间。



**阿基米德** (Carl Friedrich Gauss)

古希腊数学家、物理学家 | 公元前287年 ~ 公元前212年  
常被称作“力学之父”，估算圆周率



公元前 212 年，阿基米德的家乡被罗马军队攻陷时，他还在潜心研究几何问题。罗马士兵闯入他的家，阿基米德大声训斥这些不速之客，“别弄乱我的圆”。但是，罗马士兵还是踩坏了画在沙盘上的几何图形，并杀死了阿基米德。

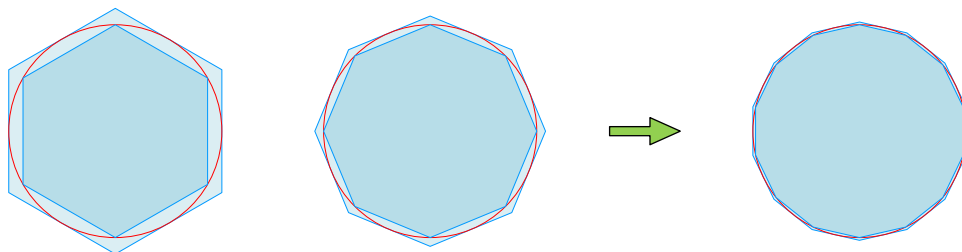


图 6. 圆形内接和外切正 6、正 8 边、正 16 边形

几何学有纬地经天之功。比如，利用相似三角形原理，古希腊数学家**埃拉托斯特尼** (Eratosthenes) 估算地球直径。

正午时分，在点 A (阿斯旺) 太阳光垂直射入深井中，井底可见太阳倒影。此时，在点 B (亚历山大港)，埃拉托斯特尼找人测量一个石塔影子的长度。

利用石塔的高度和影子的长度，埃拉托斯特尼计算得到图 7 中  $\theta = 7^\circ$ ，也就是 A 和 B 两点的距离为整个地球圆周的  $7/360$ 。

埃拉托斯特尼恰好知道 AB 距离，从而估算地球的周长。进而计算得到地球周长在 39,690 千米到 46,620 千米之间，误差约 2%。

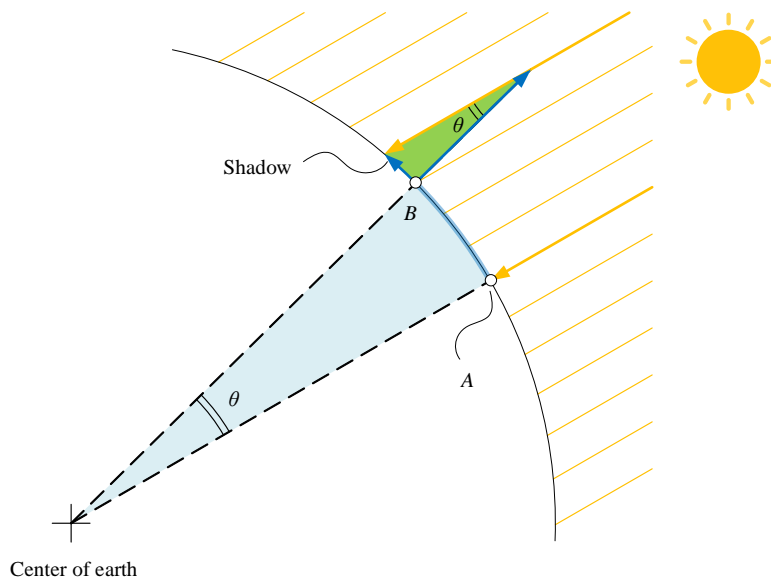


图 7. 埃拉托斯特尼计算地球直径用到的几何知识

**托勒密** (Claudius Ptolemy) 在约 150 年创作《天文学大成》 (*Almagest*)。这本书可以说是代表了古希腊天文学的最高水平，它也是古希腊几何思维在天文学领域的结晶。

托勒密总结前人成果，在书中明确提出**地心说** (geocentric model)——地球位于宇宙中心，固定不动，星体绕地球运动。此外，《天文学大成》中给出了人类历史上第一个系统建立的三角函数表。



**托勒密** (Claudius Ptolemy)  
希腊数学家、天文学 | 100年 ~ 170年  
创作《天文学大成》，系统提出地心说



然而，托勒密的地心说被宗教思想奉为圭臬，牢牢禁锢人类长达一千两百多年，直到**哥白尼** (Nicolaus Copernicus, 1473 ~ 1543) 唤醒人类沉睡的思想世界。正是利用古希腊发展的圆锥曲线知识，开普勒提出了行星运动三定律。



圆锥曲线是本书第 8、9 章要介绍的内容。



图 8. 后人绘制的托勒密地心说模型



## 3.2 点动成线，线动成面，面动成体

点动成线，线动成面，面动成体——相信大家对这句话耳熟能详。点没有维度，线是一维，面是二维，体是三维。当然，在数学的世界，四维乃至多维都是存在的。

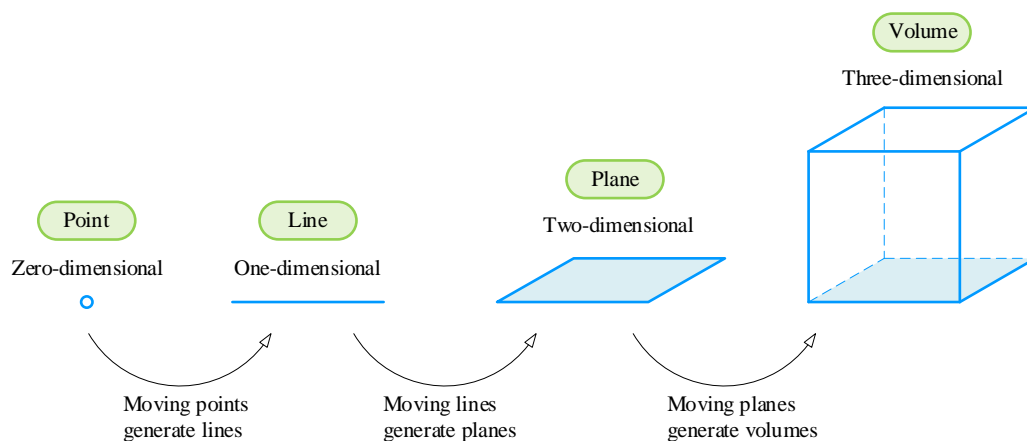


图 9. 点动成线，线动成面，面动成体

### 点

点确定空间的一个位置，点本身没有长度、面积等几何属性。

所有几何图形都离不开点，图 10 所示为常见的几种点——**端点** (endpoint)、**中点** (midpoint)、**起点** (initial point)、**终点** (terminal point)、**圆心** (center)、**切点** (point of tangency)、**顶点** (vertex)、**交点** (point of intersection)。点和点之间的线段长度叫**距离** (distance)。

