

## 第1章 习 题

**1-3** 图 1.8 所示是采用浮子控制的水钟计时原理图。试分析其保持准确计时的原理，并绘制其职能方框图，说明浮子的控制作用，指出该系统的输入量、输出量和反馈量。

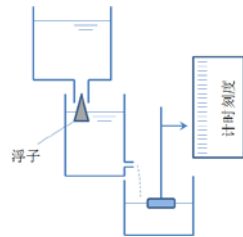


图 1.8 水钟计时原理图

解：计时原理：最上面的蓄水池提供水源，中间蓄水池浮子保证恒定水位，以确保其流出的水滴速度均匀，从而保证最下面水池中的带有指针的浮子均匀上升，并指示出时间信息。

浮子的控制作用：当中间蓄水池进水量大于出水量时，浮子随水位上升，使进水口变小，从而节制进水量，而当进水量小于出水量时，浮子随水位下降，使进水口变大，进水量变大，起到负反馈控制作用，保证恒定水位。



输入量：进水量

输出量：带有指针的浮子位置

反馈量：中间蓄水池浮子位置

**1-4** 图 1.9 所示是自动升降门的自动控制原理图。试分析说明其控制工作原理，并绘制其职能方框图，指出输入量、输出量、反馈量。

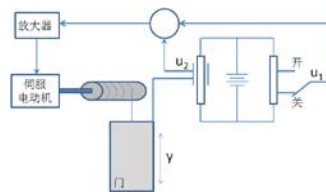


图 1.9 自动升降门系统原理图

解：控制工作原理：

- 如果希望开门，则将门当前状态对应的电压取出，与开门状态参考电位比较（相减），然后送放大器，驱动伺服电机，带动绞盘使门打开，直到门的状态所对应的电压与开门状态参考电位相等时，放大器比较（相减）的结果为零，执行元件不工作，门保持打开状态不再变化。
- 如果希望关门，则将门当前状态对应的电压取出，与关门状态参考电位比较（相减），然后送放大器，驱动伺服电机，带动绞盘使门关闭，直到门的状态所对应的电压与关门状态参考电位相等时，放大器比较（相减）的结果为零，执行元件不工作，门保持关闭状态不再变化。



输入量：开门/关门状态参考电位

输出量：门实际状态

反馈量：门当前状态对应的电压

## 第2章 习 题

**2-1** 试判别以下方程所描述的系统是否为线性定常系统。

$$(1) \quad y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t) + 6 \quad (2) \quad \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 5y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

$$(3) \quad \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 5y(t)u(t) = \dot{u}(t) + 2u(t) \quad (4) \quad y(t)\cos t = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

解：(1) 不是 (2) 是 (3) 不是 (4) 不是

**2-2** 求图 2.36 所示无源网络的微分方程，其中， $u_i$ 、 $u_o$  分别为输入、输出信号。

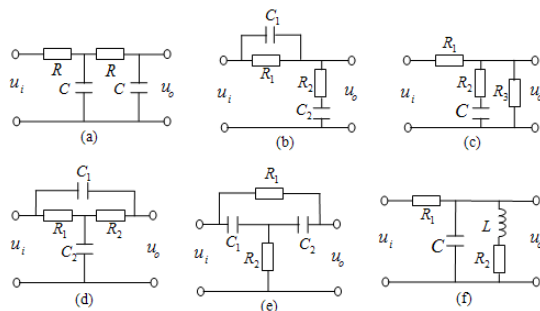


图 2.36 题 2-2 图

解：

$$(a) \quad R^2 C^2 \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + 3RC \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t)$$

$$(b) \quad R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2) \frac{du_i(t)}{dt} + u_i(t)$$

$$(c) \quad (R_1 R_2 + R_2^2 + R_1 R_3) C \frac{du_o(t)}{dt} + (R_1 + R_2) u_o(t) = R_2 R_3 C \frac{du_i(t)}{dt} + R_3 u_i(t)$$

$$(d) \quad R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_1 C_2) \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_1) \frac{du_i(t)}{dt} + u_i(t)$$

$$(e) \quad R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + (R_2 C_2 + R_2 C_1 + R_1 C_2) \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} + (C_1 + C_2) R_2 \frac{du_i(t)}{dt} + u_i(t)$$

$$(f) \quad R_1 CL \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + (R_1 R_2 C + L) \frac{du_o(t)}{dt} + (R_1 + R_2) u_o(t) = L \frac{du_i(t)}{dt} + R_2 u_i(t)$$

**2-3** 求图 2.37 所示有源网络的微分方程，其中， $u_i$ 、 $u_o$  分别为输入、输出信号。

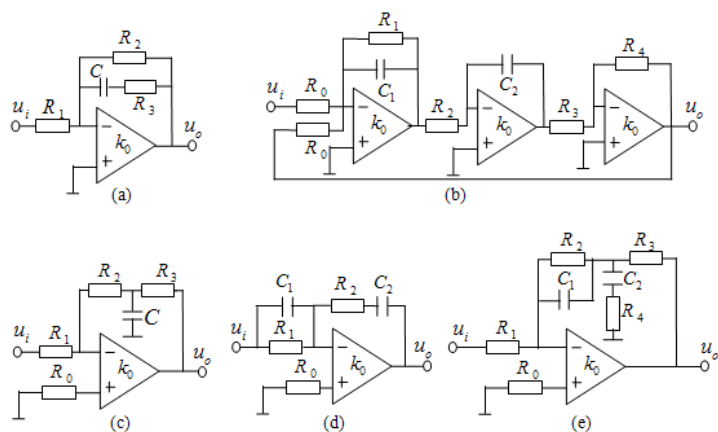


图 2.37 题 2-3 图

解:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & (R_1 R_2 + R_1 R_3) C \frac{du_o(t)}{dt} + R_1 u_o(t) = -[R_2 R_3 C \frac{du_i(t)}{dt} + R_2 u_i(t)] \\
 (b) \quad & R_0 R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + R_0 R_2 R_3 C_2 \frac{du_o(t)}{dt} + R_1 R_4 u_o(t) = -R_1 R_4 u_i(t) \\
 (c) \quad & R_1 u_o(t) = -[R_2 R_3 C \frac{du_i(t)}{dt} + (R_2 + R_3) u_i(t)] \\
 (d) \quad & -R_1 C_2 \frac{du_o(t)}{dt} = R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2) \frac{du_i(t)}{dt} + u_i(t) \\
 (e) \quad & R_2 R_4 C_1 C_2 \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + (R_2 C_1 + R_4 C_2) \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) \\
 & = -\frac{R_2 + R_3}{R_1} \left\{ \frac{R_2 R_3 R_4 C_1 C_2}{R_2 + R_3} \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} + [R_4 C_2 + \frac{R_2 R_3 (C_1 + C_2)}{R_1 + R_2}] \frac{du_i(t)}{dt} + u_i(t) \right\}
 \end{aligned}$$

**2-4** 求图 2.38 所示机械系统的微分方程。图中位移  $x_i$  为输入量，位移  $x_o$  为输出量。

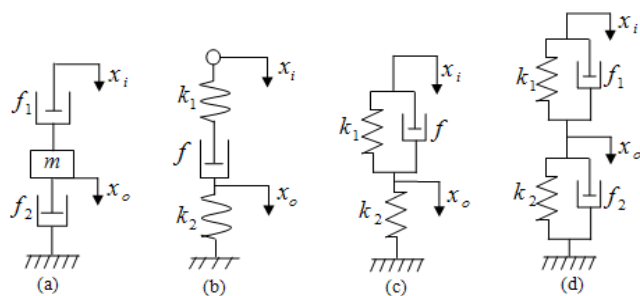


图 2.38 题 2-4 图

解:

$$(a) \quad m \frac{d^2 x_o(t)}{dt^2} + (f_1 + f_2) \frac{dx_o(t)}{dt} = f_1 \frac{dx_i(t)}{dt}$$

$$\begin{aligned}
(b) \quad & (k_1 + k_2)f \frac{dx_o(t)}{dt} + k_1 k_2 x_o(t) = k_1 f \frac{dx_i(t)}{dt} \\
(c) \quad & f \frac{dx_o(t)}{dt} + (k_1 + k_2)x_o(t) = f \frac{dx_i(t)}{dt} + k_1 x_i(t) \\
(d) \quad & (f_1 + f_2) \frac{dx_o(t)}{dt} + (k_1 + k_2)x_o(t) = f_1 \frac{dx_i(t)}{dt} + k_1 x_i(t)
\end{aligned}$$

**2-5** 试证明图 2.39 中所示的电路网络 (a) 和机械系统 (b) 是相似系统 (即有相同形式的数学模型)。

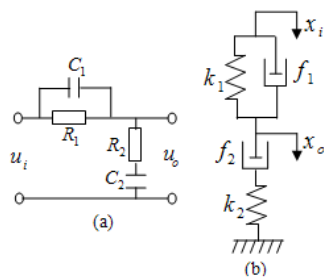


图 2.39 题 2-5 图

解:

$$\begin{aligned}
(a) \quad & R_1 R_2 \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + \left( \frac{R_1}{C_2} + \frac{R_1}{C_1} + \frac{R_2}{C_1} \right) \frac{du_o(t)}{dt} + \frac{1}{C_1 C_2} u_o(t) = R_1 R_2 \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} + \left( \frac{R_1}{C_2} + \frac{R_2}{C_1} \right) \frac{du_i(t)}{dt} + \frac{1}{C_1 C_2} u_i(t) \\
(b) \quad & f_1 f_2 \frac{d^2 x_o(t)}{dt^2} + (f_1 k_2 + f_1 k_1 + f_2 k_1) \frac{dx_o(t)}{dt} + k_1 k_2 x_o(t) = f_1 f_2 \frac{d^2 x_i(t)}{dt^2} + (f_1 k_2 + f_2 k_1) \frac{dx_i(t)}{dt} + k_1 k_2 x_i(t)
\end{aligned}$$

由 (a) (b) 两式可以看出两系统具有相同形式的微分方程, 所以 (a) 和 (b) 是相似系统。

**2-6** 在液压系统的管道中, 设通过阀门的流量  $Q$  满足流量方程:  $Q = K\sqrt{P}$ 。式中,  $K$  为常数;  $P$  为阀门前后的压差。若流量  $Q$  与压差  $P$  在其平衡点  $(Q_0, P_0)$  附近做微小变化, 试导出线性化流量方程。

解:  $\Delta Q = L\Delta P$  式中  $L = \frac{K}{2\sqrt{P_0}}$ ,  $\Delta Q = Q - Q_0$ ,  $\Delta P = P - P_0$ 。线性化式子表示为:  $Q = LP$

**2-7** 设弹簧特性曲线由  $F = 12.56y^{1.1}$  描述, 式中  $F$  是弹簧力,  $y$  是变形位移。若弹簧在变形位移 0.25 附近做微小变化, 试推到  $\Delta F$  的线性化方程。

解:  $\Delta F = 12\Delta y$ , 式中  $\Delta F = F - 2.73$ ,  $\Delta y = y - 0.25$

**2-8** 二级 RC 电路网络如图 2.40 所示,

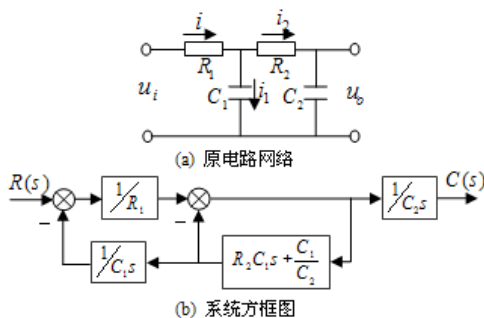
试画出其方框图, 并求其传递函数

$$\frac{u_o(s)}{u_i(s)}。$$

解: 设如右图 (a) 所示中间变量  $i$ ,

$i_1$ ,  $i_2$ , 得方程组为

$$\begin{aligned}
I &= I_1 + I_2 \\
U_i &= R_1 I + \frac{1}{C_1 s} I_1
\end{aligned}$$



题 2-8 图

$$\frac{1}{C_1 s} I_1 = R_2 I_2 + \frac{1}{C_2 s} I_2$$

$$U_o = \frac{1}{C_2 s} I_2$$

根据以上 4 式, 按信号流动的方向绘制的系统方框图如右图 (b) 所示。

$$\text{传递函数 } \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) s + 1}$$

**2-9** 在图 2.41 中, 已知  $G(s)$  和  $H(s)$  两方框中相对应的微分方程分别是

$$\begin{cases} \frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = D(t) \\ \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = 2c(t) \end{cases}$$

且初始条件均为零, 试求传递函数  $C(s)/R(s)$  和  $E(s)/R(s)$ 。

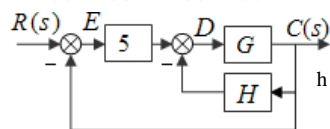


图 2.41 题 2-9 图

解:  $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5(s+1)}{s^2+8s+9}$        $\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s^2+3s+2}{s^2+8s+9}$

**2-10** 试求图 2.42 (a) 和 (b) 所示机械系统的传递函数  $\frac{X_2(s)}{F_1(s)}$  和  $\frac{X_2(s)}{F_2(s)}$ , 其中的  $F_1(t)$ 、 $F_2(t)$  分别是施加给机械系统的作用力,  $x_2(t)$  是质量块的位移。

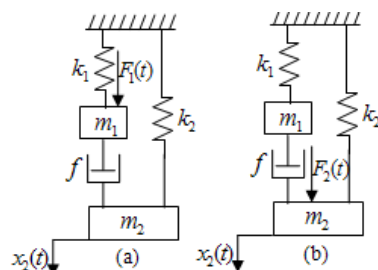


图 2.42 题 2-10 图

解: (a)  $\frac{X_2(s)}{F_1(s)} = \frac{fs}{m_1 m_2 s^4 + (m_1 + m_2)fs^3 + (k_1 m_2 + k_2 m_1)s^2 + (k_1 + k_2)fs + k_1 k_2}$

(b)  $\frac{F_2(s)}{X_2(s)} = \frac{fs + k_1}{fm_2 s^3 + k_1 m_2 s^2 + (k_1 + k_2)fs + k_1 k_2}$

**2-11** 设系统的传递函数为  $\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{2}{s^3 + 2s^2 + 3s + 2}$ , 试写出系统输入/输出之间的微分方程。

解:  $\frac{d^3 c(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 3\frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = 2r(t)$

**2-12** 求图 2.36 所示的无源电路网络的传递函数  $\frac{U_o(s)}{U_i(s)}$ 。

解:

- (a)  $\frac{1}{R^2 C^2 s^2 + 3RCs + 1}$
- (b)  $\frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2)s + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)s + 1}$
- (c)  $\frac{R_2 R_3 Cs + R_3}{(R_1 R_2 + R_2^2 + R_1 R_3)Cs + R_1 + R_2}$
- (d)  $\frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_1)s + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_1 C_2)s + 1}$
- (e)  $\frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (C_1 + C_2)R_2 s + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_2 C_2 + R_2 C_1 + R_1 C_2)s + 1}$
- (f)  $\frac{Ls + R_2}{R_1 CLs^2 + (R_1 R_2 C + L)s + R_1 + R_2}$

**2-13** 绘制图 2.37 所示的有源电路网络的传递函数方框图，并求传递函数  $\frac{U_o(s)}{U_i(s)}$ 。

- 解: (a)  $-\frac{R_2 R_3 Cs + R_2}{(R_1 R_2 + R_1 R_3)Cs + R_1}$
- (b)  $-\frac{R_1 R_4}{R_0 R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 s^2 + R_0 R_2 R_3 C_2 s + R_1 R_4}$
- (c)  $-\frac{R_2 R_3 Cs + R_2 + R_3}{R_1}$
- (d)  $-\frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2)s + 1}{R_1 C_2 s}$
- (e)  $-\frac{R_2 + R_3}{R_1} \frac{\frac{R_2 R_3 R_4 C_1 C_2}{R_2 + R_3} s^2 + [R_4 C_2 + \frac{R_2 R_3 (C_1 + C_2)}{R_1 + R_2}]s + 1}{R_2 R_4 C_1 C_2 s^2 + (R_2 C_1 + R_4 C_2)s + 1}$

**2-14** 绘制图 2.38 所示的机械系统的传递函数方框图，并求传递函数  $\frac{X_o(s)}{X_i(s)}$ 。

- 解: (a)  $\frac{f_1 s}{ms^2 + (f_1 + f_2)s}$
- (b)  $\frac{k_1 f s}{(k_1 + k_2)fs + k_1 k_2}$
- (c)  $\frac{fs + k_1}{fs + k_1 + k_2}$
- (d)  $\frac{f_1 s + k_1}{(f_1 + f_2)s + k_1 + k_2}$

2-15 试用方框图等效变换的方法求图 2.43 所示各系统的传递函数  $\frac{C(s)}{R(s)}$ 。

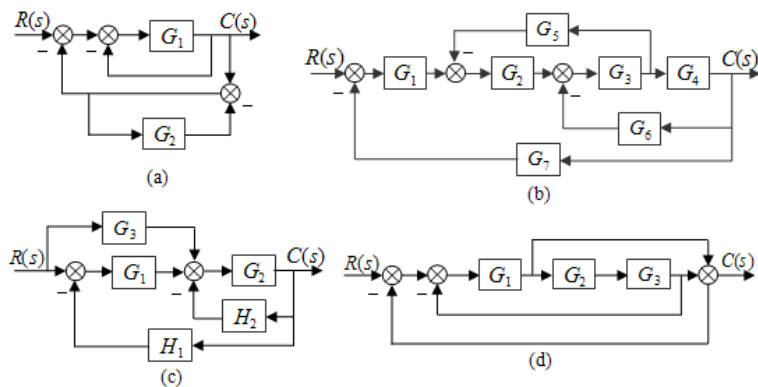


图 2.43 题 2-15 图

解: (a)  $\frac{G_1 + G_1 G_2}{1 + 2G_1 + G_2 + G_1 G_2}$

(b)  $\frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 G_5 + G_3 G_4 G_6 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_7}$

(c)  $\frac{G_1 G_2 + G_2 G_3}{1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 H_1}$  (d)  $\frac{G_1 G_2 G_3 + G_1}{1 + G_1 + 2G_1 G_2 G_3}$

2-16 如图 2.44 所示的控制系统，试求：

(1) 系统的开环传递函数；

(2) 当  $F(s)=0$  时的  $G_{CR} = \frac{C(s)}{R(s)}$  和  $G_{ER} = \frac{E(s)}{R(s)}$ ；当  $R(s)=0$  时的  $G_{CF} = \frac{C(s)}{F(s)}$  和

$G_{EF} = \frac{E(s)}{F(s)}$ ；

(3) 求在  $R(s)$  和  $F(s)$  共同作用下系统的总输出  $C(s)$  和总误差  $E(s)$ 。

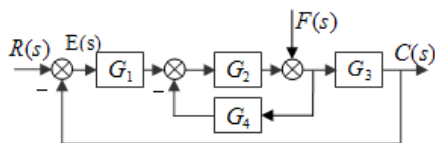
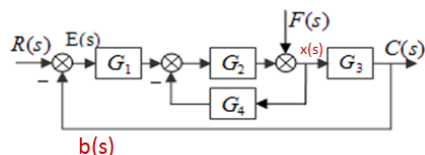


图 2.44 题 2-16 图



解:

(1) 开环传递函数  $(b(s)/E(s))$

$b(s) = C(s) = G_3 x(s)$ ,  $x(s) = G_2 [G_1 E(s) - G_4 x(s)]$

$$\frac{b(s)}{E(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 G_4}$$

$$(2) \quad b(s) = C(s) = G_3 x(s), \quad x(s) = F(s) + G_2 [G_1 E(s) - G_4 x(s)], \quad E(s) = R(s) - b(s)$$

$$F(s)=0 \text{ 时, } x(s) = G_2 [G_1 E(s) - G_4 x(s)] \rightarrow x(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_4} E(s) \rightarrow x(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_4} (R(s) - C(s)), \text{ 有}$$

$$\Phi_{cr}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_4 + G_1 G_2 G_3}, \quad \Phi_{er}(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_4 + G_1 G_2 G_3}$$

$$R(s)=0 \text{ 时, } x(s) = G_2 [G_1 E(s) - G_4 x(s)] \rightarrow x(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_4} E(s) \rightarrow E(s) = -C(s) \text{ 和 } x(s) = -\frac{G_1 G_2}{1 + G_4} C(s),$$