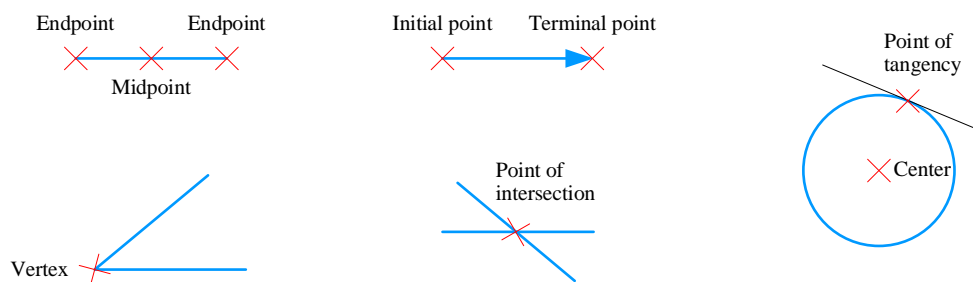


图 10. 几种点

### 线



如图 11 所示，**直线** (line) **沿两个方向无限延伸** (extends in both directions without end)，**没有端点** (has no endpoints)。

**射线** (ray 或 half-line) 始于一端点，仅沿一个方向无限延伸。

**线段** (line segment) 有两个**端点** (endpoint)。

**向量** (vector) 则是有方向的线段。

线段具有**长度** (length) 这个几何性质，但是没有面积这个性质。

给定参考系，线又可以分为**水平线** (horizontal line)、**斜线** (oblique line) 和**竖直线** (vertical line)。

图 11 还给出其他几种线：**边** (edge)、**曲线** (curve 或 curved line)、**等高线** (contour line)、**法线** (normal line)、**切线** (tangent line)、**割线** (secant line) 等。

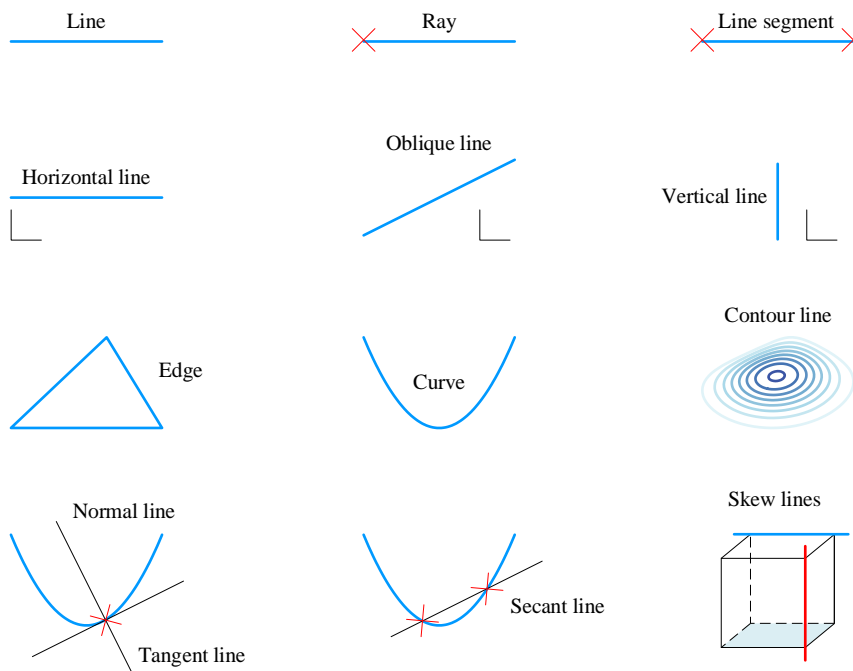


图 11. 几种线

在平面上，线与线之间有四种常见的关系：**平行** (parallel)、**相交** (intersecting)、**垂直** (perpendicular) 和**重合** (coinciding)。

两条线平行可以记作  $l_1 \parallel l_2$  (读作 line  $l$  sub one is parallel to the line  $l$  sub two)。 $l_1$  与  $l_2$  相交于点  $P$  可以读作“line  $l$  sub one intersects the line  $l$  sub two at point capital  $P$ ”。两条线垂直可以记作  $l_1 \perp l_2$ 。

(读作 line  $l$  sub one is perpendicular to the line  $l$  sub two)。三维空间中，两条直线还可以互为**异面线** (skew line)。

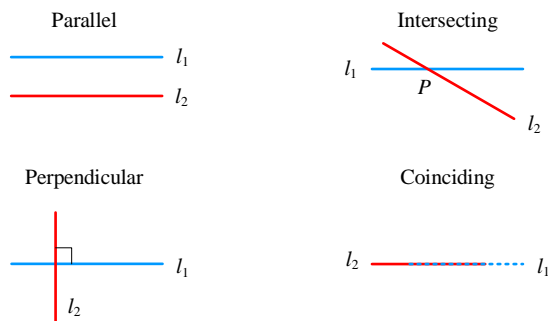


图 12. 平面上两条线的关系

如图 13 所示，可视化时还会用到不同样式的线型，比如**实线** (solid line 或 continuous line)、**粗实线** (heavy solid line 或 continuous thick line)、**点虚线** (dotted line)、**短划线** (dashed line)、**点划线** (dash-dotted line) 等等。

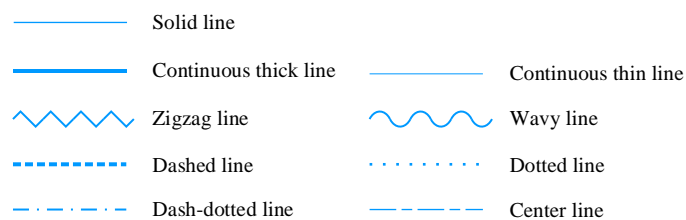


图 13. 几种线的样式

## 欧几里得的五个公理

在《几何原本》中，欧几里得提出五个公理：

- ▶ 任意两点可以画一条直线；
- ▶ 任意线段都可以无限延伸成一条直线；
- ▶ 给定任意线段，以该线段为半径、一个端点为圆心，可以画一个圆；
- ▶ 所有直角都全等；
- ▶ 两直线被第三条直线所截，如果同侧两内角之和小于两个直角之和，则两条直线则会在该侧相交。

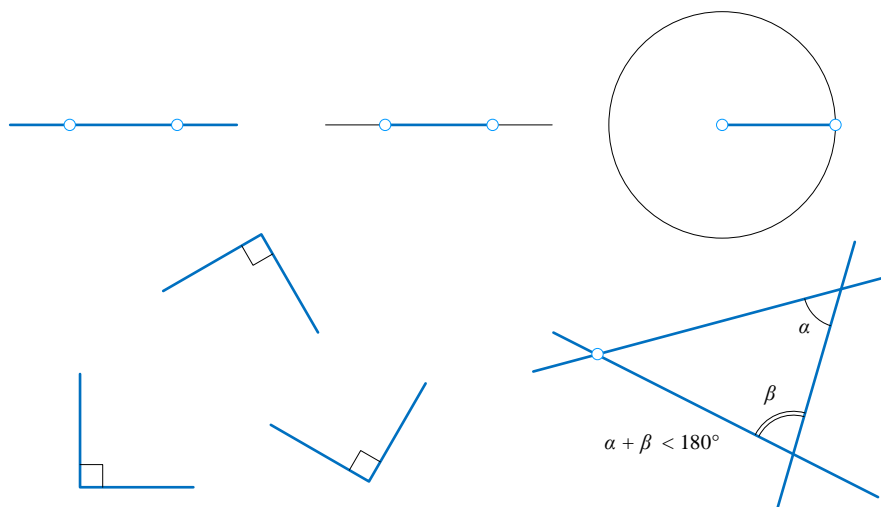


图 14. 欧几里得提出的五个几何公理

以五个公理为基础，欧几里得一步步建立起几何学大厦。坚持第五条定理，我们在欧几里得几何体系之内。而去掉第五条公理，则进入非欧几何体系。值得一提的是，非欧几何中的黎曼几何为爱因斯坦的广义相对论提供了数学工具。

## 正多边形

**正多边形** (regular polygons) 是边长相等的多边形，正多边形内角相等。我们将在圆周率估算中用到正多边形相关知识。

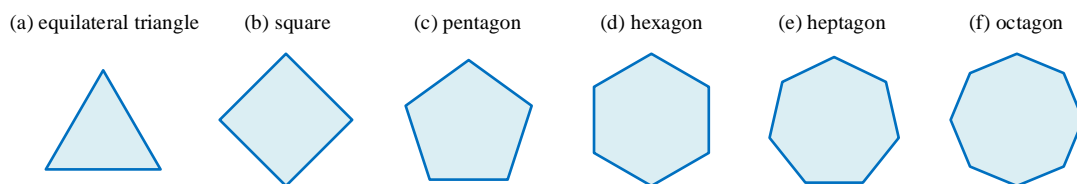


图 15. 六个正多边形



Bk3\_Ch3\_01.py 绘制图 15 中六个正多边形。

## 三维几何体

图 16 所示为常见三维几何体，它们依次是：**正球形** (sphere)、**圆柱体** (cylinder)、**圆锥** (cone)、**锥台** (cone frustum)、**正方体**、**正六面体** (cube)、**长方体** (cuboid)、**平行六面体** (parallelepiped)、**四棱台** (square pyramid frustum)、**四棱锥** (square-based pyramid)、**三棱锥** (triangle-based pyramid)、**三棱柱** (triangular prism)、**四面体** (tetrahedron)、**八面体** (octahedron)、**五棱柱** (pentagonal prism)、**六棱柱** (hexagonal prism) 和**五棱锥** (pentagonal pyramid)。

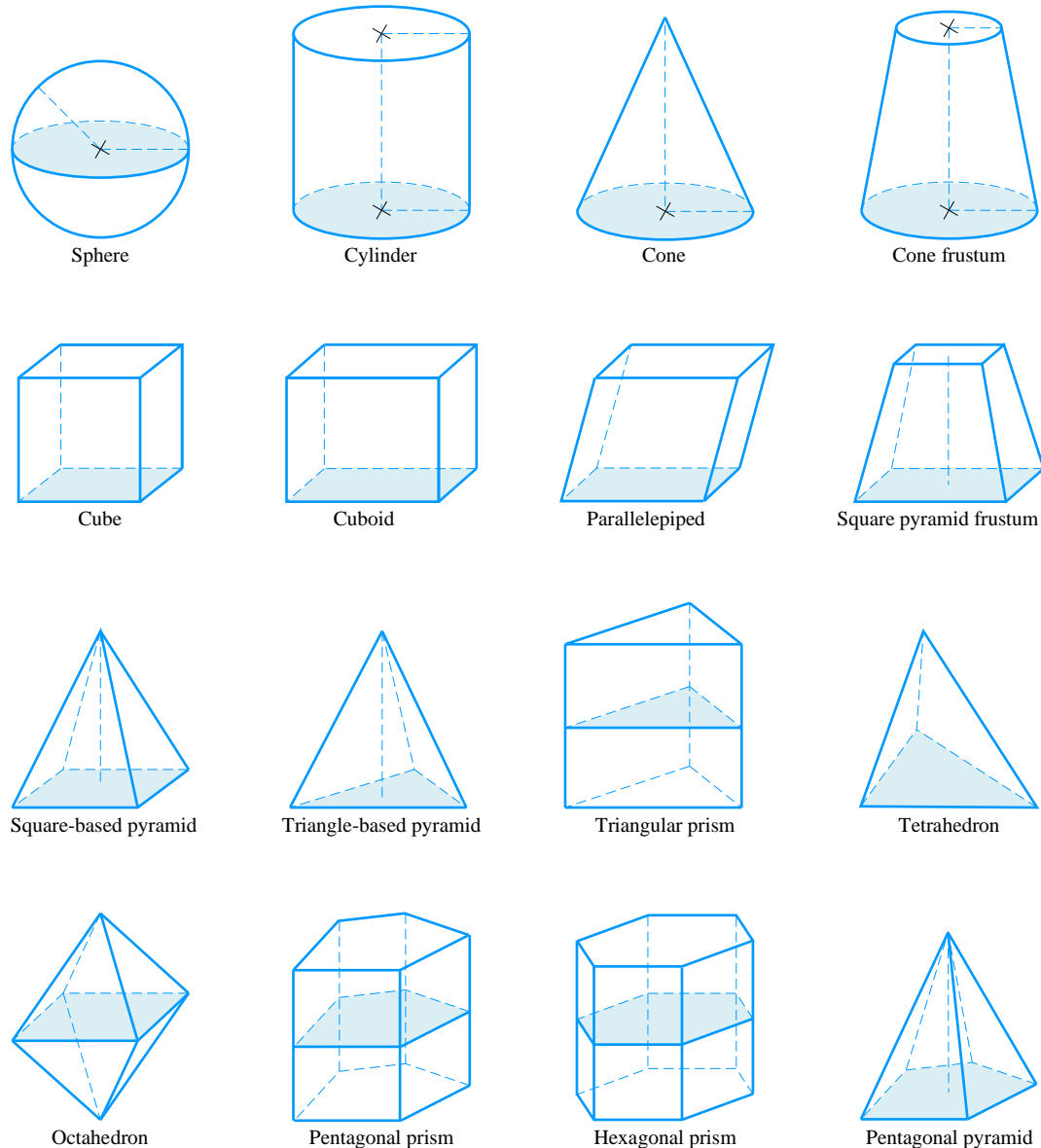


图 16. 常见三维几何体

**柏拉图立体** (Platonic solid), 又称正多面体。图 17 所示为五个正多面体, 包括**正四面体** (tetrahedron)、**正方体**、**正六面体** (cube)、**正八面体** (octahedron)、**正十二面体** (dodecahedron) 和**正二十面体** (icosahedron)。

正多面体的每个面全等, 均为**正多边形** (regular polygons)。图 18 所示为五个正多面体展开得到的平面图形。表 1 总结五个正多面体的结构特征。