有

$$\Phi_{ef}(s) = \frac{C(s)}{F(s)} = \frac{G_3}{1 + G_2 G_4 + G_1 G_2 G_3}, \quad \Phi_{ef}(s) = \frac{E(s)}{F(s)} = \frac{-G_3}{1 + G_2 G_4 + G_1 G_2 G_3}$$

$$(3) \quad C(s) = \Phi_{cr}(s)R(s) + \Phi_{ef}(s)F(s) = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 G_4 + G_1 G_2 G_3} R(s) + \frac{G_3}{1 + G_2 G_4 + G_1 G_2 G_3} F(s)$$

**2-17** 用梅逊公式求图 2.45 所示系统的传递函数  $\frac{C(s)}{R(s)}$ 。

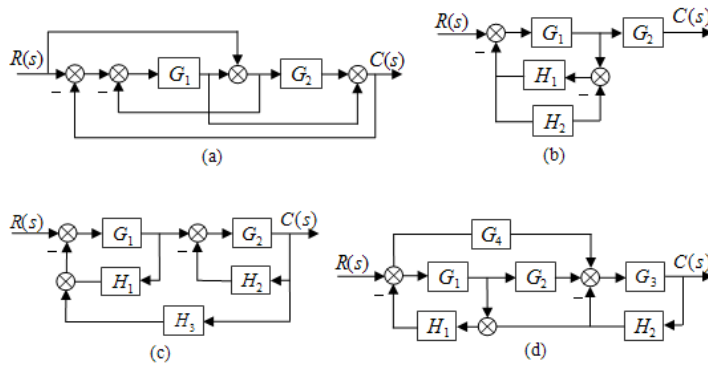


图 2.45 题 2-17 图

解: (a)  $\frac{G_1 + G_2 + G_1 G_2}{1 + 2G_1 + G_1 G_2}$

(b)  $\frac{G_1 G_2 (1 + H_1 H_2)}{1 + G_1 H_1 + H_1 H_2}$

(c)  $\frac{G_1 G_2}{1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 H_3 + G_1 G_2 H_1 H_2}$

(d)  $\frac{G_1 G_2 G_3 + G_3 G_4}{1 + G_1 H_1 + G_3 H_2 + G_3 G_4 H_1 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_1 H_2}$

**2-18** 系统的方框图如图 2.46 所示，试求系统的开环传递函数、闭环传递函数和误差传递函数。



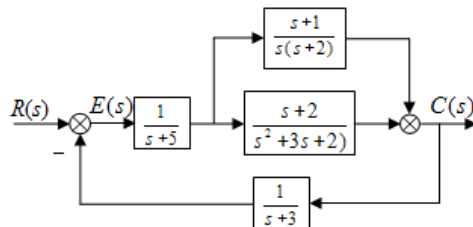


图 2.46 题 2-18 图

解：系统的开环传递函数

$$= \frac{B(s)}{E(s)} = G_1(s)G_2(s)H(s) = \frac{1}{s+5} \cdot \frac{2s^2+4s+1}{s^3+3s^2+2s} \cdot \frac{1}{s+3} = \frac{2s^2+4s+1}{(s+3)(s+5)(s^3+3s^2+2s)}$$

系统的闭环传递函数

$$= \Phi_{RC}(s) = \frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{2s^3+10s^2+13s+3}{s^5+11s^4+41s^3+63s^2+34s+1}$$

系统的误差传递函数=

$$\Phi_{RE}(s) = \frac{E_R(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{s^5+11s^4+41s^3+63s^2+34s+1}{s^5+11s^4+41s^3+63s^2+34s+1}$$

**2-19** 机械平移系统如图 2.47 所示，试建立其状态空间表达式，其中的  $F$  为外部作用力， $y$  为质量块位移。

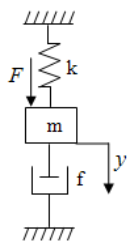


图 2.47 题 2-19

解：

微分方程为  $m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + f \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F(t)$ ，有  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{f}{m} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{m} y(t) = \frac{1}{m} F(t)$

对照教材 p20 上的式 (2-27)，有

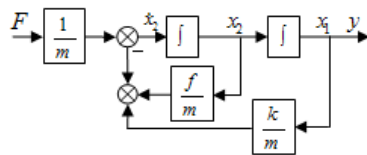
$$n=2, a_0=1/m, a_1=f/m, b_0=1/m$$

依据 p21 上的式 (2-33) 和 p22 上的式 (2-36)，得

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

系统的状态变量图为：



题 2-19 状态变量图

**2-20** 在图 2.48 所示的系统中，若选取  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$  为状态变量，试列写其状态空间表达式。

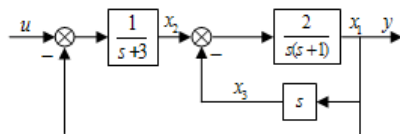


图 2-67 题 2-20

解：

依据图中变量所示关系，有

$$x_1(s) = \frac{2}{s(s+1)}(x_2(s) - x_3(s)), \quad x_2(s) = \frac{1}{s+3}(u(s) - x_1(s)), \quad y(s) = x_1(s), \quad x_3(s) = sx_1(s)$$

$$x_3(s) = sx_1(s) \rightarrow \dot{x}_1(t) = x_3(t)$$

$$x_2(s) = \frac{1}{s+3}(u(s) - x_1(s)) \rightarrow \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 3x_2(t) + u(t)$$

$$x_1(s) = \frac{2}{s(s+1)}(x_2(s) - x_3(s)) \text{ 和 } x_3(s) = sx_1(s) \rightarrow sx_3(s) = 2x_2(s) - 3x_3(s) \rightarrow \dot{x}_3(t) = 2x_2(t) - 3x_3(t)$$

$$y(s) = x_1(s) \rightarrow y(t) = x_1(t)$$

则有

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) - 3x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_3(t) &= 2x_2(t) - 3x_3(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**2-21** 设系统框图如图 2-68 所示，试求其状态空间表达式。

$$\text{解: } \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{k_3}{T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & \frac{k_2}{T_2} \\ -\frac{k_1 k_4}{T_1} & 0 & -\frac{1}{T_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_1}{T_1} \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

**2-22** 系统的输入、输出微分方程为下列各式，试写出它们的状态空间表达式。

$$(1) \quad \frac{d^3 y}{dt^3} + 6 \frac{d^2 y}{dt^2} + 15 \frac{dy}{dt} + 5y = 7u \quad (2) \quad \frac{d^3 y}{dt^3} + 5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 7y = 8u$$

$$(3) \quad \frac{d^3 y}{dt^3} + 18 \frac{d^2 y}{dt^2} + 192 \frac{dy}{dt} + 640y = 160 \frac{du}{dt} + 640u$$

**2-22** (1) 
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -15 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad y = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -7 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} u \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -192 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 164 \\ -2240 \end{pmatrix} u \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

### 第3章 习 题

**3-1** 假设温度计可用  $\frac{1}{Ts+1}$  传递函数描述其特性，现在用温度计测量盛在容器内的水温。发现需要 1min 时间才能指示出实际水温的 98% 的数值，试问该温度计指示出实际水温从 10% 变化到 90% 所需的时间是多少？

解： 依据教材中 p68 中式 (3-20b)，有  $4T=1\text{min}$ ， $T=0.25\text{min}=15\text{s}$

因为  $y(s) = \frac{1}{Ts+1} u(s)$ ，且  $u(s) = \frac{1}{s}$ ，拉氏反变换为  $y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$

(由  $y(t) = 0.98 = 1 - e^{-\frac{60}{T}}$ ，也可解得  $T=15$  (s))

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t_1}{T}} = 0.1, \text{ 有 } t_1 = -T \ln 0.9$$

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t_2}{T}} = 0.9, \text{ 有 } t_2 = -T \ln 0.1$$

$$t_r = t_2 - t_1 = T \ln \frac{0.9}{0.1} = 2.2T = 0.55 \text{ min}$$

**3-2** 已知某系统的微分方程为  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f'(t) + 3f(t)$ ，初始条件  $y(0) = 1$ ， $y'(0) = 2$ ，试求：

(1) 系统输入  $f(t)=0$  时的输出  $y(t)$ ；

(2) 系统输入  $f(t)=1(t)$  时, 系统输出  $y(t)$ 。

解:

(1) 解: 计算微分方程的通解 (输入为零时的解, 亦即自由响应)。考虑齐次微分方程

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$$

其特征方程为  $\alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0$

解得特征根为

$$\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -2$$

则解为:  $y_k(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$

由初始条件得  $C_1 = 4, C_2 = -3$

$$y_k(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t}$$

(2) 系统输入  $f(t)=1(t)$  时, 系统的微分方程为

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 1$$

对照输入信号, 令方程的特解为  $y_p(t) = B_1$  ( $B_1$  为待定系数)。代入微分方程计算可得  $B_1 = 1/2$ 。所以, 系统在  $f(t)=1(t)$  的输入作用下的输出为

$$y(t) = y_k(t) + y_p(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t} + \frac{1}{2}$$

**3-3** 已知系统的微分方程为  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f'(t) + 3f(t)$ , 当输入  $f(t) = e^{-4t}$  时, 系统的

输出为  $y(t) = \frac{14}{3}e^{-t} - \frac{7}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}$ 。试求系统的自由响应与受迫响应、瞬态响应与稳态响应。

解:

$$H(p) = \frac{p+3}{p^2+3p+2} = \frac{2}{p+1} - \frac{1}{p+2}, \quad h(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})\varepsilon(t),$$

$$y_f(t) = \left\{ \int_0^t e^{-4\tau} [2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}] d\tau \right\} \varepsilon(t) = \left[ \frac{2}{3}e^{-t}(1 - e^{-3t}) - \frac{1}{2}e^{-2t}(1 - e^{-2t}) \right] \varepsilon(t)$$

$$= \left( -\frac{1}{6}e^{-4t} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-t} \right) \varepsilon(t) \quad (\text{零状态响应})$$

$$\therefore y_x(t) = y(t) - y_f(t) = (4e^{-t} - 3e^{-2t})\varepsilon(t) \quad (\text{零状态响应})$$

强迫响应:  $-\frac{1}{6}e^{-4t}\varepsilon(t)$ ; 自由响应:  $(\frac{14}{3}e^{-t} - \frac{7}{2}e^{-2t})\varepsilon(t)$ ;

$y(t)$  全为暂态, 不含稳态响应。

**3-4** 单位反馈控制系统的开环传递函数  $G(s) = \frac{4}{s(s+5)}$ , 求系统的单位阶跃响应  $y(t)$  和调节时间  $t_s$ 。

解: 依题, 系统闭环传递函数

$$\Phi(s) = \frac{4}{s^2 + 5s + 4} = \frac{4}{(s+1)(s+4)} = \frac{4}{(s+\frac{1}{T_1})(s+\frac{1}{T_2})} \quad \begin{cases} T_1 = 1 \\ T_2 = 0.25 \end{cases}$$

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+4)} = \frac{C_0}{s} + \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+4}$$

$$C_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4}{(s+1)(s+4)} = 1$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \Phi(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4}{s(s+4)} = -\frac{4}{3}$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow -4} (s+4) \Phi(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4}{s(s+1)} = \frac{1}{3}$$

$$h(t) = 1 - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t}$$

$$Q \quad \frac{T_1}{T_2} = 4, \quad \therefore t_s = \left(\frac{t_s}{T_1}\right) T_1 = 3.3 T_1 = 3.3。$$

**3-5** 设图 3.35 (a) 所示系统的单位阶跃响应如图 3.35 (b) 所示。试确定系统的参数  $K_1$ ,  $K_2$  和  $a$ 。

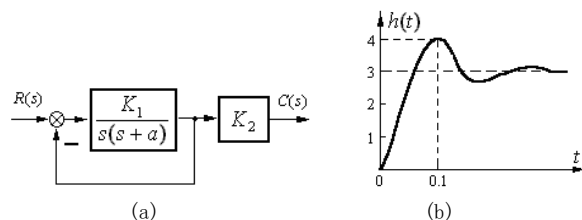


图 3.35 习题 3-5 图

解：由系统阶跃响应曲线有

$$\begin{cases} h(\infty) = 3 \\ t_p = 0.1 \\ \sigma\% = (4-3)/3 = 33.3\% \end{cases}$$

系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{K_1 K_2}{s^2 + as + K_1} = \frac{K_2 \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} \quad (1)$$

$$\text{由} \quad \begin{cases} t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2} \omega_n} = 0.1 \\ \sigma\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} = 33.3\% \end{cases} \quad \text{联立求解得} \quad \begin{cases} \xi = 0.33 \\ \omega_n = 33.28 \end{cases}$$

$$\text{由式 (1)} \quad \begin{cases} K_1 = \omega_n^2 = 1108 \\ a = 2\xi \omega_n = 22 \end{cases}$$

$$\text{另外} \quad h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_1 K_2}{s^2 + as + K_1} = K_2 = 3$$

**3-6** 设单位反馈控制系统的开环传递函数为  $G_k(s) = \frac{25}{s(s+6)}$ ,

求 (1) 系统的阻尼比  $\zeta$  和无阻尼固有频率  $\omega_n$ ;

(2) 系统的峰值时间  $t_p$ 、超调量  $M_p\%$ 、调节时间  $t_s(\Delta=0.02)$ 。

$$\text{解: 系统闭环传递函数 } G_B(s) = \frac{\frac{25}{s(s+6)}}{1 + \frac{25}{s(s+6)}} = \frac{25}{s(s+6)+25} = \frac{25}{s^2+6s+25}$$

与标准形式对比, 可知  $2\xi\omega_n = 6$ ,  $\omega_n^2 = 25$

故  $\omega_n = 5$ ,  $\xi = 0.6$

$$\text{又 } \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} = 5 \times \sqrt{1-0.6^2} = 4$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{4} = 0.785$$

$$M_p \% = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = e^{\frac{-0.6\pi}{\sqrt{1-0.6^2}}} \times 100\% = 9.5\%$$

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 1.33$$

**3-7** 设系统的闭环传递函数为  $G_c(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ , 试求最大超调量  $M_p = 9.6\%$ 、峰值时间  $t_p = 0.2$  秒时的闭环传递函数的参数  $\xi$  和  $\omega_n$  的值。

$$\text{解: } \because \sigma\% = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 9.6\%$$

$$\therefore \xi = 0.6$$

$$\because t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 0.2$$

$$\therefore \omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{3.14}{0.2 \sqrt{1-0.6^2}} = 19.6 \text{ rad/s}$$

**3-8** 系统结构方框图如图 3.36 所示。试求局部反馈加入前、后系统的静态位置误差系数、静态速度误差系数和静态加速度误差系数。

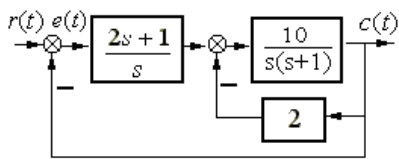


图 3.36 习题 3-8 图

解 局部反馈加入前, 系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10(2s+1)}{s^2(s+1)}$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \infty$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 10$$

局部反馈加入后，系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{2s+1}{s} \cdot \frac{\frac{10}{s(s+1)}}{1 + \frac{20}{s+1}} = \frac{10(2s+1)}{s(s^2+s+20)}$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 0.5$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0$$

**3-9** 已知系统的闭环特征方程，试判别对应系统的稳定性，并确定在右半 s 平面的特征根个数。

$$(1) D(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 = 0$$

$$(2) D(s) = s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 24s^2 + 32s + 48 = 0$$

$$(3) D(s) = s^5 + 2s^4 - s - 2 = 0$$

$$(4) D(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

解 (1)  $D(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 = 0$

Routh:	$s^5$	1	2	11
	$s^4$	2	4	10
	$s^3$	$\varepsilon$	6	
	$s^2$	$4\varepsilon - 12/\varepsilon$	10	
	$s$	6		
	$s^0$	10		

第一列元素变号两次，有 2 个正根。

$$(2) D(s) = s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 24s^2 + 32s + 48 = 0$$

Routh:	$s^5$	1	12	32
	$s^4$	3	24	48
	$s^3$	$\frac{3 \times 12 - 24}{3} = 4$	$\frac{32 \times 3 - 48}{3} = 16$	0
	$s^2$	$\frac{4 \times 24 - 3 \times 16}{4} = 12$	48	
	$s$	$\frac{12 \times 16 - 4 \times 48}{12} = 0$	0	辅助方程 $12s^2 + 48 = 0$ ,
	$s$	24		辅助方程求导: $24s = 0$
	$s^0$	48		

系统没有正根。对辅助方程求解，得到系统一对虚根  $s_{1,2} = \pm j2$ 。

$$(3) D(s) = s^5 + 2s^4 - s - 2 = 0$$

Routh:	$s^5$	1	0	-1	
	$s^4$	2	0	-2	辅助方程 $2s^4 - 2 = 0$
	$s^3$	8	0		辅助方程求导 $8s^3 = 0$
	$s^2$	$\varepsilon$	-2		
	$s$	$16/\varepsilon$			
	$s^0$	-2			

第一列元素变号一次，有 1 个正根；由辅助方程  $2s^4 - 2 = 0$  可解出：

$$2s^4 - 2 = 2(s+1)(s-1)(s+j)(s-j)$$

$$D(s) = s^5 + 2s^4 - s - 2 = (s+2)(s+1)(s-1)(s+j)(s-j)$$

$$(4) D(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

Routh:	$s^5$	1	24	-25	
	$s^4$	2	48	-50	辅助方程 $2s^4 + 48s^2 - 50 = 0$
	$s^3$	8	96		辅助方程求导 $8s^3 + 96s = 0$
	$s^2$	24	-50		
	$s$	$338/3$			
	$s^0$	-50			

第一列元素变号一次，有 1 个正根；由辅助方程  $2s^4 + 48s^2 - 50 = 0$  可解出：

$$2s^4 + 48s^2 - 50 = 2(s+1)(s-1)(s+j5)(s-j5)$$

$$D(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = (s+2)(s+1)(s-1)(s+j5)(s-j5)$$

**3-10** 已知单位反馈控制系统的开环传递函数如下，试分别求出当输入信号为  $1(t)$ 、 $t$  和  $t^2$  时系统的稳态误差。

$$(1) G(s) = \frac{10}{(0.1s+1)(0.5s+1)}$$

$$(2) G(s) = \frac{7(s+3)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$$

$$\text{解: } (1) G(s) = \frac{10}{(0.1s+1)(0.5s+1)} \quad \begin{cases} K=10 \\ v=0 \end{cases}$$

$$D(s) = (0.1s+1)(0.5s+1)+10=0 \text{ 经判断系统稳定}$$

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r(t)-1(t)}{1+K} = \frac{1}{11}$$

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r(t)-t}{s} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r(t)-t^2}{s^2} = \infty$$



$$(2) \quad G(s) = \frac{7(s+3)}{s(s+4)(s^2+2s+2)} \quad \begin{cases} K = \frac{7 \times 3}{4 \times 2} = \frac{21}{8} \\ v = 1 \end{cases}$$

$$D(s) = s(s+4)(s^2+2s+2) + 7(s+3) = 0$$

经判断：系统不稳定。

**3-11** 已知单位反馈控制系统的开环传递函数如下

$$G_K(s) = \frac{100}{s(s+2)}$$

求：(1) 试确定系统的型次和开环增益  $K$ ;

(2) 试求输入为  $r(t) = 1 + 3t$  时，系统的稳态误差。

解：(1) 将传递函数化成标准形式

$$G_K(s) = \frac{100}{s(s+2)} = \frac{50}{s(0.5s+1)}$$

可见， $v=1$ ，这是一个 I 型系统

开环增益  $K=50$ ;

(2) 讨论输入信号， $r(t) = 1 + 3t$ ，即  $A=1$ ， $B=3$

$$\text{误差 } e_{ss} = \frac{A}{1+K_p} + \frac{B}{K_v} = \frac{1}{1+\infty} + \frac{3}{50} = 0 + 0.06 = 0.06$$

**3-12** 已知单位反馈控制系统的开环传递函数如下

$$G_K(s) = \frac{2}{s^2(s+0.1)(s+0.2)}$$

求：(1) 试确定系统的类型和开环增益  $K$ ;