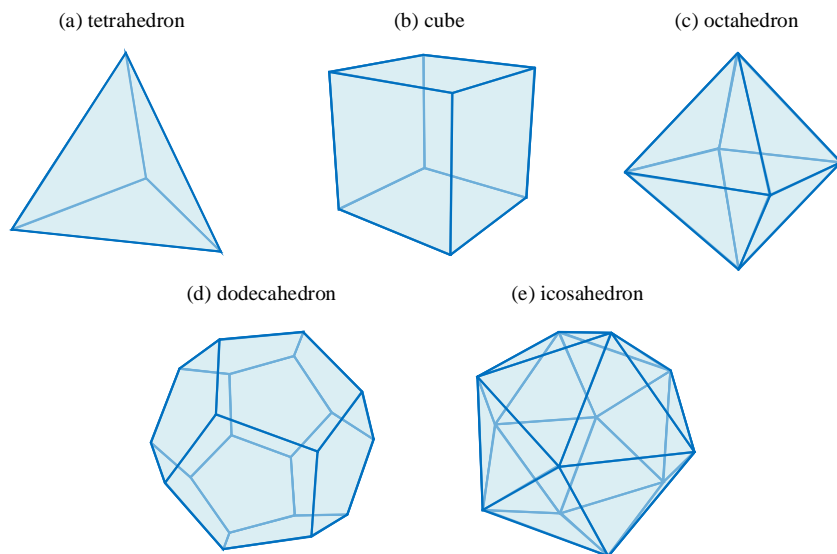


图 17. 五个正多面体

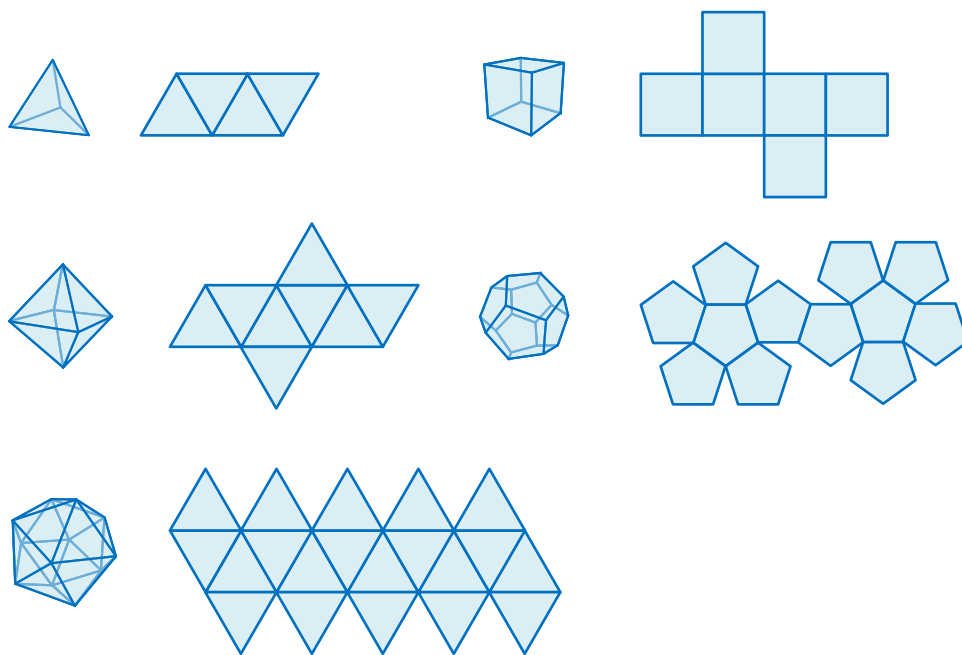


图 18. 五个正多面体展开得到的平面图形

本 PDF 文件为作者草稿, 发布目的为方便读者在移动终端学习, 终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有, 请勿商用, 引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载: <https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教, 本书专属邮箱: [jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

表 1. 正多面体的特征

正多面体	顶点数	边数	面数	面形状
Tetrahedron	4	6	4	Equilateral triangle
Cube	8	12	6	Square
Octahedron	6	12	8	Equilateral triangle
Dodecahedron	20	30	12	Pentagon
Icosahedron	12	30	20	Equilateral triangle

## 几何变换

**几何变换** (geometric transformation) 是本系列丛书中重要的话题之一。我们将在函数变换、线性变换、多元高斯分布等话题中用到几何变换。

如图 19 所示，在平面上，可以通过**平移** (translate)、**旋转** (rotation)、**镜像** (reflection)、**缩放** (scaling)、**投影** (projection) 将某个图形变换得到新的图形。这些几何变换还可以按一定顺序组合完成特定变换。

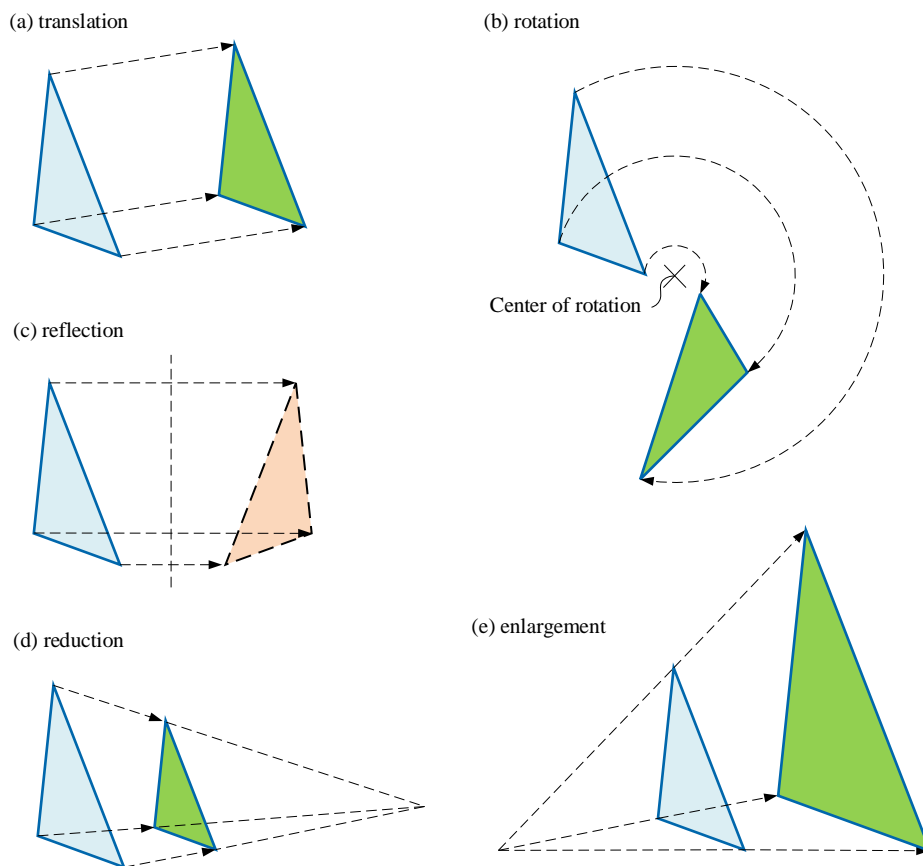


图 19. 常见几何变换

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

## 投影

大家平时一定会见到阳光和灯光下各种物体留下的影子，这就是投影。比如，图 20 所示为一个马克杯在不同角度的投影。

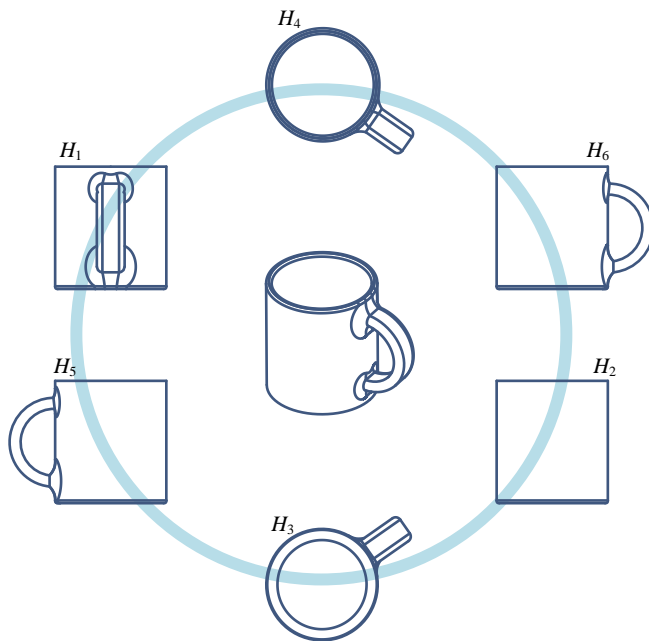


图 20. 咖啡杯在六个方向投影图像

几何中，投影指的是将图形的影子投到一个面或一条线上。如图 21 所示，点可以投影到直线或平面上，影子也是一个点；线段投影到平面上，得到可以是线段。

数学中最常见的投影是正投影。正投影中，投影线（图 21 中虚线）垂直于投影面。线性代数中，我们管这类投影叫**正交投影** (orthogonal projection)

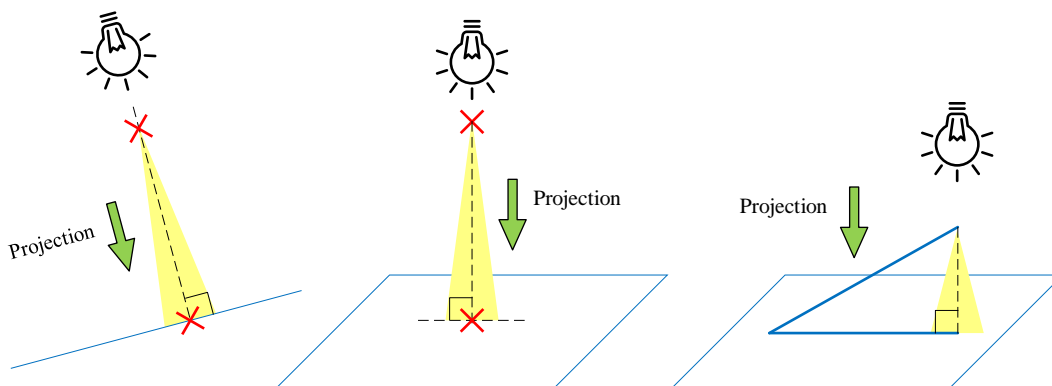


图 21. 投影



## 3.3 角度和弧度

### 角度

**度** (degree) 是一种常用的角度度量单位。角度可以用**量角器** (protractor) 测量。**一周** (a full circle、one revolution 或 one rotation) 对应  $360^\circ$ 。 $1^\circ$  对应 60 **分** (minute)，即  $1^\circ = 60'$ 。 $1'$  对应 60 **秒** (second)，即  $1' = 60''$ 。

形如  $25.1875^\circ$  被称作**小数角度** (decimal degree)，可以换算得到  $25^\circ 11' 15''$  (twenty five degrees eleven minutes and fifteen seconds)。

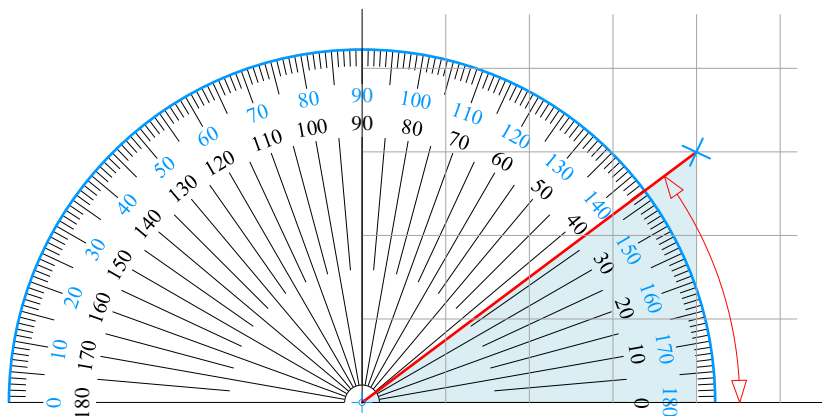


图 22. 量角器测量角度

### 弧度

**弧度** (radian) 常简写作 rad。1 个弧度相当于  $1 \text{ rad} \approx 57.2958^\circ$ 。

在 `math` 库中，`math.radians()` 函数将角度转换成弧度；`math.degrees()` 将弧度转换为角度。NumPy 中，可以用 `numpy.rad2deg()` 函数将弧度转化为角度，用 `numpy.deg2rad()` 将角度转化为弧度。

常用弧度和角度的换算关系如下：

$$\begin{aligned}
 360^\circ &= 2\pi \text{ rad} \\
 180^\circ &= \pi \text{ rad} \\
 90^\circ &= \frac{\pi}{2} \text{ rad} \\
 45^\circ &= \frac{\pi}{4} \text{ rad} \\
 30^\circ &= \frac{\pi}{6} \text{ rad}
 \end{aligned} \tag{1}$$

## 正角和负角

如果旋转为**逆时针** (counter-clockwise), 角度为**正角** (positive angle)。如果旋转为**顺时针** (clockwise), 角度为**负角** (negative angle)。

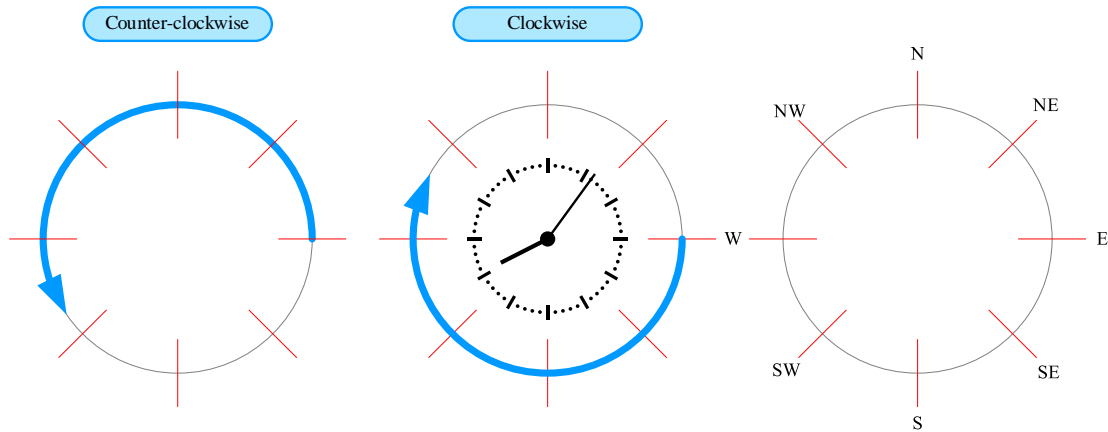


图 23. 逆时针、顺时针和方位

## 锐角、直角、钝角

**锐角** (acute angle) 是指小于  $90^\circ$  的角, **直角** (right angle) 是指等于  $90^\circ$  的角, **钝角** (obtuse angle) 是指大于  $90^\circ$  并且小于  $180^\circ$  的角。