(2) 试求输入为  $r(t) = 5 + 2t + 4t^2$  时，系统的稳态误差。

解：(1) 将传递函数化成标准形式

$$G_K(s) = \frac{2}{s^2(s+0.1)(s+0.2)} = \frac{100}{s^2(10s+1)(5s+1)}$$

可见， $v=2$ ，这是一个 II 型系统

开环增益  $K=100$ ;

(2) 讨论输入信号， $r(t) = 5 + 2t + 4t^2$ ，即  $A=5$ ， $B=2$ ， $C=4$

$$\text{误差 } e_{ss} = \frac{A}{1+K_p} + \frac{B}{K_v} + \frac{C}{K_a} = \frac{5}{1+\infty} + \frac{2}{\infty} + \frac{4}{100} = 0 + 0 + 0.04 = 0.04$$

**3-13** 已知控制系统的结构方框图如图 3.37 所示，试求：

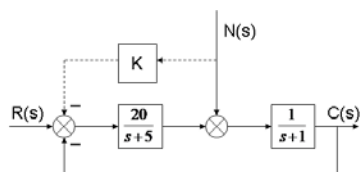


图 3.37 习题 3-13 图

(1) 不加虚线所画的顺馈控制时, 系统在干扰作用下的传递函数  $\Phi_n(s)$ ;

(2) 当干扰  $N(t) = 1(t)$  时, 系统的稳态输出;

(3) 若加入虚线所画的顺馈控制时, 系统在干扰作用下的传递函数, 并求  $N(t)$  对输出  $C(t)$  稳态值影响最小的适合  $K$  值。

解 (1) 无顺馈时, 系统误差传递函数为

$$\Phi_n(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{s+5}{(s+1)(s+5)+20} = \frac{s+5}{s^2+6s+25}$$

$$(2) c_n(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_n(s) \cdot N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_n(s) \cdot \frac{\Delta}{s} = \frac{\Delta}{5}$$

(3) 有顺馈时, 系统误差传递函数为

$$\Phi_n(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{\frac{1}{s+1} \left[ 1 - \frac{20K}{s+25} \right]}{1 + \frac{20}{(s+1)(s+5)}} = \frac{s+5-20K}{s^2+6s+25}$$

$$\text{令 } c_n(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_n(s) \cdot N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_n(s) \cdot \frac{\Delta}{s} = \Delta \left( \frac{5-20K}{25} \right) = 0$$

得  $K = 0.25$

**3-14** 设控制系统的结构方框图如图 3.38 所示, 其中  $N(s)$  为可量测扰动。若要求系统输出  $C(s)$  完全不受  $N(s)$  的影响, 且跟踪阶跃输入信号的稳态误差为零, 试确定装置  $G_{c1}(s)$  和装置  $G_{c2}(s)$ 。

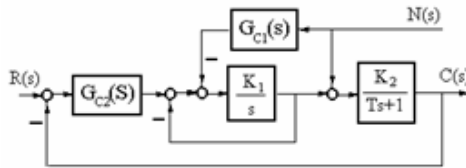


图 3.38 习题 3-14 图

解 (1) 求  $G_{c1}(s)$ 。令

$$\Phi_n(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{\frac{K_2}{Ts+1} \left( 1 + \frac{K_1}{s} \right) - \frac{K_1 K_2}{s(Ts+1)} G_{c1}(s)}{1 + \frac{K_1}{s} + \frac{K_1 K_2 G_{c2}(s)}{s(Ts+1)}} = \frac{K_2 [s + K_1 - K_1 G_{c1}(s)]}{s(Ts+1) + K_1(Ts+1) + K_1 K_2 G_{c2}(s)} = 0 \text{ 得:}$$

$$G_{c1}(s) = \frac{s + K_1}{K_1}。$$

(2) 求  $G_{c2}(s)$ 。令

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 + \frac{K_1}{s}}{1 + \frac{K_1}{s} + \frac{K_1 K_2 G_{c2}(s)}{s(Ts+1)}} = \frac{(s + K_1)(Ts+1)}{s(Ts+1) + K_1(Ts+1) + K_1 K_2 G_{c2}(s)}$$

当  $r(t) = 1(t)$  作用时, 令 
$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_1}{K_1 + K_1 K_2 G_{c2}(s)} = 0$$

明显地, 取  $G_{c2}(s) = \frac{1}{s}$  可以达到目的。

**3-15** 设系统的闭环特征方程为  $s^4 + 6s^3 + 12s^2 + 10s + 3 = 0$ 。试用劳斯稳定判据判别该系统的稳定性。

解: 用劳斯稳定判据判别,  $a_4=1$ ,  $a_3=6$ ,  $a_2=12$ ,  $a_1=10$ ,  $a_0=3$  均大于零, 且有

$s^4$	1	12	3
$s^3$	6	10	
$s^2$	10.33	3	
$s$	8.26	0	
$s^0$	3		

第 1 列元素都为正, 所以, 此系统是稳定的。

**3-16** 试确定图 3.39 所示系统的稳定性。

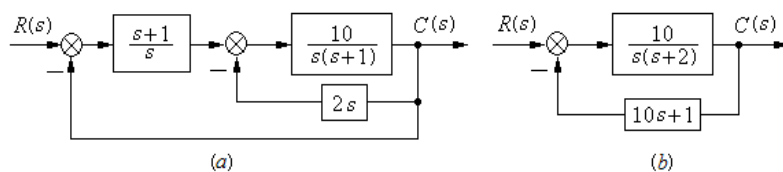


图 3.39 习题 3-16 图

解: (a).  $G(s) = \frac{s+1}{s} \cdot \frac{10}{1 + \frac{2s \times 10}{s(s+1)}} = \frac{10(s+1)}{s^2(s+21)}$

$$D(s) = s^2(s+21) + 10(s+1) = s^3 + 21s^2 + 10s + 1$$

$s^3$	1	10
$s^2$	21	1
$s^1$	$\frac{210-1}{21} > 0$	
$s^0$	1	

系统稳定。

$$(b). \phi(s) = \frac{10}{s(s+2)} = \frac{10}{s^2 + 102s + 10}$$

$$D(s) = s^2 + 102s + 10$$

满足必要条件, 故系统稳定。

**3-17** 已知单位反馈控制系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K}{s(0.01s^2 + 0.2\xi s + 1)}$ ，试求系统稳定时，参

数  $K$  和  $\xi$  的取值关系。

解：  $D(s) = s(0.01s^2 + 0.2\xi s + 1) + k = 0$

$$D(s) = s^3 + 20\xi s^2 + 100s + 100k = 0$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Routh: } s^3 & 1 & 100 \\ s^2 & 20\xi > 0 & 100k \\ s^1 & \frac{2000\xi - 100k}{20\xi} > 0 & \\ s^0 & 100k > 0 & \end{array}$$

$$\text{由 Routh 表第一列系数大于 0 得} \begin{cases} \xi > 0 \\ k > 0 \\ k < 20\xi \end{cases}, \text{ 即 } \frac{k}{\xi} < 20 (\xi > 0, k > 0)$$

**3-18** 设单位反馈控制系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K}{s(1+0.2s)(1+0.1s)}$ ，要求闭环特征根的实部均小于-1，求  $K$  的取值范围。

解：系统特征方程为

$$s(1.0.2s)(1 + 0.1s) + K = 0$$

要使系统特征根实部小于-1，可以把原虚轴向左平移一个单位，令  $w = s + 1$ ，即

$s = w - 1$ ，代入原特征方程并整理得

$$0.02w^3 + 0.24w^2 + 0.46w + K - 0.72 = 0$$

运用劳斯判据，最后得

$$0.72 < K < 6.24$$

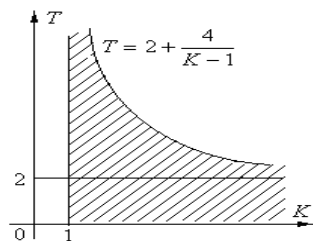
**3-19** 单位反馈控制系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K(s+1)}{s(Ts+1)(2s+1)}$ 。试在满足  $T > 0, K > 1$  的条件下，确定使系统稳定的  $T$  和  $K$  的取值范围，并以  $T$  和  $K$  为坐标画出使系统稳定的参数区域图。

解 特征方程为：

$$D(s) = 2Ts^3 + (2+T)s^2 + (1+K)s + K = 0$$

$$\begin{array}{lclcl} \text{Routh: } s^3 & 2T & 1+K & \Rightarrow & T > 0 \\ s^2 & 2+T & K & \Rightarrow & T > -2 \\ s & 1+K - \frac{2TK}{2+T} & & \Rightarrow & T < 2 + \frac{4}{K-1} \\ s^0 & K & & \Rightarrow & K > 0 \end{array}$$

综合所得条件，当  $K > 1$  时，使系统稳定的参数取值范围如图中阴影部所示。



3-20 系统的结构方框如图 3.40 所示。

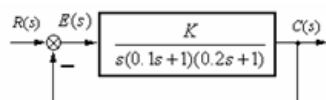


图 3.40 习题 3-20 图

- (1) 为确保系统稳定,  $K$  如何取值?
- (2) 为使系统特征根全部位于  $s$  平面  $s = -1$  的左侧,  $K$  应取何值?
- (3) 若  $R(t) = 2t + 2$  时, 要求系统稳态误差  $e_{ss} \leq 0.25$ ,  $K$  应取何值?

解  $G(s) = \frac{50K}{s(s+10)(s+5)} \quad \begin{cases} K \\ v=1 \end{cases}$

(1)  $D(s) = s^3 + 15s^2 + 50s + 50K$

	$s^3$	1	50	
	$s^2$	15	$50K$	
Routh:	$s^1$	$\frac{50(15-K)}{15}$		$\rightarrow K < 15$
	$s^0$	$50K$		$\rightarrow K > 0$

系统稳定范围:  $0 < K < 15$

(2) 在  $D(s)$  中做平移变换:  $s = s' - 1$

$$D(s') = (s' - 1)^3 + 15(s' - 1)^2 + 50(s' - 1) + 50K$$

$$= s'^3 + 12s'^2 + 23s' + (50K - 36)$$

	$s'^3$	1	23	
	$s'^2$	12	$50K - 36$	
Routh:	$s'^1$	$\frac{312 - 50K}{12}$		$\rightarrow K < \frac{312}{50} = 6.24$
	$s'^0$	$50K - 36$		$\rightarrow K > \frac{36}{50} = 0.72$

满足要求的范围是:  $0.72 < K < 6.24$

(3) 由静态误差系数法

当  $r(t) = 2t + 2$  时, 令  $e_{ss} = \frac{2}{K} \leq 0.25$

得  $K \geq 8$ 。

综合考虑稳定性与稳态误差要求可得：  $8 \leq K < 15$

**3-21** 判断下列系统的可控性。

$$(1) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$(2) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

**解：**

1) 由于该系统控制矩阵  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，系统矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，所以

$$Ab = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

从而系统的能控性矩阵为

$$U_c = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

显然有

$$\text{rank} U_c = \text{rank} [b \quad Ab] = 2 = n$$

满足能控性的充要条件，所以该系统能控。

2) 由于该系统控制矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

系统矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

则有，

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -7 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}$$

从而系统的能控性矩阵为

$$U_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -7 \\ -1 & 1 & 1 & -7 & 1 & 15 \end{bmatrix}$$

有

$$\text{rank} U_c = 3 = n$$

满足能控性的充要条件，所以该系统能控。

**3-22** 判断下列系统的可观测性。

(1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

(2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

**解**

(1) 系统的观测矩阵  $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，系统矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，得

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

系统能观性矩阵为

$$U_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

可知

$$\text{rank} U_o = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = 2 = n$$

满足能观性的充要条件，所以该系统是能观测的。

(2) 系统的观测矩阵  $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，系统矩阵  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ ，于是

$$CA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -14 & -8 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

系统能观性矩阵为

$$U_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \\ -8 & -14 & -8 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

易知

$$\text{rank } U_o = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = 3 = n$$

满足能观性的充要条件, 所以该系统是能观测的。

**3-23** 试确定当  $p$  与  $q$  为何值时下列系统不可控, 为何值时不可观测。

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y = [q \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

**解** 系统的能控性矩阵为

$$U_c = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} p & p-12 \\ -1 & p \end{bmatrix}$$

其行列式为

$$\det[b \quad Ab] = p^2 + p - 12$$

根据判定能控性的定理, 若系统能控, 则系统能控性矩阵的秩为 2, 亦即  $\det[b \quad Ab] \neq 0$ , 可知  $p \neq -4$  或  $p \neq 3$ 。

系统能观测性矩阵为

$$U_o = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & 1 \\ q+1 & 12q \end{bmatrix}$$

其行列式为

$$\det \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = 12q^2 - q - 1$$



根据判定能观性的定理,若系统能观,则系统能观性矩阵的秩为2,亦即  $\det \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} \neq 0$ , 可知  $q \neq \frac{1}{3}$

或  $q \neq -\frac{1}{4}$ 。

#### 第4章 习 题

**4-1** 设单位反馈控制系统的开环传递函数  $G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{(s+1)(s+2)}$ , 试绘制闭环系统的根轨迹。

解: ①根轨迹共2条, 起始于开环极点  $p_1=-1$ ,  $p_2=-2$ ; 随着  $K$  增大至  $\infty$ , 一条根轨迹趋向于开环零点  $z_1=-3$ , 另一条趋于无穷远处;

②实轴上根轨迹段:  $(-\infty, -3]$ ,  $[-2, -1]$ ;

③根轨迹有1条渐近线, 渐近线与实轴正方向的夹角为:

$$\theta_a = \frac{\pm(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{\pm(2k+1)180^\circ}{2-1} = 180^\circ, \quad k=0$$

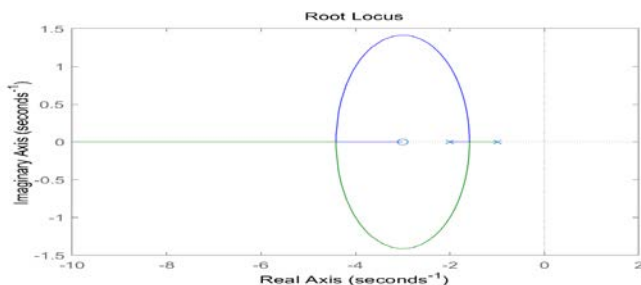
④根轨迹的分离点、汇合点:

$$K = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)}$$

令  $\frac{dK}{ds} = 0$ , 得  $s^2 + 6s + 7 = 0$

解得  $s_1=-1.59$  (分离点),  $s_2=-4.41$  (汇合点)

闭环系统概略根轨迹如题图 4-1 所示。



题图 4-1 习题 4-1 根轨迹

**4-2** 已知反馈控制系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$ , 试绘制该闭环系统的根轨迹。

解:

①该闭环系统有  $n=4$  个开环极点, 分别为  $p_1=0$ 、 $p_2=-4$ 、 $p_{3,4}=-2 \pm j4$ ; 无有限开环零点 (即  $m=0$ ), 该系统有  $n=4$  支根轨迹, 分别起始于4个开环极点, 终止于4个无穷远开环零点;

②复平面实轴上的  $[-4, 0]$  区间段是根轨迹;

③4支趋于无穷远处的根轨迹渐近线与正实轴的夹角为

$$\theta_a = \frac{\pm(2k+1)\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4} \quad (k=0,1,2,3)$$

4 支根轨迹渐近线与实轴的交点为

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{(0+(-4))+(-2+j4)+(-2-j4)-0}{4-0} = -2$$

由此可作出系统根轨迹的 4 条渐近线。

④分离点和汇合点

由闭环系统的特征方程可得

$$K = -s(s+4)(s^2+4s+20) = -(s^4+8s^3+36s^2+80s)$$

令  $\frac{dK}{ds} = 0$ ，即有  $\frac{dK}{ds} = -(4s^3+24s^2+72s+80) = -4(s+2)(s^2+4s+10) = 0$ ，解得  $s_1 = -2$  和

$s_{2,3} = -2 \pm j2.45$ 。对于  $s_1$  点，处于  $[-4, 0]$  区间的根轨迹上，表明该点是根轨迹的分离点或汇合点；

对于  $s_{2,3}$  二点，以  $s_2$  来看，4 个开环极点到该点的矢量与正实轴的夹角之和为  $3\pi$ ，满足根轨迹的相角条件，表明  $s_2$  是根轨迹的分离点或汇合点；同理， $s_3$  点也是系统根轨迹的分离点或汇合点，如题图 4.2 所示。

⑤与虚轴交点

由于闭环系统的特征方程式为

$$s^4 + 8s^3 + 36s^2 + 80s + K = 0$$

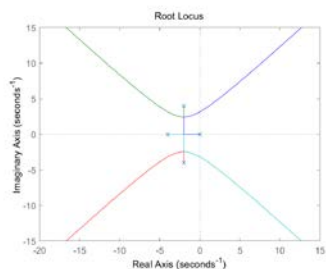
其劳斯阵列为

$s^4$	1	36	$K$
$s^3$	8	80	0
$s^2$	26	$K$	
$s^1$	$\frac{8(260-K)}{26}$	0	
$s^0$	$\frac{26}{K}$		

由劳斯判据可知，当  $K = 260$  时， $s^1$  所在行的全部元素为零，此时由  $s^2$  所在行的元素组成的辅助方程，即

$$26s^2 + K = 0$$

此时的特征根  $s_{1,2} = \pm j\sqrt{10}$ 。表明闭环系统有 2 支根轨迹与虚轴分别相交于  $\pm j\sqrt{10}$  点，根轨迹上的该点对应的增益  $K = 260$ ，如题图 4-2 所示。



题图 4-2 习题 4-2 的根轨迹

**4-3** 系统的开环传递函数为  $G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+10)}$ ，试绘制系统的根轨迹，并求出闭环系统

产生虚纯根的根轨迹增益  $K$ 。

解：1、绘制根轨迹图。

①  $n=3$ ， $m=0$ ，有 3 条根轨迹，分别起始于开环极点  $p_1=0$ ， $p_2=-1$ ， $p_3=-10$ ；3 条根轨迹均趋于无穷远处；

② 实轴上根轨迹段： $(-\infty, -10]$ ， $[-1, 0]$ ；

③ 根轨迹有 3 条渐近线，渐近线与实轴正方向的夹角为：

$$\theta_a = \frac{\pm(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{\pm(2k+1)180^\circ}{3} = -60^\circ, 60^\circ, 180^\circ, k=0,1,2$$

渐近线与实轴交点为：

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{-1-10}{3-0} = -\frac{11}{3}$$

④ 根轨迹的分离点、会合点：

$$K = -(s^3 + 11s^2 + 10s)$$

令  $\frac{dK}{ds} = 0$ ，得  $3s^2 + 22s + 10 = 0$

解得  $s_1 = -6.85$ （舍）， $s_2 = -0.49$ （分离点）

⑤ 与虚轴交点

由于闭环系统的特征方程式为

$$s^3 + 11s^2 + 10s + K = 0$$

其劳斯阵列为

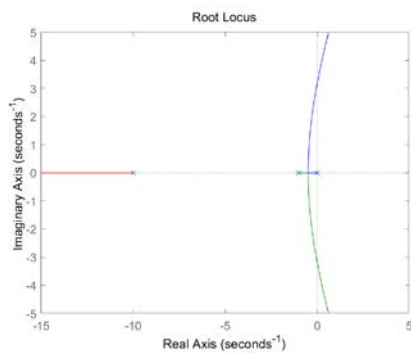
$s^3$	1	10
$s^2$	11	K
$s^1$	$10-K/11$	0
$s^0$	K	

当  $K=110$  时， $s^1$  所在行的全部元素为零，此时由  $s^2$  所在行的元素组成的辅助方程，即

$$11s^2 + 110 = 0$$

此时的特征根  $s_{1,2} = \pm j\sqrt{10}$ 。表明闭环系统有 2 支根轨迹与虚轴分别相交于  $\pm j\sqrt{10}$  点，根轨迹上的该点对应的增益  $K=110$ 。

闭环系统概略根轨迹如题图 4-3 所示。



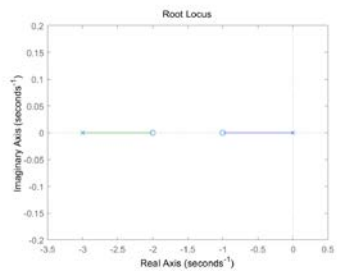
题图 4-3 习题 4-3 的根轨迹

2、由上分析可知，产生纯虚根的根轨迹增益  $K = 110$

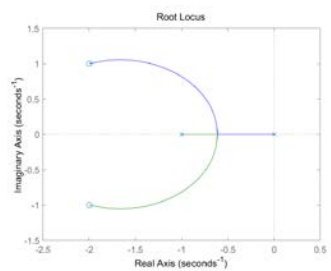
**4-4** 已知开环零点  $z$  和开环极点  $p$ ，试概略画出相应的闭环根轨迹图。

- (1)  $z = -1, -2, p = 0, -3$ ;
- (2)  $p = 0, -1, z_{1,2} = -2 \pm j$ ;
- (3)  $p_1 = -2, p_{2,3} = -1 \pm j1, z = -3$ ;

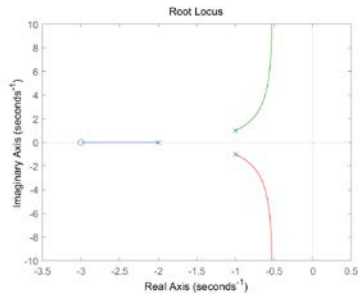
解：根据常规根轨迹基本法则 1、2、3，绘制 4-4 相应的闭环根轨迹如题图 4.4 所示。



(a)



(b)



(c)

题图 4-4 习题 4-4 的根轨迹

**4-5** 设单位反馈控制系统的开环传递函数为

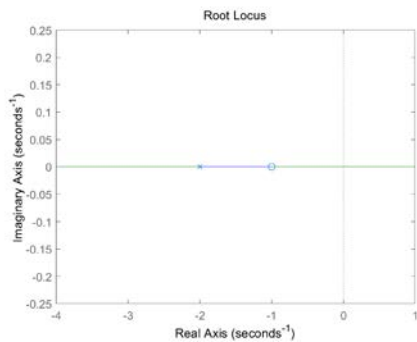
$$G(s) = \frac{K(s+1)^2}{(s+2)^2}$$

若该控制系统为正反馈，试绘制其根轨迹。

解：由于系统为正反馈，故为非最小相位系统，其零度根轨迹绘制步骤如下：

- ① 有 2 条根轨迹，根轨迹起始于开环极点  $p_{1,2} = -2$ ，终止于开环零点  $z_{1,2} = -1$ ；
- ② 实轴上的根轨迹区间  $(-\infty, +\infty)$ ；
- ③ 根轨迹的起始角和终止角均为 0 度。

由上画出零度根轨迹如题图 4-5 所示。



题图 4-5 习题 4-5 的根轨迹

**4-6** 已知单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(1+\tau_1 s)}{s(1+5s)}$$

若  $K=5$ ，试作出以  $\tau_1$  为参量的根轨迹图。

解：系统的闭环特征方程为  $D(s) = 5s^2 + s + 5\tau_1 s + 5 = 0$

$$G'(s) = \frac{\tau_1 s}{s^2 + 0.2s + 1}$$

按照常规根轨迹绘制法则，绘制  $\tau_1$  为参量的广义根轨迹。

①  $n=2, m=1$ , 有 2 条根轨迹, 分别起始于开环极点  $p_1=-0.1+j0.995$ ,  $p_2=-0.1-j0.995$ ; 1 条根轨迹趋向于开环零点  $z_1=0$ , 另一条趋于无穷远处;

② 实轴上根轨迹段:  $(-\infty, 0]$ ;

③ 根轨迹有 1 条渐近线, 渐近线与实轴正方向的夹角为:

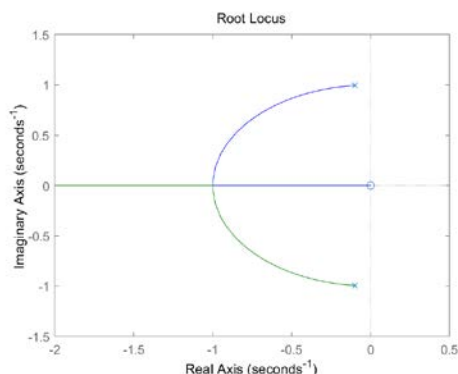
$$\theta_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)180^\circ}{2-1} = 180^\circ$$

③ 根轨迹的分离点、汇合点:

$$\tau_1 = -\frac{(s^2 + 0.2s + 1)}{s}$$

令  $\frac{d\tau_1}{ds} = 0$ , 得  $s^2 - 1 = 0$ , 解得  $s_1=1$  (舍),  $s_2=-1$  (分离点)

该根轨迹在复平面上部分是以零点为圆心, 以零点到分离点之间的距离为半径的圆弧, 根轨迹如图 4-6 所示。



题图 4-6 习题 4-6 的根轨迹

**4-7** 单位负反馈系统的开环传递函数为:

$$G(s) = \frac{K(2s+1)}{s^2(0.2s+1)^2}$$

试绘制  $K$  从  $0 \sim \infty$  变化时闭环系统的根轨迹, 并确定使闭环系统稳定的  $K$  值范围。

解: (1) 系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*(s+0.5)}{s^2(s+5)^2} (K^* = 50K)$$

①  $n=4, m=1$ , 有 4 条根轨迹, 分别起始于开环极点  $p_1, 2=0$ ,  $p_3, 4=-5$ ; 1 条根轨迹趋向于零点  $z_1=-0.5$ , 其余 3 条均趋于无穷远处;

④ 实轴上根轨迹段:  $(-\infty, -0.5]$ ;

③ 根轨迹有 3 条渐近线, 渐近线与实轴正方向的夹角为:

$$\theta_a = \frac{\pm(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{\pm(2k+1)180^\circ}{3} = -60^\circ, 60^\circ, 180^\circ, k=0, 1, 2$$

渐近线与实轴交点为:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{-5-5-(-0.5)}{4-1} = -3.167$$

④与虚轴交点

由于闭环系统的特征方程式为

$$s^4 + 10s^3 + 25s^2 + K^*s + 0.5K^* = 0$$

其劳斯阵列为

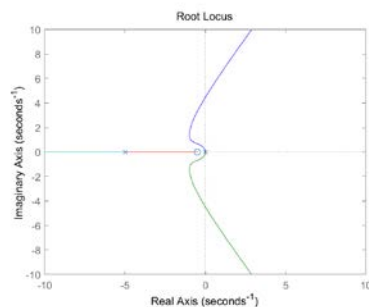
$s^4$	1	25	$0.5K^*$
$s^3$	10	$K^*$	
$s^2$	$25-K^*/10$	$0.5K^*$	
$s^1$	$200K^*-K^{*2}/(250-K^*)$	0	
$s^0$	$0.5K^*$		

当  $K^* = 200$ ，即  $K = 4$  时， $s^1$  所在行的全部元素为零，此时由  $s^2$  所在行的元素组成的辅助方程，即

$$5s^2 + 100 = 0$$

此时的特征根  $s_{1,2} = \pm j2\sqrt{5}$ 。表明闭环系统有 2 支根轨迹与虚轴分别相交于  $\pm j2\sqrt{5}$  点，根轨迹上的该点对应的增益  $K^* = 200$ 。

闭环系统概略根轨迹如题图 4-7 所示。



题图 4-7 习题 4-7 的根轨迹

(2) 闭环系统稳定时  $K$  的取值范围为  $0 < K < 4$ 。

**4-8** 给定开环传递函数

$$G_1(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)}, \quad G_2(s) = \frac{K(s+4)}{(s+1)(s+3)}$$

试绘制它们的根轨迹图，并说明增加一个零点对系统根轨迹的影响。

解：(1)  $G_1(s)$  有两个开环实数极点 -1、-3；实轴上的根轨迹在  $[-3, -1]$  区间，根轨迹具有与实轴垂直的渐近线，渐近线与实轴的交点坐标为 -2，实轴上的汇合点坐标为 -2，根轨迹如题图 4-8(a) 所示；

(2)  $G_2(s)$  有两个开环实数极点 -1、-3，一个开环零点 -4；实轴上的根轨迹在  $(-\infty, -4]$ 、 $[-3, -1]$  区间，实轴上的分离点、汇合点坐标为 -5.732 和 -2.268，根轨迹如题图 4-8(b) 所示

(3) 对照二者根轨迹可以看出，在根轨迹左方增加一个零点后，根轨迹向左方移动。

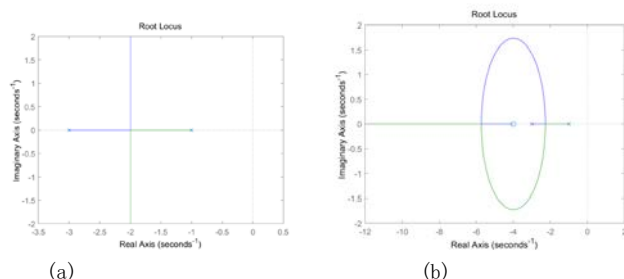


图 4-8 题 4-8 根轨迹图

#### 4-9 给定开环传递函数

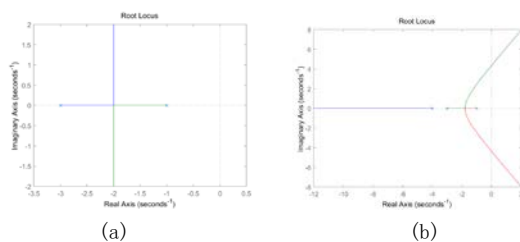
$$G_1(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)}, \quad G_2(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

试绘制它们的根轨迹图，并说明增加一个极点对系统根轨迹的影响。

解：（1） $G_1(s)$  有两个开环实数极点-1、-3；实轴上的根轨迹在 $[-3, -1]$ 区间，根轨迹具有与实轴垂直的渐近线，渐近线与实轴的交点坐标为-2，实轴上的会合点坐标为-2，根轨迹如题图 4-9(a)所示；

（2） $G_2(s)$  有 3 个开环实数极点-1、-3、-4；实轴上的根轨迹在 $(-\infty, -4]$ 、 $[-3, -1]$ 区间，3 条根轨迹均趋于无穷远处，根轨迹渐近线方向为-60 度、60 度、180 度，渐近线与实轴交点坐标为-2.667，实轴上，汇合点坐标为-1.785，根轨迹如题图 4-9(b)所示

（3）对照二者根轨迹可以看出，在根轨迹左方增加一个极点后，根轨迹向右方移动。



题图 4-9 题 4-9 根轨迹图

#### 4-10 设单位负反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+10)}$$

（1）绘制系统的根轨迹图；

（2）当  $K=100$  时，求出系统的超调量和过渡过程时间。

解：1、绘制根轨迹图。

②  $n=2, m=0$ ，有 2 条根轨迹，分别起始于开环极点  $p_1=0, p_2=-10$ ；2 条根轨迹均趋于无穷远处；

② 实轴上根轨迹段： $[-10, 0]$ ；

③ 根轨迹有 2 条渐近线，渐近线与实轴正方向的夹角为：

$$\theta_a = \frac{\pm(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{\pm(2k+1)180^\circ}{2} = -90^\circ, 90^\circ, k=0,1$$

渐近线与实轴交点为：



$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{0-10}{2-0} = -5$$

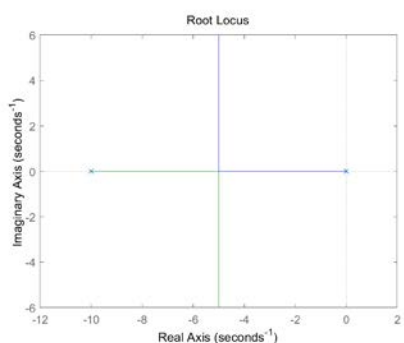
④根轨迹的分离点、会合点：

$$K = -(s^2 + 10s)$$

令  $\frac{dK}{ds} = 0$ ，得  $2s + 10 = 0$

解得  $s = -5$ ，此时  $K = 25$

闭环系统概略根轨迹如题图 4.10 所示。



题图 4-10 习题 4-10 的根轨迹

(2) 当  $K=100$ ，开环传递函数为

$$G_K(s) = \frac{100}{s(s+10)}$$

则  $\omega_n = 10$  (rad/s)， $\xi = 0.5$ ，因此

$$\sigma\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\% = 16.3\%$$

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = 0.6(s)(\pm 5\%), t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 0.8(s)(\pm 2\%)$$

**4-11** 设单位负反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+4)}$$

(1) 绘制系统的根轨迹图；

(2) 求系统具有欠阻尼振荡响应时  $K$  值范围；

(3)  $K$  取何值时，系统处于临界稳定状态，其等幅振荡的频率是多少？

解：(1) 绘制根轨迹图。

①  $n=3$ ， $m=0$ ，有 3 条根轨迹，分别起始于开环极点  $p_1=0$ ， $p_2=-2$ ， $p_3=-4$ ；3 条根轨迹均趋于无穷远处；

② 实轴上根轨迹段： $(-\infty, -4]$ ， $[-2, 0]$ ；

③ 根轨迹有 3 条渐近线，渐近线与实轴正方向的夹角为：

$$\theta_a = \frac{\pm(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{\pm(2k+1)180^\circ}{3} = -60^\circ, 60^\circ, 180^\circ, k=0,1,2$$

渐近线与实轴交点为:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = -2$$

④根轨迹的分离点、会合点:

$$K = -(s^3 + 6s^2 + 8s)$$

令  $\frac{dK}{ds} = 0$ , 得  $3s^2 + 12s + 8 = 0$

解得  $s_1 = -0.85$  (分离点), 此时 **K=3.08**;  $s_2 = -3.15$  (舍)

⑤与虚轴交点

由于闭环系统的特征方程式为

$$s^3 + 6s^2 + 8s + K = 0$$

其劳斯阵列为

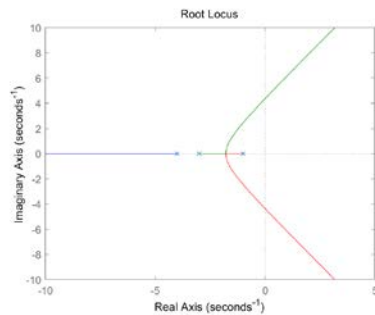
$s^3$	1	8
$s^2$	6	K
$s^1$	$8-K/6$	0
$s^0$	K	

当  $K = 48$  时,  $s^1$  所在行的全部元素为零, 此时由  $s^2$  所在行的元素组成的辅助方程, 即

$$8s^2 - 8 = 0$$

此时的特征根  $s_{1,2} = \pm j2\sqrt{2}$ 。表明闭环系统有 2 支根轨迹与虚轴分别相交于  $\pm j2\sqrt{2}$  点, 根轨迹上的该点对应的增益  $K = 48$ 。

闭环系统概略根轨迹如题图 4.14 所示。



题图 4-11 习题 4-11 的根轨迹

(2) 分析系统性能

①  $0 < K < 48$  时, 闭环系统的根轨迹都位于  $s$  平面左半平面, 系统是稳定的;

②  $0 < K < 3.08$  时, 闭环系统的特征根均位于实轴上, 系统的性能主要由位于实轴上的两个主导极点确定, 系统处于过阻尼状态;

③  $K = 3.08$  时, 闭环系统的特征根有位于实轴上的二重根, 系统的性能主要由重极点确定, 系统处

于临界阻尼状态;

④3.08 < K < 48 时, 闭环系统的特征根为共轭复根和实轴上的根, 系统的性能主要由共轭复根确定, 系统处于欠阻尼状态;

(3) 稳定情况下的最大 K 值为 K=48; 系统处于等幅振荡时的频率  $\omega_n = 2\sqrt{2}(\text{rad/s})$

**4-12** 已知负反馈系统的传递函数为  $G(s) = \frac{K}{s^2(s+1)}$ ,  $H(s) = s+a$

(1) 利用 Matlab 有关函数作出  $0 \leq a < 1$  时系统的根轨迹和单位阶跃响应曲线;

(2) 讨论 a 值变化对系统动态性能及稳定性的影响 ( $0 \leq a < 1$ )。

**解** (1) (a) 取  $a = 0.1, K = 1$

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+a)}{s^2(s+1)} = \frac{K(s+0.1)}{s^3+s^2}$$
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{1}{s^3+s^2+s+0.1}$$

Matlab 文本 A4.3

```
p=[1 0.1];  
q=[1 1 0 0];  
rlocus(p,q)  
num=[1];  
den=[1 1 1 0.1];  
step(num,den)
```

系统的根轨迹如题图 4-12(a) 所示和单位阶跃响应曲线如题图 4-12(b) 所示。

(b) 取  $a = 0.5, K = 1$

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+0.5)}{s^3+s^2}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3+s^2+s+0.5}$$

Matlab 文本 A4.4

```
p=[1 0.5];  
q=[1 1 0 0];  
rlocus(p,q)  
num=[1];  
den=[1 1 1 0.5];  
step(num,den)
```

系统的根轨迹如题图 4-12(c) 所示和单位阶跃响应曲线如题图 4-12(d) 所示。

(c) 取  $a = 0.9, K = 1$

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+0.9)}{s^3+s^2}$$

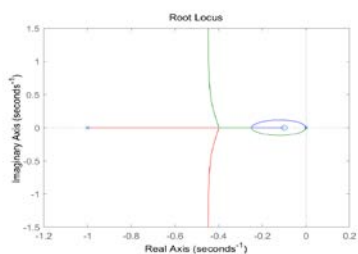
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3 + s^2 + s + 0.9}$$

Matlab 文本 A4.5

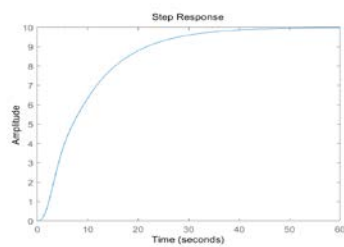
```
p=[1 0.9];
q=[1 1 0 0];
rlocus(p,q)
num=[1];
den=[1 1 1 0.9];
step(num,den)
```

系统的根轨迹如题图 4-12(e)所示和单位阶跃响应曲线如题图 4-12(f)所示。

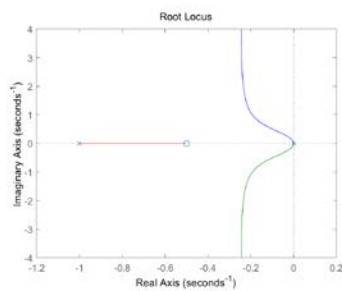
(2) 随  $a$  值减少, 主导极点由一对共轭复数的二阶衰减振荡系统变成由一个负实数的一阶系统, 对系统动态性能和稳定性都有利。



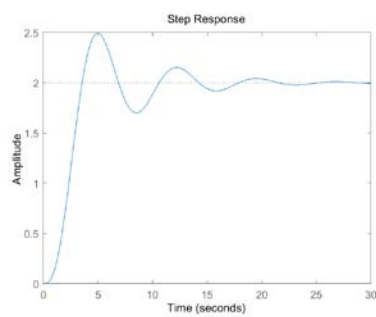
(a)



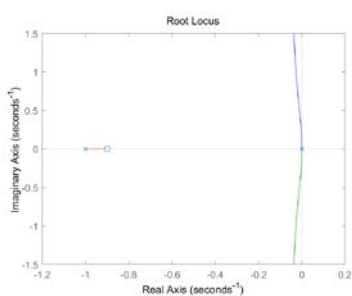
(b)



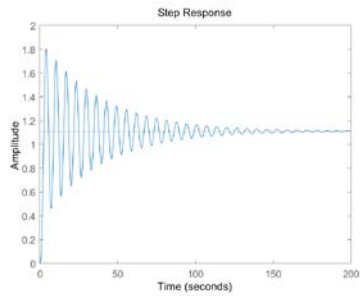
(c)



(d)



(e)



(f)

题图 4-9 题 4-9 图

### 第 5 章 习 题

5-1 单位反馈控制系统的开环传递函数如下式所示，分别求取  $K=10$  及  $K=100$  时的相位裕度和增益裕度。

批注 [c1]: 教材习题为 5-4

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+5)}$$

解：相角裕度可通过对数幅频特性用图解法求出。  $K=10$  时，

$$G(s) = \frac{10}{5s(1+s)(1+s/5)}$$

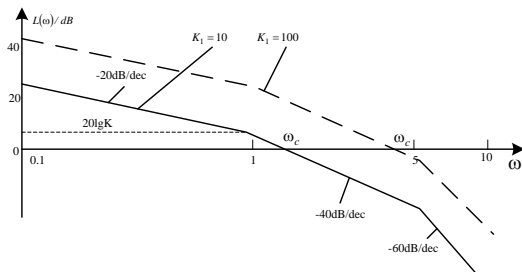


图 5-41 习题 5-1 解图

由上图可知：

$$40 \lg \frac{\omega_c}{\omega_1} = 20 \lg K = 20 \lg 2$$

得剪切频率  $\omega_c = \sqrt{2} = 1.414$ 。

$$\text{相角裕度为: } \gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega_c - \arctan \frac{\omega_c}{5} = 19.5^\circ$$