请大家特别注意这三个角度, 在线性代数、数据科学中它们的内涵将得到不断丰富。

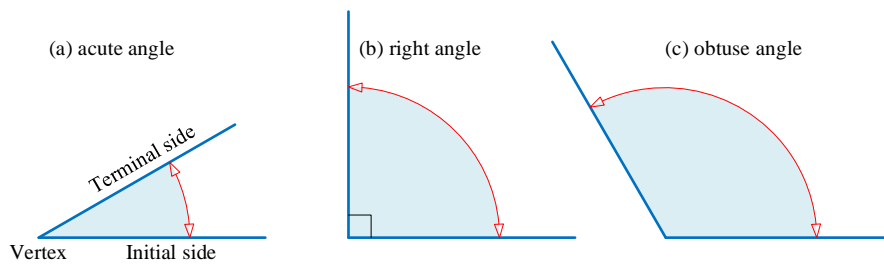


图 24. 锐角、直角和钝角

# 3.4 勾股定理到三角函数

## 勾股定理

本 PDF 文件为作者草稿, 发布目的为方便读者在移动终端学习, 终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有, 请勿商用, 引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载: <https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教, 本书专属邮箱: [jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

《周髀算经》编写于公元前一世纪之前，其中记录着商高与周公的一段对话。商高说“故折矩，勾广三，股修四，经隅五。”后人把这一发现简化成——勾三、股四、弦五。《九章算术》的最后一章讲解的也是勾股定理。

满足勾股定理的一组整数，比如 (3, 4, 5)，叫做勾股数。

在西方，勾股定理被称作**毕达哥拉斯定理** (Pythagorean Theorem)。

古代很多文明都独立发现了勾股定理。原因也不难理解，古时人们在丈量土地，建造房屋时，都离不开直角。

古埃及人善于使用绳索构造特定几何关系。比如，绳索等距打结，就可以充当带刻度的直尺。绳索一端固定，另外一段绕固定端旋转一周，就可以得到正圆。

古埃及人也发现 3:4:5 的直角三角形。据此，利用绳索可以轻松获得直角。绳索等距打 13 个结，形成 12 段等长线段。按照 3:4:5 比例分配等距线段，3 等分和 4 等分的两边的夹角便是直角。

勾股定理的一般形式如下：

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (2)$$

如图 25 所示， $a$  和  $b$  为直角边， $c$  为斜边。图中， $a^2$ 、 $b^2$ 、 $c^2$  分别为三个正方形的面积。

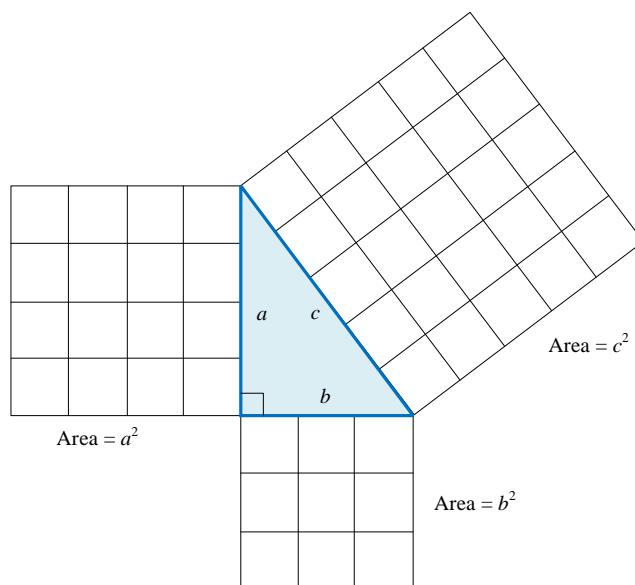


图 25. 图解勾股定理

## 三角函数

**三角函数** (trigonometric function) 的自变量为弧度角度，因变量为直角三角形斜边、邻边、对边中两个长度的比值。每个比值都有其特定的名字。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

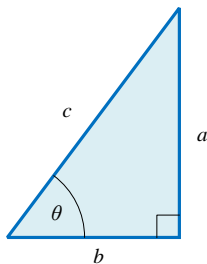


图 26. 直角三角形中定义三角函数

如图 26 所示， $\theta$  的**正弦** (sine) 是对边  $a$  与斜边  $c$  的比值：

$$\sin \theta = \frac{a}{c} \quad (3)$$

`numpy.sin()` 可以用来计算正弦值，输入为弧度。

$\theta$  的**余弦** (cosine) 是邻边  $b$  与斜边  $c$  的比值：

$$\cos \theta = \frac{b}{c} \quad (4)$$

`numpy.cos()` 可以用来计算余弦值，输入同样为弧度。

$\theta$  的**正切** (tangent) 是对边  $a$  与邻边  $b$  的比值：

$$\tan \theta = \frac{a}{b} \quad (5)$$

`numpy.tan()` 可以用来计算正切值，输入也为弧度。

$\theta$  的**余切** (cotangent) 是邻边  $b$  与对边  $a$  的比值，是正切的倒数：

$$\cot \theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan \theta} \quad (6)$$

$\theta$  的**正割** (secant) 是斜边  $c$  与邻边  $b$  的比值，是余弦的倒数：

$$\sec \theta = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos \theta} \quad (7)$$

$\theta$  的**余割** (cosecant) 是斜边  $c$  与对边  $a$  的比值，是正弦的倒数：

$$\csc \theta = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin \theta} \quad (8)$$

## 反三角函数

**反三角函数** (inverse trigonometric function) 则是通过三角函数值来反求弧度或角度。表 2 所示为三个常用反三角函数中英文名称、NumPy 函数等。

表 2. 常用三个反三角函数

数学表达	英文表达	中文表达	NumPy 函数
$\arcsin \theta$	arc sine theta inverse sine theta	反正弦	<code>numpy.arcsin()</code>
$\arccos \theta$	arc cosine theta inverse cosine theta	反余弦	<code>numpy.arccos()</code>
$\arctan \theta$	arc tangent theta inverse tangent theta	反正切	<code>numpy.arctan()</code>

## 余弦定理

本节最后简单介绍**余弦定理** (law of cosines)。给定如图 27 所示三角形，余弦定理的三个等式如下：

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \end{cases} \quad (9)$$

当  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  三者之一为直角时，(9) 中的一个等式就变成勾股定理等式。