当  $K$  从 10 变到 100 时， $20 \lg K = 20 \lg 20 = 26 \text{ dB}$ ，如图中虚线所示。

$$40 \lg \frac{\omega'_c}{\omega_1} = 20 \lg K = 20 \lg 20$$

相角裕度为：

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega'_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega'_c - \arctan \frac{\omega'_c}{5} = -29.2^\circ$$

求增益裕度，则需先求出  $\omega_g$ 。

$$-90^\circ - \arctan \omega_g - \arctan \frac{\omega_g}{5} = -180^\circ \Rightarrow \omega_g = \sqrt{5}$$

当  $K=10$  时，有

$$L_g = -20 \lg A(\omega_g) = -20 \lg \frac{10}{\omega_g \sqrt{1 + \omega_g^2} \sqrt{25 + \omega_g^2}} = 9.54 \text{ dB}$$

当  $K=100$  时，有

$$L_g = -20 \lg A(\omega_g) = -20 \lg \frac{100}{\omega_g \sqrt{1 + \omega_g^2} \sqrt{25 + \omega_g^2}} = -10.5 \text{ dB}$$

**5-2** 若系统的开环传递函数如下式所示，试用 Nyquist 判据判别其闭环系统的稳定性。

$$G(s)H(s) = \frac{4.5}{s(2s+1)(s+1)}$$

解：画出开环系统幅相频率特性，如下图所示：

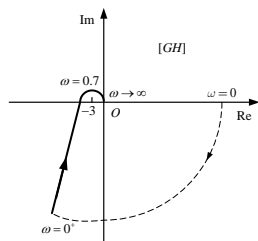


图 5-42 习题 5-2 解图

从上图中可知， $N = -1$ ；而由表达式  $G(s)H(s)$  可知  $P = 0$ 。

根据 Nyquist 判据有： $Z = P - 2N = 0 - 2 \times (-1) = 2$ ，因此闭环系统不稳定。

**5-3** 系统单位阶跃输入下的输出  $c(t) = 1 - 1.8e^{-4t} + 0.8e^{-9t}$  ( $t \geq 0$ )，求系统的频率特性表达式。

解：

$$C(s) = \mathcal{L}^{-1}[c(t)] = \frac{1}{s} - \frac{1.8}{s+4} + \frac{0.8}{s+9}$$

闭环传递函数

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{1}{s} - \frac{1.8}{s+4} + \frac{0.8}{s+9}}{\frac{1}{s}} = \frac{36}{(s+4)(s+9)}$$

$$G(j\omega) = \frac{36}{(j\omega+4)(j\omega+9)} = \frac{36}{\sqrt{\omega^2+16} \sqrt{\omega^2+81}} e^{-j(\lg^{-1} \frac{\omega}{4} + \lg^{-1} \frac{\omega}{9})}$$

**5-4** 单位反馈控制系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{4}{s+1}$ ，试求当下列输入信号作用于闭环系统时，系统的稳态输出

$$(1) \quad r(t) = \sin(t + 30^\circ);$$

批注 [c2]: 教材习题为 5-5，且增益为 5

批注 [c3]: 教材习题为 5-1

批注 [c4]: 教材习题为 5-2

$$(2) \quad r(t) = 2 \cos(2t + 45^\circ);$$

$$(3) \quad r(t) = \sin(t + 30^\circ) - 2 \cos(2t - 45^\circ)。$$

解：求系统闭环传递函数

$$G_K(s) = \frac{4}{s+1} \quad G_B(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_K(s)}{1+G_K(s)} = \frac{4}{s+5}$$

$$G_B(j\omega) = \frac{4}{(j\omega+5)} = \frac{4}{\sqrt{\omega^2+25}} e^{-j \lg^{-1} \frac{\omega}{5}}$$

根据频率特性的定义，以及线性系统的迭加性求解如下：

$$(1) \quad \omega=1, \quad A_r=1, \quad \theta_1=30^\circ$$

$$G_B(j\omega)|_{\omega=1} = A(1)e^{j\theta(1)} = \frac{4}{\sqrt{26}} e^{-j \lg^{-1} \frac{1}{5}} = 0.78 e^{-j11.3^\circ}$$

$$c_s(t) = A_c \sin(t + \theta_2) = A_r A(1) \sin[t + \theta_1 + \theta(1)] = 0.78 \sin(t + 18.7^\circ)$$

$$(2) \quad \omega=2, \quad A_r=2, \quad \theta_1=45^\circ$$

$$G_B(j\omega)|_{\omega=2} = \frac{4}{\sqrt{4+25}} e^{-j \lg^{-1} \frac{2}{5}} = 0.74 e^{-j21.8^\circ}$$

$$c_s(t) = 1.48 \cos(2t + 23.2^\circ)$$

$$(3) \quad c_s(t) = 0.78 \sin(t + 18.7^\circ) - 1.48 \cos(2t - 66.8^\circ)$$

**5-5** 已知某单位反馈控制系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$ ，在正弦信号  $r(t) = \sin 10t$  作用下，闭环系统的稳态响应  $c_s(t) = \sin(10t - \frac{\pi}{2})$ ，试计算 K、T 的值。

批注 [c5]: 教材习题为 5-3

解：系统闭环传递函数为

$$G_B(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_K(s)}{1+G_K(s)} = \frac{K}{Ts^2 + s + K}$$

$\omega=10$  时系统频率特性为

$$\begin{aligned} G(j\omega)|_{\omega=10} &= \frac{K}{(K-T\omega^2) + j\omega} \bigg|_{\omega=10} = \frac{K}{(K-100T) + j10} \\ &= \frac{K}{\sqrt{(K-100T)^2 + 100}} e^{-j \lg^{-1} \frac{10}{K-100T}} = A(\omega) e^{j\theta(\omega)} \end{aligned}$$

由已知条件得  $A(\omega) = \frac{A_c}{A_r} = 1, \theta(\omega) = \theta_2 - \theta_1 = -\frac{\pi}{2}$ ，则有

$$\begin{cases} \frac{K}{\sqrt{(K-100T)^2 + 100}} = 1 \\ K-100T = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = 10 \\ T = 0.1 \end{cases}$$

**5-6** 已知反馈控制系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(4s+1)}$ ，试绘制系统的开环幅相频率特性曲线 (Nyquist 图)，并求闭环系统稳定的临界增益 K 值。

解:  $G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)(j4\omega+15)} = \frac{-5\omega K + j(4\omega^2 - 1)}{\omega(\omega^2 + 1)(16\omega^2 + 1)}$

求  $\omega \rightarrow 0$  时的渐近线:

$$\omega \rightarrow 0 \text{ 时, } \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \infty \angle -90^\circ。$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{-5\omega K}{\omega(\omega^2 + 1)(16\omega^2 + 1)} = -5K$$

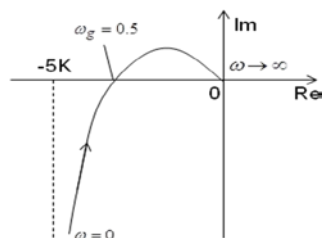
$\omega \rightarrow \infty$  时,  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 \angle -270^\circ$ , 曲线顺时针穿过负实轴

求曲线与负实轴的交点

令  $\operatorname{Im}[G(j\omega_g)] = 0$ , 得  $\omega_g = 0.5$ 。

$$A(\omega_g) = |\operatorname{Re}[G(j\omega)]_{\omega=0.5}| = \frac{1}{1.25} K$$

该系统幅相频率特性曲线如图所示。



当  $A(\omega_g) = 1$  即  $K = 1.25$  时, 闭环系统临界稳定。

**5-7** 设单位反馈控制系统的开环传递函数如下:

(1)  $G(s) = \frac{as+1}{s^2}$ , 试确定使相位裕量等于  $45^\circ$  的  $a$  值。

(2)  $G(s) = \frac{K}{(0.01s+1)^3}$ , 试确定使相位裕量等于  $45^\circ$  的  $K$  值。

(3)  $G(s) = \frac{K}{s(s^2+s+100)}$ , 试确定使增益裕量等于 20dB 的  $K$  值。

解: (1) 令  $\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ - 180^\circ + \operatorname{tg}^{-1} a\omega_c = 45^\circ \Rightarrow a\omega_c = 1$

$$\text{由 } A(\omega_c) = |G(j\omega_c)| = \frac{\sqrt{a^2\omega_c^2 + 1}}{\omega_c^2} = 1 \Rightarrow a = 0.84$$

(2) 令  $\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ - 3 \operatorname{tg}^{-1} 0.01\omega_c = 45^\circ \Rightarrow \omega_c = 100$

$$\text{由 } A(\omega_c) = |G(j\omega_c)| = \frac{K}{(\sqrt{(0.01\omega_c)^2 + 1})^3} = \frac{K}{(\sqrt{1+1})^3} = 1 \Rightarrow K = 2^{1.5} = 2.83$$

(3) 令  $\angle G(j\omega) = -90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega_g}{100 - \omega_g^2} = -180^\circ \Rightarrow \omega_g = 10$

$$K = -20 \lg |G(j\omega_g)| = 20 \text{ db}$$



$$\Rightarrow |G(j\omega_g)| = \frac{K}{\omega_g \sqrt{(100 - \omega_g^2)^2 + \omega_g^2}} = \frac{K}{100} = 0.1 \Rightarrow K = 10$$

**5-8** 设单位反馈控制系统的开环传递函数为:

$$G(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(s+1)}$$

- (1) 求系统相位裕量为  $60^\circ$  时的  $K$  值;
- (2) 求系统增益裕量为 20dB 时的  $K$  值;
- (3) 估算谐振峰值  $M_r = 1.4$  时的  $K$  值。

解: (1)  $\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \lg^{-1} 0.1\omega_c - \lg^{-1} \omega_c = 60^\circ \Rightarrow \lg^{-1} \frac{0.1\omega_c + \omega_c}{1 - \omega_c^2} = 30^\circ \Rightarrow \omega_c \approx 0.51$

$$\frac{K}{\omega_c \sqrt{(0.1\omega_c)^2 + 1} \sqrt{\omega_c^2 + 1}} = 1 \Rightarrow K = 0.57$$

(2)  $\angle G(j\omega_g) = -90^\circ - \lg^{-1} \omega_g - \lg^{-1} 0.1\omega_g = -180^\circ \Rightarrow \omega_g = \sqrt{10}$

$$K_g = -20 \lg |G(j\omega_g)| = -20 \lg \frac{K}{\omega_g \times \sqrt{\omega_g^2 + 1} \times \sqrt{(0.1\omega_g)^2 + 1}} \Big|_{\omega_g = \sqrt{10}} = 20 \Rightarrow K \approx 1.1$$

(3)  $M_r \approx \frac{1}{\sin \gamma} = 1.4 \Rightarrow \gamma \approx 45.58^\circ$

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.1\omega_c - \arctan \omega_c = 45.58^\circ$$

$$\frac{0.1\omega_c + \omega_c}{1 - 0.1\omega_c^2} = \tan 44.42^\circ \Rightarrow 0.098\omega_c^2 + 1.1\omega_c - 0.98 = 0 \Rightarrow \omega_c = 0.83$$

$$\frac{K}{\omega_c \sqrt{0.01\omega_c^2 + 1} \sqrt{\omega_c^2 + 1}} = 1$$

$$K = \omega_c \sqrt{0.01\omega_c^2 + 1} \sqrt{\omega_c^2 + 1} \Big|_{\omega_c = 0.83} = 1.1$$

**5-9** 设单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$$

, 若要求系统的穿越频率  $\omega_c$  提高  $a$  倍, 相位裕量  $\gamma$  保持不变, 问  $K$ 、 $T$  应如何变化?

**批注 [c6]:** 教材原题文字为: 问  $K$ 、 $T$  应如何取值?

解:  $L(\omega) = \begin{cases} 20 \lg \frac{K}{\omega} & (\omega \leq \frac{1}{T}) \\ 20 \lg \frac{K}{\omega T \omega} & (\omega \geq \frac{1}{T}) \end{cases}$

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \lg^{-1} \omega_c T = 90^\circ - \lg^{-1} \omega_c T = \text{const}$$

设穿越频率在  $\omega \leq \frac{1}{T}$  频段, 则  $\omega_c = K$ , 若使  $\omega_c$  扩大  $a$  倍, 则  $K$  扩大  $a$  倍, 且  $\gamma$  保持不变, 显然  $T$  需要缩小  $a$  倍。

设穿越频率在  $\omega \geq \frac{1}{T}$  频段, 则  $\omega_c = \sqrt{\frac{K}{T}}$ , 若使  $\omega_c$  扩大  $a$  倍, 且同时保持  $\gamma$  不变, 则  $T$  应缩小  $a$  倍, 只有当  $K$  扩大  $a$  倍才能满足要求, 即变化后的开环截止频率为

$$\omega_c' = \sqrt{\frac{aK}{T/a}} = a\sqrt{\frac{K}{T}} = a\omega_c$$

两种情况的讨论结论一致, 即  $K$  扩大  $a$  倍,  $T$  缩小  $a$  倍。

**5-10** 设单位反馈控制系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{10}{s(0.2s+1)(0.02s+1)}$ , 试根据相位裕量和增益裕量分析闭环系统的稳定性。

解: 计算相角裕量

方法一, 由对数幅频渐近线近似计算穿越频率  $\omega_c$

$$L(\omega) = \begin{cases} 20\lg \frac{10}{\omega} & (\omega \leq 5) \\ 20\lg \frac{10}{\omega \times 0.2\omega} & (5 \leq \omega \leq 50) \\ 20\lg \frac{10}{\omega \times 0.2\omega \times 0.02\omega} & (\omega \geq 50) \end{cases} \Rightarrow \frac{10}{\omega_c \times 0.2\omega_c} = 1 \quad \omega_c = 7.07 \quad (5 \leq \omega \leq 50)$$

相角裕量

$$\gamma = 180^\circ + \angle G_k(j\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \lg^{-1} 0.2\omega_c - \lg^{-1} 0.02\omega_c = 27.22^\circ$$

方法二, 按定义计算穿越频率  $\omega_c$

$$\frac{10}{\omega_c \sqrt{(0.2\omega_c)^2 + 1} \sqrt{(0.02\omega_c)^2 + 1}} = 1 \Rightarrow \omega_c \approx 6.22$$

相角裕量

$$\gamma = 180^\circ + \angle G_k(j\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \lg^{-1} 0.2\omega_c - \lg^{-1} 0.02\omega_c = 31.7^\circ$$

计算幅值裕量:

$$\text{令 } \theta(\omega) = -90^\circ - \lg^{-1} 0.2\omega_g - \lg^{-1} 0.02\omega_g = -180^\circ \Rightarrow \omega_g \approx 15.81 \text{ rad/s}$$

方法一, 由对数幅频渐近线近似得

$$\text{得 } k_g = 20\lg \frac{1}{|G(j\omega_g)|} = -20\lg \frac{10}{\omega_g \times 0.2\omega_g} = 14 \text{ dB} \quad (5 \leq \omega_g = 15.81 \leq 50)$$

方法二, 由定义得

$$k_g = 20\lg \frac{1}{A(\omega_g)} = -20\lg \frac{10}{\omega_g \sqrt{(0.2\omega_g)^2 + 1} \sqrt{(0.02\omega_g)^2 + 1}} = 14.81 \text{ dB}$$

$\therefore$  系统闭环稳定。

**5-11** 反馈控制系统的开环传递函数如下, 试绘制系统的对数幅频特性的渐近线和对数相频特性曲线。

$$G(s) = \frac{10(s-50)}{s(s+10)} = \frac{50(0.02s-1)}{s(0.1s+1)}$$

解: ① 典型环节的标准形式

$$G(s) = \frac{50(0.02s-1)}{s(0.1s+1)}$$

②  $K = 50$ ,  $20\lg K = 34.0$ 。

③ 转折频率

$\omega_1 = 10$ , 一阶惯性环节;  $\omega_2 = 50$ , 不稳定的一阶微分环节。

④  $\nu=1$ ，低频渐近线斜率为  $-20\text{dB/dec}$ ，且过  $(1, 34\text{dB})$  点。

⑤ 系统相频特性按下式计算

$$\theta(\omega) = -90^\circ - \arctg 0.1\omega + 180^\circ - \arctg 0.02\omega, \text{ 得}$$

	1	2	5	10	20	50	100	200
	83.1°	76.4°	57.7°	33.7°	4.8°	-33.7°	-57.7	-73.1

系统的对数幅频特性的渐近线和对数相频特性曲线下图所示。

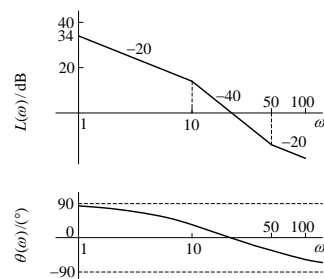


图 5-43 习题 5-11 解图

**5-12** 已知反馈控制系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(4s+1)}$ ，试绘制系统的极坐标曲线，并求闭环系统稳定的临界增益  $K$  值。

批注 [c7]: 无该题

$$\text{解: } G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)(j4\omega+1)} = \frac{-5\omega K + j(4\omega^2 - 1)}{\omega(\omega^2 + 1)(16\omega^2 + 1)}$$

$$\omega \rightarrow 0 \text{ 时, } \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \infty \angle -90^\circ。$$

求  $\omega \rightarrow 0$  时的渐近线

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{-5\omega K}{\omega(\omega^2 + 1)(16\omega^2 + 1)} = -5K$$

$$\omega \rightarrow \infty \text{ 时, } \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 \angle -270^\circ, \text{ 曲线顺时针穿过负实轴。}$$

求曲线与负实轴的交点

$$\text{令 } \text{Im}[G(j\omega)] = 0, \text{ 得 } \omega = 0.5。$$

$$A(\omega_g) = |\text{Re}[G(j\omega)]_{\omega=0.5}| = \frac{1}{1.25} K$$

该系统幅相频率特性曲线如下图所示。

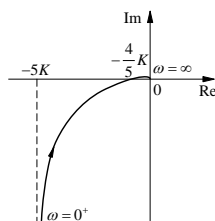


图 5-44 习题 5-12 解图

当  $A(\omega_g) = 1$  即  $K = 1.25$  时，闭环系统临界稳定。

**5-13** 某反馈控制系统的结构图和极坐标曲线如图 5.38 (a)、(b) 所示，图中

$$G(s) = \frac{K(T_3s+1)}{(T_1s+1)(T_2s-1)}, \quad H(s) = T_2s-1 \quad (K、T \text{ 为给定正数})$$

试判定系统的稳定性。

**批注 [c8]:** 教材习题 5-12，缺教材习题 5-13 的习题答案

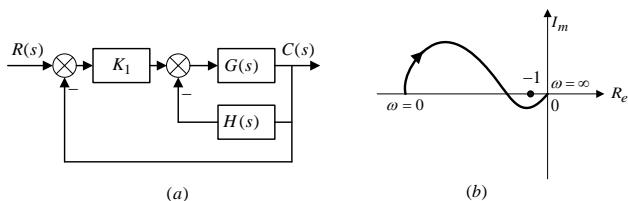


图 5.38 习题 5-13 图

$$\text{解: } G_k(s) = \frac{K_1 G}{1+GH} = \frac{K_1 \frac{K(T_3s+1)}{(T_1s+1)(T_2s-1)}}{1 + \frac{K(T_3s+1)(T_2s-1)}{(T_1s+1)(T_2s-1)}} = \frac{K_1 K(T_3s+1)}{(T_2s-1)[(T_1s+1) + K(T_3s+1)]}$$

二阶系统，有一个右半平面的开环极点， $p=1$ ， $v=0$ 。由极坐标曲线可知  $a=1$ ， $b=\frac{1}{2}$ 。

$$z = p - 2(a-b) = 1 - 2(1 - 1/2) = 0$$

因此，系统稳定，复平面左半平面有两个闭环极点，右半平面、虚轴上均无闭环极点。

**5-14** 某随动控制系统的结构图如图 5.39 所示，试判别其稳定性。

**批注 [c9]:** 与教材习题 5-14 的图号和文字有出入

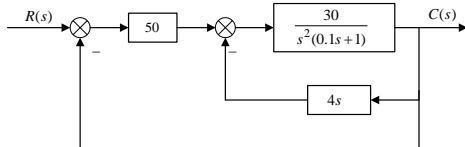


图 5.39 习题 5-14 图

解：时域分析法得特征方程为

$$1 + \frac{50 \times \frac{30}{s^2(0.1s+1)}}{1 + \frac{120s}{s^2(0.1s+1)}} = 0 \Rightarrow 0.1s^3 + s^2 + 120s + 1500 = 0$$

$Q 120 < 1500 \times 0.1$ ，因此，该系统不稳定。

**5-15** 试求如图 5.40 所示网络的频率特性，并绘制其极坐标曲线。

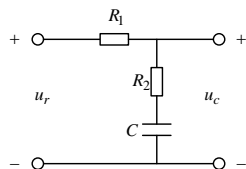


图 5.40 习题 5-15 图

解：（1）网络的频率特性

$$G(j\omega) = \frac{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{jR_2 C\omega + 1}{j(R_1 + R_2)C\omega + 1}$$

（2）绘制频率特性曲线

$$G(j\omega) = \frac{jT_1\omega + 1}{jT_2\omega + 1} = \frac{\sqrt{(T_1\omega)^2 + 1}}{\sqrt{(T_2\omega)^2 + 1}} e^{j(\lg^{-1} T_1\omega - \lg^{-1} T_2\omega)}$$

其中  $T_1 = R_2 C$ ,  $T_2 = (R_1 + R_2) C$ ,  $T_2 > T_1$ 。

起始段,  $\omega = 0, A(\omega) = 1, \theta(\omega) = 0^\circ$ 。

中间段, 由于  $T_2 > T_1$ ,  $A(\omega)$  减小,  $\theta(\omega)$  先减小后增加, 即曲线先顺时针变化, 再逆时针变化。

终止段,  $\omega \rightarrow \infty, \lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \frac{T_1}{T_2} < 1, \theta(\omega) \rightarrow 0^\circ$ 。

网络幅相频率特性曲线如下图所示。

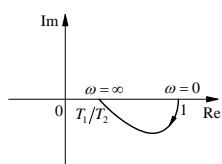


图 5-45 习题 5-15 解图

**5-16** 单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{16}{s^2(0.1s + 1)}$$

期望对数幅频特性如图 5.41 所示, 试求串联控制器的传递函数  $G_c(s)$ , 并比较加入串联控制器  $G_c(s)$

前后, 系统的相位裕量。

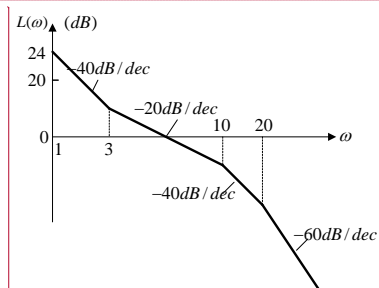


图 5.41 习题 5-16 图

解：期望传递函数

$$20 \lg K = 24 \Rightarrow K = 15.84$$

$$G'(s) = \frac{15.84(\frac{1}{3}s + 1)}{s^2(0.1s + 1)(\frac{1}{20}s + 1)}$$

批注 [c10]:

批注 [c11R10]: 教材习题 5-18

串联环节的传递函数

$$G_c(s) = \frac{G'(s)}{G(s)} = \frac{0.99(\frac{1}{3}s+1)}{0.05s+1}$$

串联  $G_c(s)$  前:  $20\lg K = 20\lg 16 = 24.1$   $\omega_1 = 1/0.1 = 10$

$40\lg \omega_c = 24 \Rightarrow \omega_c = 4$

$\gamma = 180^\circ - 180^\circ - \lg^{-1} 0.1 \times 4 = -21.8^\circ$ , 系统不稳定。

串联  $G_c(s)$  后:  $20\lg \frac{\omega_c}{3} + 40\lg \frac{3}{1} = 24 \Rightarrow \omega_c = 5.28$

$\gamma = 180^\circ + \lg^{-1} \frac{1}{3} \times 5.28 - 180^\circ - \lg^{-1} 0.1 \times 5.28 - \lg^{-1} 0.05 \times 5.28 = 17.8^\circ$ , 系统稳定。

**5-17** 根据状态方程模型绘制阶跃响应曲线及 Bode 图, 试用 MATLABc 编程实现。

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} -10 & -31 & -30 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 2 \quad 2]X + 2u \end{cases}$$

批注 [c12]: 教材习题 5-23

解: 在 Matlab 编辑窗口, 编写绘图程序为

```
>> a=[-10 -31 -30;1 0 0;0 1 0]; b=[1 0 0]'; c=[0 2 2]; d=[2];
>> sys=ss(a,b,c,d);
>> figure; step(sys);
>> figure; bode(sys);
执行后, 即可绘制出 Bode 图。
```

**5-18** 在反馈控制系统中, 其前向通道的传递函数为  $G(s) = \frac{5}{s(s-8)}$ , 反馈通道的传递函数为

$H(s) = 1 + K_n s (K_n > 0)$ 。试确定闭环系统稳定时反馈参数  $K_n$  的临界值。

批注 [c13]: 教材习题 5-19

解: (1) 求闭环系统传递函数对应的实频与虚频特性。

其实现的程序代码如下:

```
>> syms s g h u v;
>> syms kn omega omegac real;
>> s=j*omega;
>> G=10/(s*(s-10));
>> H=1+kn*s;
>> GH=G*H;
>> U=factor(real(GH))
U =
-10*(1+10*kn)/(omega+10*i)/(omega-10*i)
>> v=factor(imag(GH))
v =
-10*(-10+omega^2*kn)/(omega+10*i)/(omega-10*i)/omega
```

(2) 当闭环系统处于临界稳定时, 开环系统的频率响应  $G(j\omega)H(j\omega)$ , 即 Nyquist 曲线将通

过 $[G(j\omega)H(j\omega)]$ 平面上的点 $(-1, j0)$ , 此时 $\omega = \omega_c$ 。那么有:

$$\begin{cases} V(\omega_c) = 0 \\ U(\omega_c) = -1 \end{cases}$$

其实现的程序代码如下:

```
>> syms kn omega omegac real;
>> [kn, omegac]=solve('10*(1+10*kn)/(-omegac+10*j)=-1', '10*(-10*kn*omegac^2)/(omegac+10*j)/omegac/(omegac+10*j)=0', kn, omegac)
kn =
-1/10-1/10*j
omegac =
10+10*j
0
```

即闭环系统稳定时反馈参数 $K_n=1$ , 此时 $\omega_c = \sqrt{10}$  rad/s。

**5-19** 已知一个反馈控制系统的开环传递函数分别为

$$G(s) = \frac{10(s+2)}{(s+1)(s+4)}, \quad G(s) = \frac{10(s+2)}{(s+1)(s+4)} e^{-0.8s}$$

试在同一张图上绘制系统的 Bode 图, 并对其结果进行比较。

**批注 [c14]:** 教材习题 5-20

解: 用 bode() 函数绘制系统的波特图, pade() 函数可以近似表示 $e^{-0.8s}$ 。

其实现的程序代码如下:

```
>> num1=10*[1 2];
>> den1=conv([1 1], [1 4]);
>> sys1=tf(num1, den1);
>> [num, den]=pade(0.8, 4);
>> num2=conv(num1, num);
>> den2=conv(den1, den);
>> sys2=tf(num2, den2);
>> bode(sys1, 'm-', sys2, '.')
```

**5-20** 已知反馈控制系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{3(5s+2)}{s(s^2+2s+2)(s+1)}$ , 试绘制系统的 Bode 图, 并

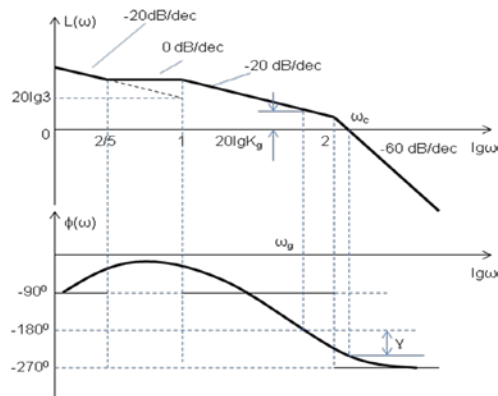
求出系统的增益裕度、相位裕度。

**批注 [c15]:** 教材习题 5-21

解:

$$|G(j\omega)| = \frac{3\sqrt{25\omega^2 + 4}}{\omega\sqrt{\omega^2 + 1}\sqrt{(2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}}$$

$$\varphi(j\omega) = -90^\circ + \tan^{-1} \frac{5\omega}{2} - \tan^{-1} \frac{\omega}{1} - \tan^{-1} \frac{2\omega}{2 - \omega^2}$$



$$60 \lg \frac{\omega_c}{2} + 20 \lg \frac{2}{1} = 20 \lg 3 + 20 \lg \frac{1}{2/5}$$

解得  $\omega_c \approx 3.1$

$$\varphi(j\omega_c) = -90^\circ + \tan^{-1} \frac{5\omega}{2} - \tan^{-1} \frac{\omega}{1} - \tan^{-1} \frac{2\omega}{2-\omega^2} \approx -208.48^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(j\omega_c) \approx -28.48^\circ$$

由  $\varphi(j\omega_g) = -90^\circ + \tan^{-1} \frac{5\omega_g}{2} - \tan^{-1} \frac{\omega_g}{1} - \tan^{-1} \frac{2\omega_g}{2-\omega_g^2} = -180^\circ$ ，解得

$$\omega_g \approx 1.8$$

$$|G(j\omega_g)| = \frac{3\sqrt{25\omega_g^2 + 4}}{\omega_g \sqrt{\omega_g^2 + 1} \sqrt{(2-\omega_g^2)^2 + 4\omega_g^2}} \approx 0.48$$

**5-21** 根据状态方程模型绘 c 制脉冲响应曲线以及 Nyquist 图，试用 MATLAB 编程实现。

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} -6 & -23 & -34 & -26 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \ 0 \ 2 \ 0]X + 2u \end{cases}$$

批注 [c16]: 教材习题 5-22

解：实现的程序代码如下：

```
>> a=[-6 -23 -34 -26; 1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0]; b=[1 0 0 0]';
>> c=[0 0 2 0]; d=[2];
>> sys=ss(a,b,c,d);
>> impulse(sys);
>> figure;
>> nyquist(sys);
```



## 第6章 习 题

**6-1** 已知一单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

若闭环系统的一对主导极点为  $s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3}$  和二个实数极点为  $s_3 = -5$ 、 $s_4 = -10$ ，试求相应的  $K$  值。

**解：**

系统的闭环传递函数为

$$\begin{aligned} G_B(s) &= \frac{\frac{K}{s(s+1)(s+2)(s+3)}}{1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)(s+3)}} = \frac{K}{s(s+1)(s+2)(s+3) + K} \\ &= \frac{K}{s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K} \end{aligned}$$

由闭环系统主导极点  $s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3}$ ，实轴极点  $s_3 = -5$ 、 $s_4 = -10$

可得  $s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K = (s^2 + 2s + 4)(s + 5)(s + 10)$

则  $K = 200$ 。

**6-2** 已知单位反馈控制系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{10}{s(0.1s+1)(0.5s+1)}$ 。如对系统进行串联超前校正，且校正装置的传递函数为  $D(s) = \frac{0.23s+1}{0.023s+1}$ ，试求校正后系统的相位裕量和增益裕量。

**解：**系统开环传递函数为  $G(s)D(s) = \frac{10(0.23s+1)}{s(0.1s+1)(0.5s+1)(0.023s+1)}$ ，画出其 Bode 图，如下图 6-2(a)

所示

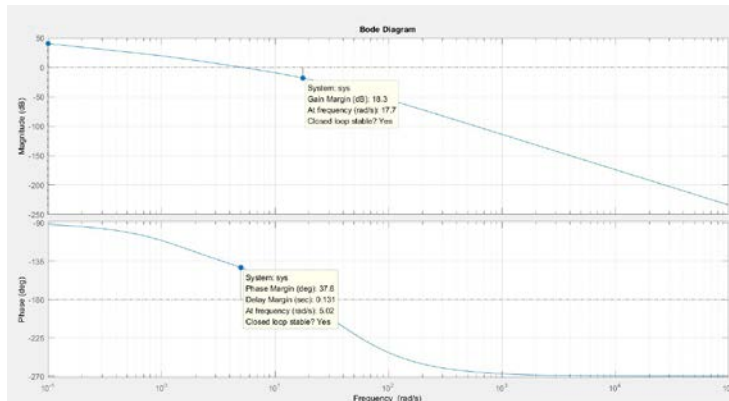


图 6-2 (a)  $G(s)D(s)$  的 Bode 图

由图可得  $\omega_c = 5.02$ ， $\omega_g = 17.7$ ，则相位裕量为

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ + \arctan 0.23\omega_c - 90^\circ - \arctan 0.1\omega_c = 37.6^\circ$$

增益裕量为

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_g)D(j\omega_g)|} = 18.3$$

**6-3** 设单位反馈控制系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K}{s(0.5s+1)}$ ，若要求系统对单位斜坡输入信号的稳态误差  $e_{ss} = 0.05$ ，相位裕量  $\gamma \geq 50^\circ$ ，试确定系统串联校正装置的传递函数。

**解：**由已知条件有  $K = \frac{1}{e_{ss}} = \frac{1}{0.05} = 20$ 。又  $G(s)$  系统的 Bode 图如下图 6-3(a) 所示，

$$20|G(j\omega)| = -20\lg\omega - 20\lg\sqrt{1+(0.5\omega)^2} + 20\lg 20$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan 0.5\omega$$

由图可知， $\gamma = 18^\circ$  和  $K_g = \infty$ 。

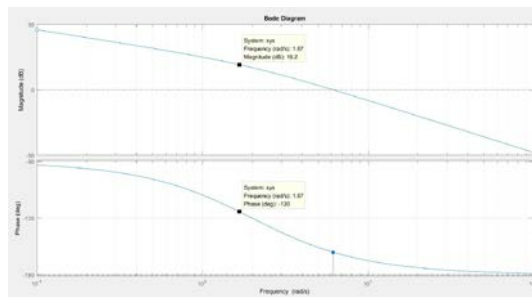


图 6-3(a)  $G(s)$  的 Bode 图

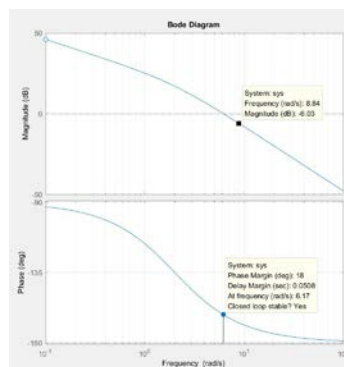


图 6-3(b) 图 6-3(a) 的标注

根据 6-3(a) 所示图还需至少增加超前相位量为  $32^\circ$  ( $\Delta\gamma = 50^\circ - 18^\circ$ )，考虑超前装置的引入使幅值穿越频率增加使得其相位裕量减小，取超前校正装置的最大超前相位量为  $5^\circ + 32^\circ = 37^\circ$ 。

由  $\sin \beta_m = \frac{1-a}{1+a}$  有  $\sin 37^\circ = \frac{1-a}{1+a}$  得  $a = 0.2486$ ，且有  $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$ 。令校正装置  $20\lg \left| \frac{1+jT\omega}{1+j\beta T\omega} \right| = -10\lg a = 6.04 \text{ dB}$ ，在图上读取  $20\lg |G(j\omega)| = -6.04 \text{ dB}$  对应的频率为  $\omega = 8.84 \text{ s}^{-1}$ ，该频率取为  $\omega_c = \omega_m = \frac{1}{\sqrt{a}T} = 8.84 \text{ s}^{-1}$ ，则有  $T = 0.2228 \text{ s}$ ， $aT = 0.0554 \text{ s}$ 。所以，校正装置的传递函数为

$$D(s) = \frac{0.2486s + 1}{0.0554s + 1}$$

**6-4** 已知单位反馈控制系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K}{(0.333s + 1)^3}$ ，要求采用串联滞后校正，使校正后系统的静态位置误差系数  $K_p = 12$ ，相位裕量  $\gamma \geq 100^\circ$ ，增益裕量  $L(\omega_g) \geq 3 \text{ dB}$ 。

**解：**按照已知条件有  $K = K_p = 12$ ，则有  $G(s) = \frac{12}{(0.333s + 1)^3}$ ， $G(s)$  的 Bode 图如下所示

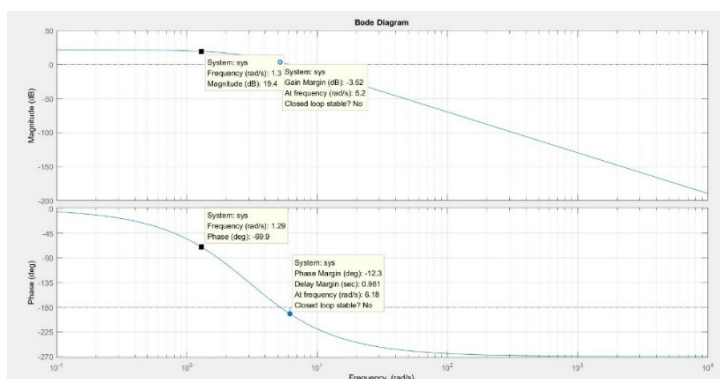


图 6-4 系统 Bode 图

由该 Bode 图可知， $\gamma = -12.3^\circ$ ， $\omega_c = 6.18$ ， $K_g(\text{dB}) = -3.52$ ， $\omega_g = 5.2$ 。

$$G(j\omega) = \frac{12}{(1 + 0.333j\omega)^3}$$

要求  $\gamma \geq 100^\circ$ ，对给定的相位裕量要增加  $5^\circ \sim 12^\circ$  作为补充，令  $\gamma' = 100^\circ$ ，从图中读取对应的频率

为  $\omega' = \omega_c = 1.3 (1/\text{s})$ 。故取校正装置的一个转折频率  $\omega_r = \frac{\omega_c}{5} = 0.26 \text{ s}^{-1}$ ，则有  $T = \frac{1}{0.26} = 3.846 (\text{s})$

又  $\beta T \geq 1$  时，可近似有  $20\lg \left| \frac{1+jT\omega_c}{1+j\beta T\omega_c} \right| \approx -20\lg \beta$ ，令  $20\lg \left| \frac{1+jT\omega_c}{1+j\beta T\omega_c} \right| = -19.4 (\text{dB})$ ，即  $-20\lg \beta = -19.4 \text{ dB}$ ，则有  $\beta = 9.33$  和  $\beta T = 35.88$ 。所以，校正装置的传递函数为

$$D(s) = \frac{9.33s + 1}{35.88s + 1}$$

**6-5** 已知单位反馈控制系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+90)}$ ，试计算：

- (1) 为使系统的  $K_v = 7$ ，确定  $K$  值。
- (2) 画出系统的 Bode 图。
- (3) 计算系统的相位裕量。
- (4) 引入串联滞后校正装置  $D(s) = \frac{s+0.15}{s+0.015}$ ，重新计算系统的  $K_v$  值。

**解：**(1) 系统的静态速度误差系数为  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = K/90 = 7$ ， $K=630$ 。

(2) 系统的 Bode 图如下

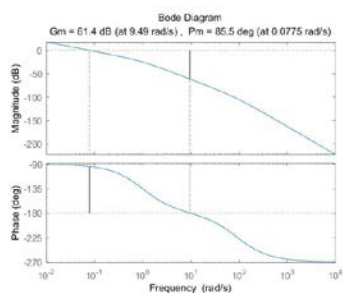


图 6-5(a) 系统的 Bode 图

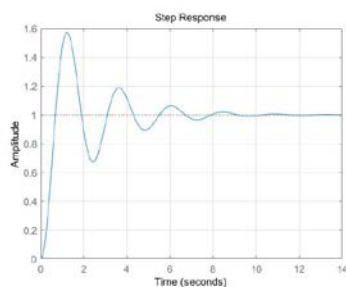


图 6-5(b) 系统的阶跃响应

(3) 由图 6-5(a)可得：幅值穿越频率  $\omega=0.0775 \text{ rad/s}$ ，则有

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan(\omega) - \arctan\left(\frac{\omega}{90}\right) = 85.52^\circ$$