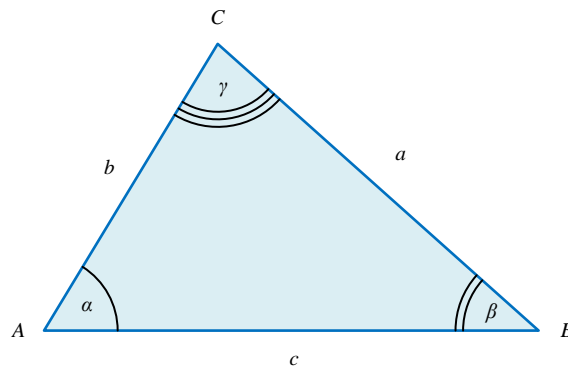


图 27. 余弦定理

在机器学习和数据科学中，余弦定理格外重要。我们会在向量加减法、方差协方差运算、余弦相似度等看到余弦定理的影子。

## 3.5 圆周率估算初赛：割圆术

**圆周率** ( $\pi$ ,  $\pi$ ) 是圆的周长和直径之比。

估算圆周率可以看做是不同时空数学家之间的一场竞赛，这场竞赛的标准就是看谁的估算圆周率的精度更准、效率更高。

利用不同的数学工具估算圆周率也是本书一条重要的线索，大家可以从时间维度上看到数学思维、数学工具的迭代发展。

本节介绍数学方法的相当于圆周率估算的“初赛”，这时期数学家使用的数学工具是从几何视角出发的割圆术。

古希腊阿基米德，利用和圆内接正多边形和外切正多边形来估算  $\pi$ 。阿基米德最后计算到正 96 边形，估算圆周率在 3.1408 到 3.1429 之间。

中国古代魏晋时期的数学家——刘徽（约 225 年 ~ 约 295 年）——用不断增加内接多边形估算圆周率，这种方法被称之为割圆术。

刘徽也用割圆术，从直径为 2 尺的圆内接正六边形开始割圆，依次得正 12 边形、正 24 边形、正 48 边形等等。割得越细，正多边形面积和圆面积差别越小。用他的原话是“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”这句话中，我们可以体会到“逼近”、“极限”这两个重要的数学思想。

最后，刘徽计算了正 3072 边形的周长，估算得到的圆周率为 3.1416。

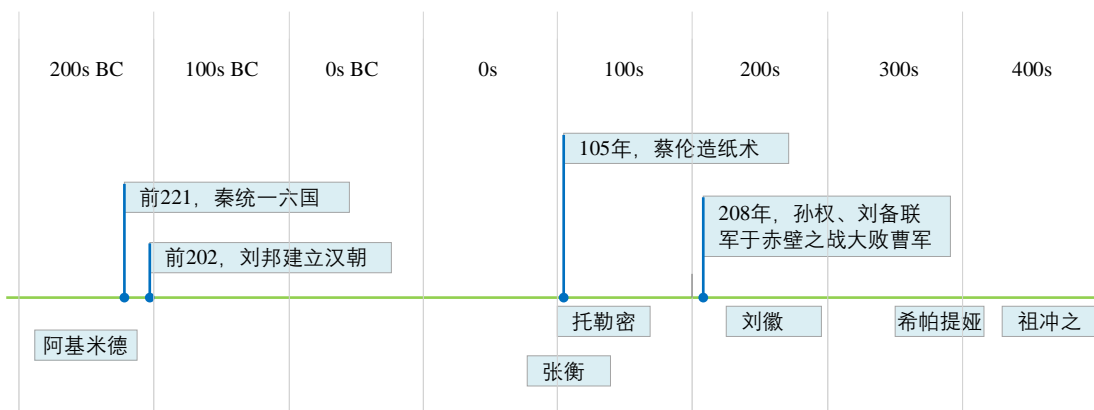


图 28. 圆周率估算的初赛

刘徽之后约 200 年，中国古代南北朝时期数学家祖冲之（429 ~ 500）也是用割圆术，最后竟然达到正 12288 边形，估算圆周率为 3.1415926 到 3.1415927 之间。祖冲之再一次刷新圆周率记录，而这一记录几乎保持一千年，直到新的估算圆周率的数学工具横空出世。

## 内接和外切正多边形

图 29 给出的是正圆内接和外切正 6、8、10、12、14、16 边形。可以发现，正多边形的边数越多，内接和外切正多边形越靠近正圆。

观察图 29，容易发现圆的周长大于圆内接正多边形的边长之和。也就是说，在估算圆周率时，内接正多边形边长和可以作为圆的周长的下边界。

而圆外切正多边形的边长之和大于圆的周长，则为圆周长的上边界。特别地，当正圆为单位圆时，单位圆的周长恰好为  $2\pi$ ，这方便建立  $\pi$  和正多边形边长的联系。

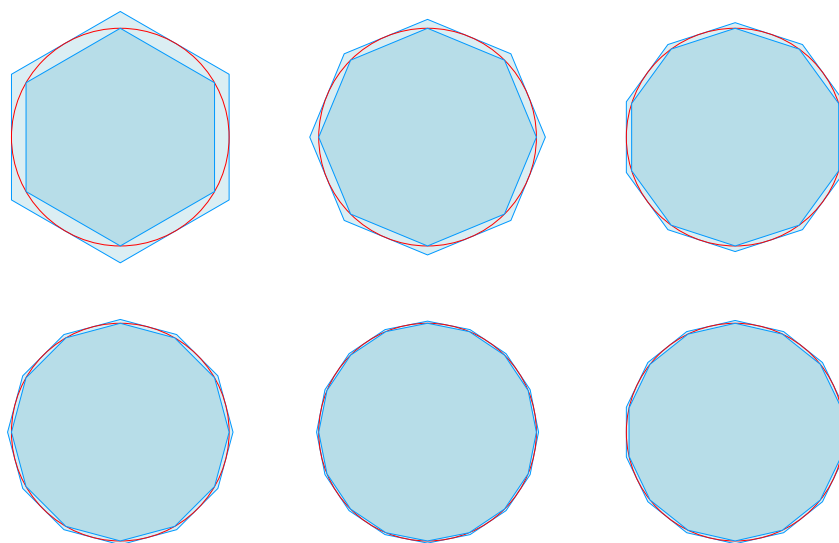


图 29. 圆形内接和外切正 6、8、10、12、14、16 边形



代码文件 Bk3\_Ch3\_02.py 绘制图 29。

## 估算圆周率上下界

图 30 给定一个单位圆，单位圆外切和内接相同边数的正多边形。两个正多边形都可以分割为  $2n$  个三角形，这样圆周  $360^\circ (2\pi)$  被均分为  $2n$  份，每一份对应的角度为：