(4)  $D(s)G(s) = \frac{630(s+0.15)}{s(s+1)(s+90)(s+0.015)}$ ， $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sD(s)G(s) = 70$

**6-6** 已知未校正反馈控制系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{50}{s(0.125s+1)(0.5s+1)}$ ，要求设计一个滞后-超前校正装置，使校正后系统的静态速度误差系数  $K_v \geq 100 (1/s)$ ，相位裕量  $\gamma \geq 40^\circ$ ，增益裕量  $L(\omega_g) \geq 10 \text{ dB}$ ，幅值穿越频率  $\omega_c = 5 (1/s)$ 。

**解：**未校正前，系统的 Bode 图如图 6-6 所示

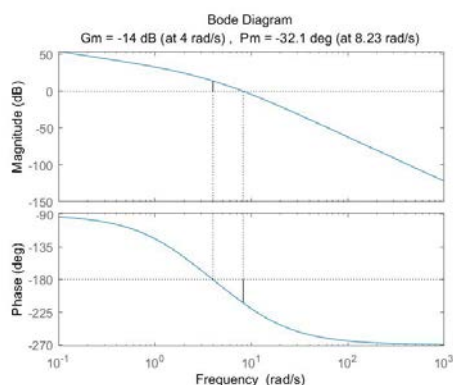


图 6-6 未校正系统 Bode 图

原系统的幅值穿越频率  $\omega_{c0} = 8.23 \text{ rad/s}$ ，相角裕度  $\gamma^* = 90^\circ - \arctan(\frac{\omega}{8}) - \arctan(\frac{\omega}{2}) = -32.15^\circ$ ，由此可知，原系统不稳定。

原系统在  $\omega_c^* = 5 \text{ rad/s}$  处相角储备量  $\gamma_c = -10.2^\circ$ 。该系统单独用超前或滞后校正都难以达到目标，所以确定采用滞后超前校正。选择校正后系统的截止频率  $\omega_c = \omega_c^* = 5 \text{ rad/s}$ ，依据已知要求的相位裕量，取超前部分应提供的最大超前角为

$$\varphi_m = \gamma - \gamma_c(\omega_c^*) + 6^\circ = 40^\circ + 10.2^\circ + 6^\circ = 56.2^\circ$$

$$\text{则 } a = \frac{1 + \sin(\varphi_m)}{1 - \sin(\varphi_m)} = 10.83, \quad \sqrt{a} = \sqrt{10.83} = 3.29$$

在  $\omega_c = 5$  处做垂线，与  $L_0(\omega)$  交于点 A，确定点 A 关于 0dB 线的镜像点 B；以点 B 为中心作斜率为 +20dB/dec 的直线，分别与过  $\omega = \sqrt{a}\omega_c = 16.45$ ， $\omega = \frac{\omega_c}{\sqrt{a}} = 1.52$  两条垂直线交于点 C 和点 D，则 C 点频率

$$\omega_c = \sqrt{a}\omega_c = 3.29 \times 5 = 16.45$$

D 点频率

$$\omega_D = \frac{\omega_c^2}{\omega_c} = 1.52$$

从点 C 向右作水平射线，从点 D 的水平线上确定  $\omega_E = 0.1\omega_c$  的点 E，过点 E 作斜率为 -20dB/dec 的直线交 0dB 的直线交于点 F，响应频率为  $\omega_F$ ，则 E 点频率

$$\omega_E = 0.1\omega_c = 0.1 \times 5 = 0.5$$

DC 延长线与 0dB 线交点出的频率

$$\omega_0 = \frac{\omega_{c0}^2}{\omega_c} = \frac{8.23^2}{5} = 13.55$$

F 点频率

$$\omega_F = \frac{\omega_D \omega_E}{\omega_0} = \frac{1.52 \times 0.5}{13.55} = 0.056$$

可写出校正装置传递函数

$$D(s) = \frac{\frac{s}{\omega_E} + 1}{\frac{s}{\omega_F} + 1} \frac{\frac{s}{\omega_D} + 1}{\frac{s}{\omega_C} + 1} = \frac{\frac{s}{0.5} + 1}{\frac{s}{0.026} + 1} \frac{\frac{s}{1.52} + 1}{\frac{s}{16.45} + 1}$$

校正后系统开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_0(s) = \frac{50(\frac{s}{0.5} + 1)(\frac{s}{1.52} + 1)}{s(0.125s + 1)(0.5s + 1)(\frac{s}{0.026} + 1)(\frac{s}{16.45} + 1)}$$

校正后系统的幅值穿越频率、相角裕度分别为

$$\omega_c = \omega_c^* = 5 \text{ rad/s}$$

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega) = 40.57^\circ > 40^\circ$$

**6-7** 设单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s(0.071s + 1)(0.2s + 1)}$$

采用串联超前校正，要求校正后的系统静态速度误差系数  $K_v = 10(1/s)$ 、超调量为  $M_p \leq 20\%$  和调整时间为  $t_s \leq 0.9(s)$ 。试设计串联超前校正装置。

**解：**校正前系统的开环传递函数的零极点形式为

$$G(s) = \frac{10}{s(0.071s + 1)(0.2s + 1)} = \frac{700}{s(s + 14)(s + 5)}$$

设超前校正装置的传递函数为

$$D(s) = K \frac{\alpha T_2 s + 1}{T_2 s + 1} = K_0 \frac{s + \frac{1}{\alpha T_2}}{s + \frac{1}{T_2}} \quad (\alpha > 1 \quad K_0 = \alpha K)$$

那么，校正后的系统开环传递函数为

$$D(s)G(s) = \frac{700\alpha K}{s(s + 14)(s + 5)} \frac{s + \frac{1}{\alpha T_2}}{s + \frac{1}{T_2}}$$

$$\text{由已知条件计算 } K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sD(s)G(s) = \frac{700\alpha K \frac{1}{\alpha T_2}}{14 \times 5 \times \frac{1}{T_2}} = 10K = 10, \text{ 得 } K = 1。$$

因为已知超调量  $M_p \leq 20\%$  和调整时间  $t_s \leq 0.9$ ，则可依据欠阻尼系统单位阶跃响应的相关计算公式，得到系统校正后的阻尼比  $\zeta = 0.456$ ，无阻尼自由振荡频率  $\omega_n = 9.75(1/s)$ 。

校正后的系统期望主导极点为

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -4.45 \pm j8.68$$

校正后的系统根轨迹应通过复平面上的点  $s_{1,2} = -4.45 \pm j8.68$ ，按照根轨迹的幅值条件，在点  $s_1 = -4.45 + j8.68$  上应满足

$$\left| D(s)G(s) \right|_{s=s_1} = \left| D(s) \right|_{s=s_1} \cdot \left| G(s) \right|_{s=s_1} = \left| \frac{s_1 + \frac{1}{\alpha T_2}}{s_1 + \frac{1}{T_2}} \right| \left| \frac{700\alpha K}{s_1(s_1 + 14)(s_1 + 5)} \right| = 1$$

则应满足  $\left| \frac{700\alpha K}{s_1(s_1 + 14)(s_1 + 5)} \right| = 0.639\alpha$ ，则有

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{\alpha T_2}}{s_1 + \frac{1}{T_2}} \right| \cdot 0.639\alpha = 1 \quad \text{或} \quad \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha T_2} - 4.45\right)^2 + (8.68)^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{T_2} - 4.45\right)^2 + (8.68)^2}} = \frac{1.565}{\alpha} \quad (6-7a)$$

按照根轨迹的相角条件，在点  $s_1 = -4.45 + j8.68$  上，校正后的系统根轨迹应满足

$$\angle D(s)G(s) \big|_{s=s_1} = \angle D(s_1) + \angle G(s_1) = \angle \frac{s_1 + \frac{1}{\alpha T_2}}{s_1 + \frac{1}{T_2}} + \angle \frac{700\alpha K}{s_1(s_1 + 14)(s_1 + 5)} = -180^\circ$$

可得

$$\angle \frac{700\alpha K}{s_1(s_1 + 14)(s_1 + 5)} = -(180^\circ - \tan^{-1} \frac{8.68}{4.45}) - \tan^{-1} \frac{8.68}{14 - 4.45} - \tan^{-1} \frac{8.68}{5 - 4.45} = -245.78^\circ$$

进一步可得

$$\angle \frac{s_1 + \frac{1}{\alpha T_2}}{s_1 + \frac{1}{T_2}} = 65.78^\circ \quad \text{或} \quad \tan^{-1} \frac{8.68}{\frac{1}{\alpha T_2} - 4.45} - \tan^{-1} \frac{8.68}{\frac{1}{T_2} - 4.45} = 65.78^\circ \quad (6-7b)$$

联立式(6-7a)和式(6-7b)求解（可用 Matlab 辅助求解），得

$$\alpha = 6.88, \quad T_2 = 0.024$$

则设计的串联超前校正装置的传递函数为

$$D(s) = K \frac{\alpha T_2 s + 1}{T_2 s + 1} = \frac{0.165s + 1}{0.024s + 1} = 6.88 \frac{s + 6.06}{s + 41.67}$$

校正后系统的特征方程为  $1 + D(s)G(s) = 0$ ，即

$$s^4 + 60.67s^3 + 861.73s^2 + 7732.9s + 29165.7 = 0$$

求得的四个特征根（系统极点）为  $s_{1,2} = -4.45 \pm j8.68$ 、 $s_3 = -6.64$  和  $s_4 = -45$ 。显然，校正后的系统极点  $s_3$  与校正装置引入的开环零点  $z = -6.06$  很接近，因而这个极点对系统动态响应特性的影响很小；极点  $s_4$  远离虚轴，对系统动态响应特性的影响也很小。因此，可以认为极点  $s_{1,2}$  是校正后系统的闭环主导极点。

**6-8** 设单位反馈控制系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K}{s(0.05s+1)(0.25s+1)(0.1s+1)}$ ，试设计串联滞后校正装置，使系统的开环增益不小于 12，超调量  $M_p \leq 30\%$ ，调节时间  $t_s$  小于 6 (s)。

**解：**由题意得，取  $K=12$ ，则待校正系统的传递函数为

$$G_0(s) = \frac{12}{s(0.05s+1)(0.25s+1)(0.1s+1)}$$

绘制出待校正系统的对数幅频渐近特性曲线，如下图 6-8 (a) 所示，待校正系统的幅值穿越频率  $\omega'_c = 6.93 \text{ rad/s}$ ，算出待校正系统的相位裕量为

$$\gamma' = 90^\circ - \arctan(0.05\omega'_c) - \arctan(0.25\omega'_c) - \arctan(0.1\omega'_c) = -23.83^\circ$$

即表明待校正系统不稳定。

将  $M_p$  及  $t_s$  转换为相应的频域指标，由

$$M_p = [0.016 + 0.4(M_r - 1)] \times 100\% < 30\%$$

$$t_s = \frac{K_0 \pi}{\omega_c} < 6, \quad K_0 = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2$$

可求得  $M_r < 1.35$ ， $\omega_c > 1.48 \text{ rad/s}$ 。

再由  $M_r = \frac{1}{\sin \gamma}$ ，解得  $\gamma > 47.79^\circ$ 。由于  $\gamma' < 0$  和  $\omega_c < \omega'_c$ ，故考虑采用滞后校正。

由要求的  $\gamma''$  选择  $\omega_c''$ 。选取  $\varphi(\omega_c'') = -6^\circ$ ，而要求  $\gamma > 47.79^\circ$  选取  $\gamma'' = 48^\circ$ ；于是  $\gamma'(\omega_c'') = \gamma'' - \varphi(\omega_c'') = 54^\circ$ 。由  $\gamma'' = 90^\circ = \arctan(0.05\omega_c'') - \arctan(0.25\omega_c'') - \arctan(0.1\omega_c'')$ ，解得校正后系统的截止频率  $\omega_c'' = 1.59 \text{ rad/s}$ 。



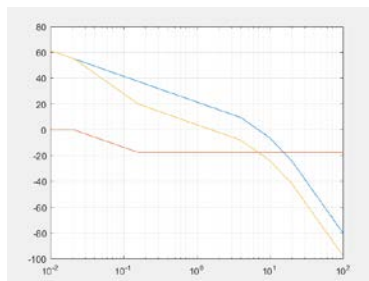


图 6-8 (a) 系统校正前后开环对数幅频渐近特性

确定滞后网络参数  $b$  和  $T$ 。当  $\omega_c^* = 1.59 \text{ rad/s}$  时，由图 6-8(a) 可以测得  $L'(\omega_c^*) = 17.56 \text{ dB}$ ；再由  $20 \lg b = -L'(\omega_c^*)$ ，解得  $b = 0.1325$ 。令  $\frac{1}{bT} = 0.1\omega_c^*$ ，求得

$$T = 47.47$$

于是串联滞后校正网络的对数幅频特性曲线  $L_c(\omega)$  如图 4 所示，其传递函数为

$$D(s) = \frac{bTs + 1}{Ts + 1} = \frac{6.29s + 1}{47.47s + 1}$$

校正后系统的开环对数幅频渐近特性曲线  $L''(\omega)$  如图 4 所示，其传递函数为

$$G_c(s)G_0(s) = \frac{12(6.29s + 1)}{s(0.05s + 1)(0.25s + 1)(0.1s + 1)(47.47s + 1)}$$

验算性能指标

$$\begin{aligned} \gamma'' &= 180^\circ + \varphi_c(j\omega_c'')\varphi_0(j\omega_c'') \\ &= 90^\circ + \arctan(6.29\omega_c'') - \arctan(0.05\omega_c'') - \arctan(0.25\omega_c'') - \arctan(0.1\omega_c'') - \arctan(47.47\omega_c'') \\ &= 49.79^\circ > 47.79^\circ \end{aligned}$$

由此可知，各项性能指标均满足要求。

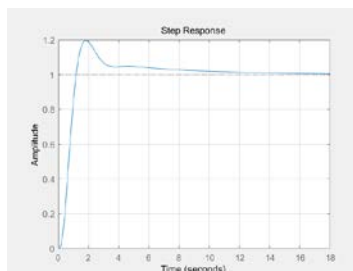


图 6-8(b) 待校正系统的单位阶跃响应

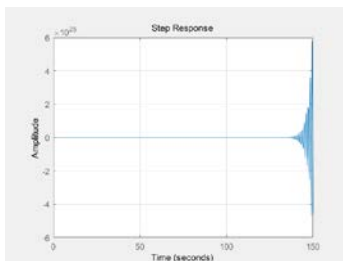


图 6-8(c) 校正后系统的单位阶跃响应

MATLAB 验证，待校正系统的单位阶跃相应如图 6-8(b)所示，闭环系统不稳定；校正后系统的单位阶跃响应如图 6-8(c)所示，测得

$$\sigma\% = 20\% , \quad t_p = 1.84s , \quad t_s = 5.38s$$

**6-9** 已知一单位反馈控制系统，其固定不变部分的对数幅频特性图  $L_0$  和串联校正装置的对数幅频特性图  $L_c$  分别为图 6.35(a)、(b)和(c)所示的三种情况。

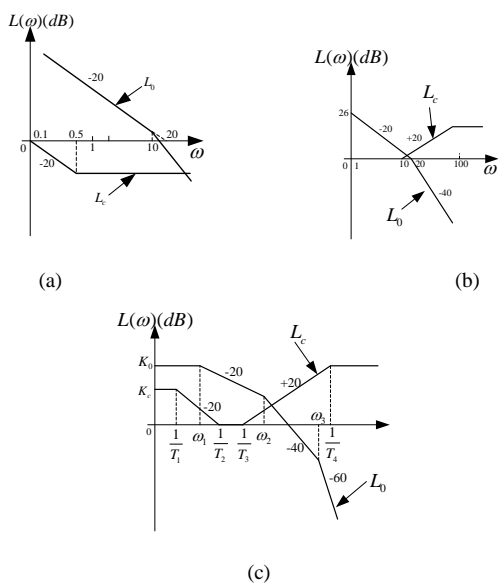


图 6.35 习题 6-9 图

要求：(1) 写出校正后系统的开环传递函数；(2) 分析校正装置对系统的作用。

**解：**(1) (a) 固定不变部分的传递函数为

$$G(s) = \frac{20}{s(s/10+1)}$$

串联校正装置的传递函数

$$G_c(s) = \frac{s/0.5+1}{s/0.1+1}$$

$$\text{校正后系统的传递函数 } G(s)G_c(s) = \frac{20(s/0.5+1)}{s(s/10+1)(s/0.1+1)}$$

(b) 固定不变部分的传递函数

$$G(s) = \frac{20}{s(s/10+1)}$$

串联校正装置的传递函数

$$G_c(s) = \frac{s/10+1}{s/100+1}$$

校正后系统的传递函数为

$$G(s)G_c(s) = \frac{20(s/10+1)}{s(s/20+1)(s/100+1)}$$

(c) 固定不变部分的传递函数

$$G(s) = \frac{K_0}{(s/\omega_1+1)(s/\omega_2+1)(s/\omega_3+1)}$$

串联校正装置的传递函数

$$G(s) = \frac{K_c(T_2s+1)(T_3s+1)}{(T_1s+1)(T_4s+1)}$$

校正后系统的传递函数

$$G(s)G_c(s) = \frac{K_0K_c(T_2s+1)(T_3s+1)}{(s/\omega_1+1)(s/\omega_2+1)(s/\omega_3+1)(T_1s+1)(T_4s+1)}$$

(2) 串联校正装置提高了系统的相位裕度与截止频率，改善了系统的动态性能。

**6-10** 某单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

(1) 试设计串联滞后校正装置和系统的可调增益  $K$ ，使系统的静态速度误差系数  $K_v = 12(1/s)$ ，相位裕量  $\gamma \geq 40^\circ$ 。

(2) 试设计串联超前校正装置和系统的可调增益  $K$ ，满足条件 (1) 中的性能指标。

(3) 比较校正前后两系统的性能。

**解：**(1) 根据要求，以  $K_v = K = 12$  作出校正系统的 Bode 图 (图 6-10(a))

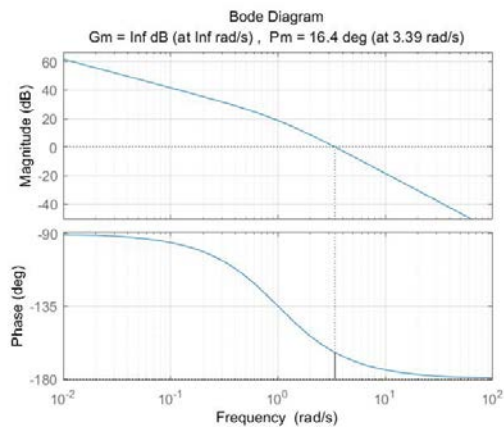


图 6-10(a) 校正系统的 Bode 图

可知，未校正系统的相位裕量只有  $16.4^\circ$ ，未满足要求。在相频特性曲线上，确定校正后系统的穿越频率  $\omega_c$ ，且在该频率处满足

$$\varphi = -\pi + \gamma + (5^\circ \sim 15^\circ) = -\pi + 40^\circ + 5^\circ = -135^\circ$$

由 Bode 图可得  $\varphi = -135^\circ$  对应的频率  $\omega = 1.01$ ，即可选择校正后的系统穿越频率  $\omega_c = 1.01(\text{rad/s})$ 。

由于未校正系统在  $\omega_c = 1.01(\text{rad/s})$  处的幅值为  $18.5\text{dB}$ ，则要求滞后校正装置必须在该频率处产生  $-18.5\text{dB}$  的幅值衰减，由此可求出校正装置参数

$$-20\lg \alpha = -18.5(\text{dB}) \quad \alpha = 8.414$$

由  $\frac{1}{T_2} = (\frac{1}{5} \sim \frac{1}{10})\omega_c$  可求得  $T_2$ 。取  $\frac{1}{T_2} = \frac{1}{10}\omega_c$ ，求出  $T_2 = 9.9$ 。可得滞后校正装置的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{T_2 s + 1}{\alpha T_2 s + 1} = \frac{9.9s + 1}{83.307s + 1}$$