$$\theta = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n} \quad (10)$$



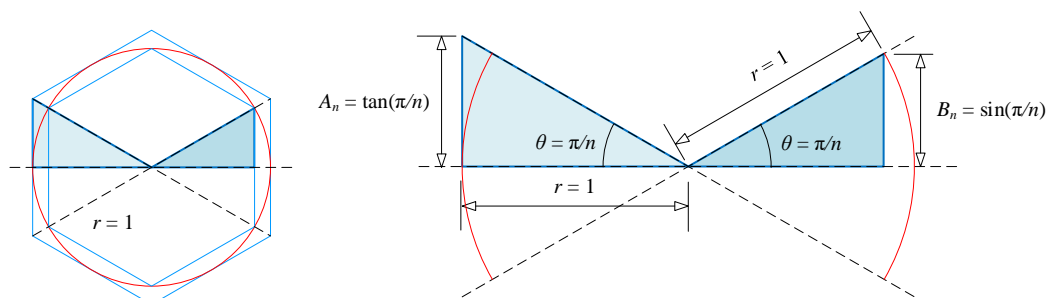


图 30. 圆内接和外接估算圆周率

外切正多边形的周长是估算单位圆周长的上界：

$$2\pi < 2n \cdot \tan \frac{\pi}{n} \quad (11)$$

即，

$$\pi < n \cdot \tan \frac{\pi}{n} \quad (12)$$

内接正多边形的周长是估算单位圆周长的下界：

$$2n \cdot \sin \frac{\pi}{n} < 2\pi \quad (13)$$

即，

$$n \cdot \sin \frac{\pi}{n} < \pi \quad (14)$$

联合 (12) 和 (14)，可以得到圆周率估算的上下界：

$$n \cdot \sin \frac{\pi}{n} < \pi < n \cdot \tan \frac{\pi}{n} \quad (15)$$

如图 31 所示，随正多边形边数逐步增大，圆周率估算越精确。这张图中， $n$  不断增大时，绿色和蓝色两条曲线不断**收敛** (converge) 于红色虚线，这个过程呈现出**极限** (limit) 这一重要数学思想。

在数学上，收敛的意思可以是汇聚于一点，靠近一条线，向某一个值不断靠近。而逼近则是近似，代表高度相似，但是不完全相同。

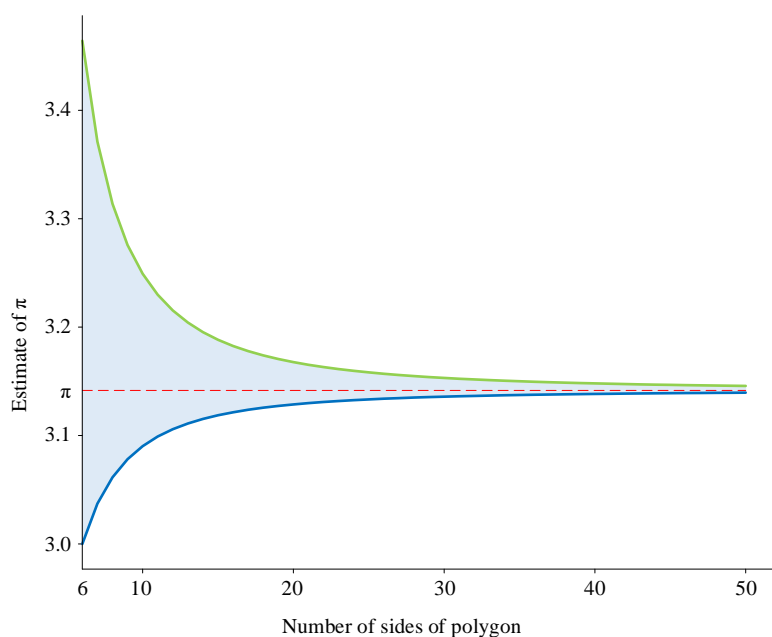


图 31. 随正多边形边数不断增大，圆周率估算越精确



代码文件 Bk3\_Ch3\_03.py 绘制图 31。



此外，我们还结合 Bk3\_Ch3\_02.py 和 Bk3\_Ch3\_03.py，用 Streamlit 制作了估算圆周率的 App，请大家参考代码文件 Streamlit\_Bk3\_Ch3\_03.py。

### 阿基米德的方法

阿基米德采用另外一种方法，他先用外切和内接正 6 边形，然后逐次加倍边数，到正 12 边形、正 24 边形、正 48 边形，最后到正 96 边形。

根据图 30，对于正  $n$  边形，令

$$\begin{aligned} B_n &= n \cdot \sin \frac{\pi}{n} \\ A_n &= n \cdot \tan \frac{\pi}{n} \end{aligned} \quad (16)$$

$B_n$  是  $\pi$  的下限， $A_n$  是  $\pi$  的上限。当多边形边数加倍时，即从正  $n$  边形加倍到正  $2n$  边形，阿基米德发现如下量化关系：

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

$$\begin{aligned} A_{2n} &= \frac{2A_n B_n}{A_n + B_n} \\ B_{2n} &= \sqrt{A_{2n} B_n} \end{aligned} \quad (17)$$

利用三角恒等式，(17) 中两式不难证明，本书此处省略推导过程。

图 32 所示为阿基米德估算圆周率的结果，可见阿基米德方法收敛过程计算效率更高。

几何思维是刻在人类基因中的思维方式，不难理解为什么不同时空、不同地域的数学家，在最开始估算圆周率时，都不约而同想到用正多边形来近似。圆周率估算的竞赛依然不断进行，随着数学思想和工具的不断进步，新的方法不断涌现。沿着数学发展历史的脉络，本书后续将会介绍更多估算圆周率的估算方法。

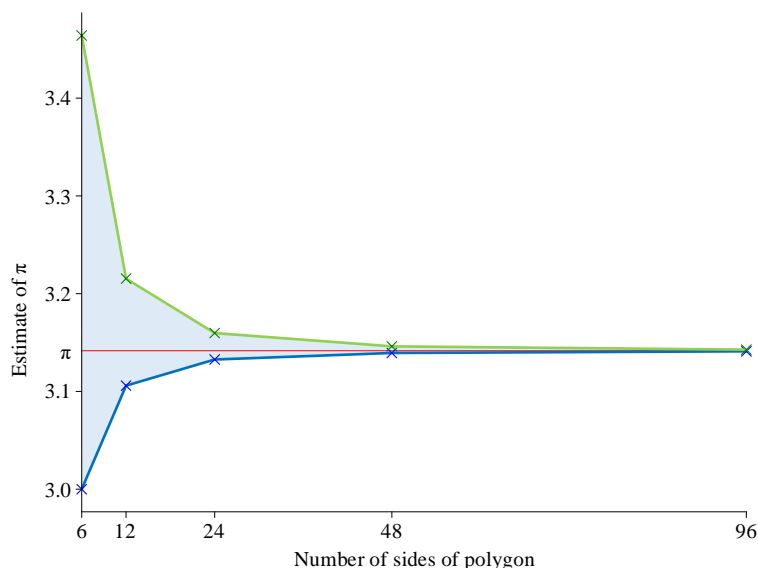


图 32. 阿基米德估算圆周率



Bk3\_Ch3\_04.py 绘制图 32。



本章蜻蜓点水地介绍了本书后续内容会用到的几何概念。但是，本书要讲述的几何的故事不止于此。

不久之后，在笛卡尔 (René Descartes, 1596 ~ 1650) 手里，几何和代数将完美结合。圆锥曲线很快便革新人类对天体运行规律的认识，颠覆人类的世界观。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

**斯蒂芬·霍金** (Stephen Hawking, 1942 ~ 2018) 曾说“等式是数学中最无聊的部分，我一直试图从几何视角理解数学。”本书作者也认为几何思维是人类的天然思维方式，因此在讲解数学概念、各种数据科学、机器学习算法时，我们都会多给出一个几何视角，以强化理解。