得校正后系统的开环传递函数为

$$G_k(s)G_c(s) = \frac{12(9.9s + 1)}{s(s + 1)(83.307s + 1)}$$

作出校正后的 Bode 图如下所示

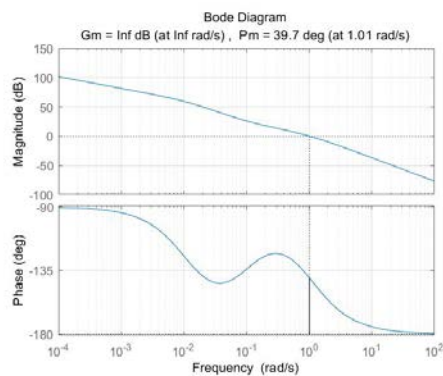


图 6-10(b) 校正后的系统 Bode 图

可得校正后的相位裕量增至  $39.7^\circ$ ，可近似为  $40^\circ$ ，满足系统对相位裕量的要求。

(2) 由要求的  $K_v$  值求出应调整的放大系数  $K$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{s(s+1)} = K = 12$$

未校正系统的 Bode 图如图 6-10(c)所示

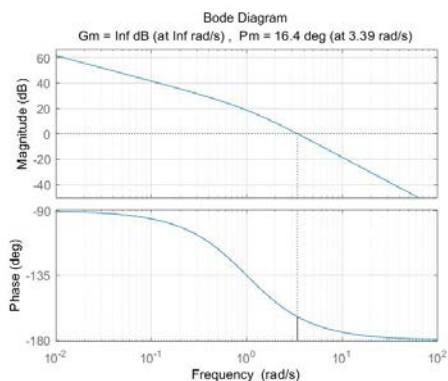


图 6-10(c) 校正前的系统 Bode 图

可知，未校正系统的相位裕量只有  $16.4^\circ$ ，未满足要求。根据相位裕量的要求，确定超前校正装置的相位超前角为

$$\varphi_m = \gamma'' - \gamma' + (5^\circ \sim 10^\circ) = 40^\circ - 16.4^\circ + 5^\circ = 28.6^\circ$$

增加约  $5^\circ$  的超前相角是因为考虑到串联超前校正装置引入后，系统幅频特性的穿越频率  $\omega_c$  要向右移，使原有的  $16.4^\circ$  还要减小。计算有

$$\beta = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} = 2.84$$

超前校正装置在  $\omega_m$  处的幅值为  $10 \lg \beta = 10 \lg(2.84) = 4.5(\text{dB})$ 。因此，在未校正系统的对数幅频特

性曲线上找出与-4.5(dB)平行线的交点，再作垂线与 $\omega$ 轴相交，可求出 $\omega_m = \omega_c = 4.5$  (rad/s),这个频率就是校正后系统的穿越频率 $\omega_c$ 。可求得超前校正装置的 $T_2$

$$T_2 = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\beta}} = \frac{1}{4.5 \times \sqrt{2.84}} = 0.132$$

可得超前校正装置的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1}{\beta} \left( \frac{1 + \beta T_2 s}{1 + T_2 s} \right) = 0.352 \frac{1 + 0.375s}{1 + 0.132s}$$

系统可通过串联一个放大器来补偿超前校正造成的 0.305 倍的衰减作用，其放大倍数为 $\frac{1}{0.352} = \frac{1}{\beta} = 2.84$ 。最后由放大器和超前校正装置组成的校正装置的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1 + 0.375s}{1 + 0.132s}$$

校正后，系统总的开环传递函数为

$$G_k(s)G_c(s) = \frac{12}{s(s+1)} \frac{1 + 0.375s}{1 + 0.132s}$$

由于 $\omega_c = 4.5$ ，可校验 $\gamma''$

$$\gamma'' = \pi + \arctan(0.375 \times 4) - 90^\circ - \arctan(1 \times 4) - \arctan(0.132 \times 4) = 42.51^\circ$$

加入串联超前校正装置后相位裕量增加到了 $42.51^\circ$ 。

(3) 校正后系统的带宽增大，响应速度提高

**6-11** 已知单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s-1)}$$

(1) 试绘制系统的根轨迹简图，并分析系统的稳定情况。

(2) 若进行串联超前校正，其超前校正装置的传递函数为 $D(s) = \frac{s+2}{s+20}$ ，试绘制校正后的系统根轨迹简图，并讨论系统的稳定情况。

**解：**(1) 系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{(s+1)(s-1)}$ ，则开环实极点为 $p_1=-1$ ,  $p_2=1$ ，没有零点。

可得根轨迹图为

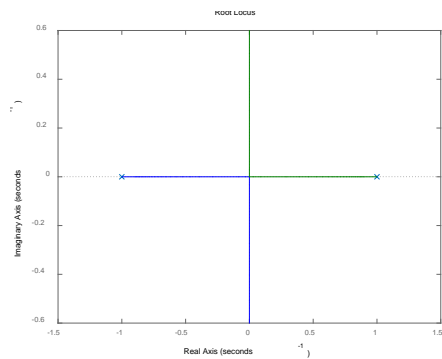


图 6-11 (a) 系统根轨迹图 1

(2) 校正后的传递函数  $G_c(s) = G(s)D(s) = \frac{K(s+2)}{(s+1)(s-1)(s+20)}$ ，则实极点为  $p_1 = -1$ ， $p_2 = 1$ ， $p_3 = -20$ ，零点为  $z_1 = -2$ 。可得根轨迹图为

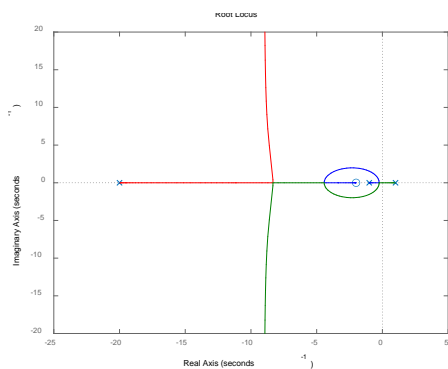


图 6-11 (a) 系统根轨迹图 2

当  $K > 10$  时系统稳定， $0 < K < 10$  时系统不稳定。

**6-12** 设单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{40}{s(0.2s+1)(0.0625s+1)}$$

(1) 若要求校正后系统的相位裕量为  $30^\circ$ ，增益裕量为 10~12 dB，试设计串联超前校正装置。

(2) 若要求校正后系统的相位裕量为  $50^\circ$ ，增益裕量为 30~40 dB，试设计串联滞后校正装置。

**解：**系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{40}{s(0.2s+1)(0.0625s+1)} = \frac{40}{s(\frac{s}{5}+1)(\frac{s}{16}+1)}$$

其对数幅频特性曲线如图 6-12(a)所示

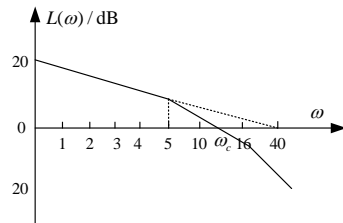


图 6-12(a) 原系统的对数幅频特性图

- (1) 原系统中频区频带窄, 使用超前校正装置  $G_{c1}(s) = \frac{0.0625s+1}{0.00625s+1}$  拓宽频率, 即

$$G_1(s) = \frac{40}{s(0.2s+1)(0.00625s+1)}$$

$$L(\omega) = \begin{cases} 20\lg \frac{40}{\omega} & \omega < 5 \\ 20\lg \frac{40}{\omega \times 0.2\omega} & 5 < \omega < 160 \\ 20\lg \frac{40}{\omega \times 0.2\omega \times 0.00625\omega} & \omega > 160 \end{cases}$$

$$\gamma' = 180^\circ - 90^\circ - \arctg(0.2\omega'_c) - \arctg(0.00625\omega'_c) = 14^\circ < \gamma''$$

由以上可知, 系统性能不满足不满足性能指标要求, 现设计校正网络。

$$\varphi_m \geq \gamma^* - \gamma' + 10^\circ = 26^\circ \quad a = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} = 2.52$$

$$\frac{40\sqrt{a}}{0.2(\omega'_c)^2} = 1, \quad \omega'_c = 18$$

$$\gamma' = 180^\circ + 26^\circ - 90^\circ - \arctg(0.2\omega'_c) - \arctg(0.00625\omega'_c) = 35^\circ > \gamma''$$

$$T = 1/(\omega'_c \sqrt{a}) = 0.035 \quad G_{c2} = \frac{0.088s+1}{2.52(0.035s+1)}$$

系统经校正后, 其开环传递函数为

$$G'(s) = \frac{40}{s(0.2s+1)(0.0625s+1)} \cdot \frac{0.0625s+1}{0.00625s+1} \cdot \frac{0.088s+1}{2.52(0.035s+1)}$$

验证其幅值裕量

$$\begin{aligned} -10 &= 20\lg \frac{15.9 \times 0.088\omega_1}{\omega_1 \times 0.2\omega_1 \times 0.035\omega_1} & \omega_1 &= 25.2 \\ -12 &= 20\lg \frac{15.9 \times 0.088\omega_2}{\omega_2 \times 0.2\omega_2 \times 0.035\omega_2} & \omega_2 &= 28.2 \end{aligned}$$

验证其相角裕量

$$\begin{aligned} \varphi_G(j\omega_1) &= \arctg(0.088\omega_1) - 90^\circ - \arctg(0.2\omega_1) - \arctg(0.00625\omega_1) - \arctg(0.035\omega_1) = -153.3^\circ > -180^\circ \\ \varphi_G(j\omega_2) &= \arctg(0.088\omega_2) - 90^\circ - \arctg(0.2\omega_2) - \arctg(0.00625\omega_2) - \arctg(0.035\omega_2) = -155.3^\circ > -180^\circ \end{aligned}$$



由以上可知，校正后系统满足幅值裕量条件。

(2)  $\gamma = \gamma'' + 5^\circ = 55^\circ$ ，经计算在  $\omega = 2.4$  处有  $\gamma(2.4) = 55.83^\circ$ ，取  $\omega_c'' = 2.4$

此时， $|G(\omega_c'')| = 20\lg \frac{40}{2.4} = 24.436 \text{ dB}$

在  $\omega_c'' = 2.4$  以下 24.436 dB 画水平线，左延 10dec 到  $\omega = 0.24$  处，作 -20dB/dec 线到 E，

$\omega_E = \frac{0.24}{16} = 0.015$ ，如图 6-12(b) 所示

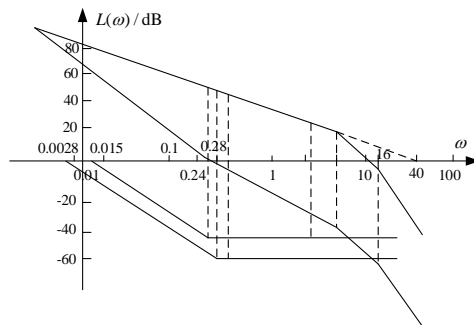


图 6-12(b) 系统校正装置的计算过程

可得滞后校正装置传递函数

$$G_c(s) = \frac{\frac{s}{0.24} + 1}{\frac{s}{0.015} + 1}$$

校正后系统的传递函数为

$$G_c(s)G(s) = \frac{40(\frac{s}{0.24} + 1)}{s(\frac{s}{5} + 1)(\frac{s}{16} + 1)(\frac{s}{0.015} + 1)}$$

$$\gamma' = 90^\circ + \arctg \frac{2.4}{0.24} - \arctg \frac{2.4}{5} - \arctg \frac{2.4}{16} - \arctg \frac{2.4}{0.015}$$

$$= 90^\circ + 84.29^\circ - 25.64^\circ - 8.53^\circ - 89.642^\circ$$

$$= 50.48^\circ \approx 50^\circ$$

试算  $\omega'' = 8.6$ ，可得

$$h = 20\lg |G_c(\omega_c'')G(\omega_c'')| = 20\lg \frac{40 \times 35.8}{8.6 \times 1.99 \times 1.28 \times 573.33} = 18.9 \text{ dB} < 30 \text{ dB}$$

幅值裕量 h 不满足要求。

为增加 h，应将高频段压低，重新设计，使滞后环节高频段幅值衰减 40dB，对应  $20\lg |G(\omega_c''')| = 40 \text{ dB}$

处的  $\omega_c'''$  为

$$\frac{L(\omega_c'')}{\lg 40 - \lg \omega_c''} = \frac{40}{\lg \frac{40}{\omega_c''}} = 20 \Rightarrow \omega_c'' = 0.4$$

$$\gamma(0.4) = 90^\circ - \arctg \frac{0.4}{5} - \arctg \frac{0.4}{16} = 84^\circ$$

以-20dB/dec 交 0dB 于  $E$ ,  $\omega_E = 0.0028$ , 可得滞后校正装置的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{\frac{s}{0.28} + 1}{\frac{s}{0.0028} + 1}$$

在  $\omega_c''' = 0.4$  处有

$$\begin{cases} \gamma_c = \arctg \frac{0.4}{0.28} - \arctg \frac{0.4}{0.0028} = -34.59^\circ \\ L_c = 20 \lg |G_c| = 20 \lg \frac{1.744}{142.86} = -38.27 \text{dB} \end{cases}$$

则

$$G_c(s)G(s) = \frac{40(\frac{s}{0.28} + 1)}{s(\frac{s}{5} + 1)(\frac{s}{16} + 1)(\frac{s}{0.0028} + 1)}$$

验算  $\omega_g''' = 8.6$ , 可得

$$\begin{aligned} h &= 20 \lg |G_c G(\omega_g''')| = -20 \lg \frac{40 \times 30.73}{8.6 \times 1.99 \times 1.1353 \times 3071.5} = 33.7 \text{dB} \\ \gamma &= 180^\circ - G_c(0.4) = 180^\circ - 90^\circ + \arctg \frac{0.4}{0.28} - \arctg \frac{0.4}{5} - \arctg \frac{0.4}{16} - \arctg \frac{0.4}{0.0028} \\ &= 90^\circ + 55^\circ - 4.57^\circ - 1.432^\circ - 89.6^\circ \\ &\approx 50^\circ \end{aligned}$$

幅值裕量与相位裕量均满足要求, 因此, 校正装置的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{\frac{s}{0.28} + 1}{\frac{s}{0.0028} + 1} = \frac{3.57s + 1}{357s + 1}$$

**6-13** 设单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{8}{s(2s + 1)}$$

若采用滞后-超前校正, 其校正装置的传递函数为

$$D(s) = \frac{(2s + 1)(10s + 1)}{(0.2s + 1)(100s + 1)}$$

试绘制校正前后的系统对数幅频特性图, 并计算系统校正前后的相位裕量。

**解：**（1）校正前后对数幅频特性曲线。

校正前开环函数频率特性

$$G(j\omega) = \frac{8}{j\omega(2j\omega+1)}$$

校正前系统由 1 个比例环节（比例系数  $K=8$ ）、1 个积分环节、1 个滞后环节组成。

校正前各个环节的转角频率  $\omega_{T1} = 0.5$

校正后的开环传递函数

$$G_k(s) = G(s)D(s) = \frac{8(10s+1)}{s(0.2s+1)(100s+1)}$$

校正后开环函数频率特性

$$G_k(j\omega) = \frac{8(10j\omega+1)}{j\omega(0.2j\omega+1)(100j\omega+1)}$$

校正后系统由 1 个比例环节（比例系数  $K=8$ ）、1 个积分环节、2 个滞后环节和 1 个导前环节组成。

校正后各个环节的转角频率  $\omega_T$  为  $\omega_{T1} = \frac{1}{0.2} = 5$ ， $\omega_{T2} = \frac{1}{100} = 0.01$ ， $\omega_{T3} = \frac{1}{10} = 0.1$

校正前后对数幅频特性如下图 6-13 所示

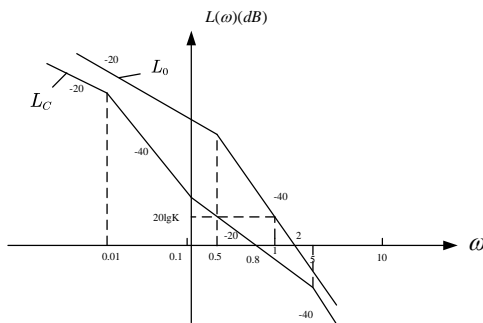


图 6-13 校正前后的系统幅频特性

（2）校正前后相位裕量。

校正前幅频特性

$$|G(j\omega)| = \frac{8}{\omega\sqrt{4\omega^2+1}}$$

校正前相频特性  $\varphi_0(\omega) = -\arctan(2\omega) - 90^\circ$

校正前截止频率

$$\frac{8}{\omega_{c0}\sqrt{4\omega_{c0}^2+1}} = 1 \Rightarrow \omega_{c0} \approx 2$$

校正前相位裕量  $\gamma_0 = \varphi_0(\omega_{c0}) + 180^\circ = 14.04^\circ$

校正后幅频特性

$$|G_k(j\omega)| = \frac{8\sqrt{100\omega^2 + 1}}{\omega\sqrt{0.04\omega^2 + 1} \cdot \sqrt{10000\omega^2 + 1}}$$

校正后相频特性

$$\varphi(\omega) = \arctan(10\omega) - \arctan(100\omega) - \arctan(0.2\omega) - 90^\circ$$

校正后截止频率

$$\frac{8\sqrt{100\omega_{c1}^2 + 1}}{\omega_{c1}\sqrt{0.04\omega_{c1}^2 + 1} \cdot \sqrt{10000\omega_{c1}^2 + 1}} \Rightarrow \omega_{c1} = 0.8$$

校正前相位裕量

$$\gamma = \varphi(\omega_{c1}) + 180^\circ = 16.93^\circ$$

**6-14** 单位反馈控制系统开环传递函数为  $G(s) = \frac{K(s+5)}{(s+2)(s+6)(s+8)}$ ，要求系统阶跃响应的超调量不大于

20%。试利用 Matlab 软件计算：

- (1) 调整时间  $t_s$  与静态位置误差系数  $K_p$ 。
- (2) 相位裕量及对应的幅值穿越频率。
- (3) 设计一种校正装置，使得静态位置误差系数增大为原来的 3 倍，调整时间减少为原来的 0.5 倍，同时超调量要求保持不变。

**解：**(1) 取  $K=145$  时，系统阶跃响应曲线为



图 6-14(a)  $K=145$  时系统的阶跃响应

系统的超调量位 19.88%，满足要求。系统的稳定值  $x(\infty) = 0.8798$ ，调整时间  $t_s = 1.377s$ ，位置误差

系数  $K_p = \frac{1}{K} = \frac{1}{145}$ 。

- (2) 绘制 Bode 图：

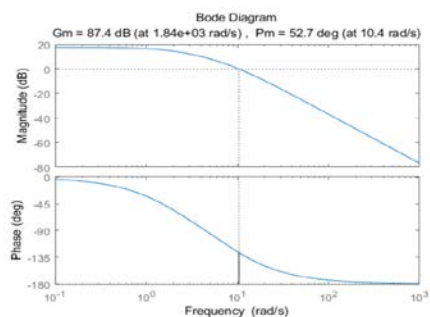


图 6-14(b) 系统的 Bode 图

相位裕量  $\gamma=52.7^\circ$ ，对应穿越频率  $\omega_c=10.4 \text{ rad/s}$

(2) 设计 PD 调节器校正

$$D(s) = K_p(1 + T_D s)$$

校正后的传递函数

$$G_c(s) = G(s)D(s) = \frac{145K_p(1 + T_D s)}{(s+2)(s+6)(s+8)}$$

校正后位置误差系数

$$\frac{1}{145K_p} = \frac{3}{145} \Rightarrow K_p = \frac{1}{3}$$

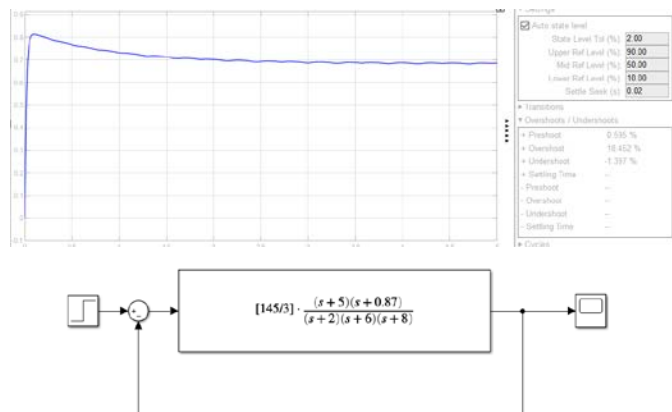


图 6-14(c) 校正后系统的阶跃响应

PD 调节器校正

$$D(s) = 0.33(1 + 0.87s)$$

校正后的系统传递函数

$$G_c(s) = G(s)D(s) = \frac{48.3(1 + 0.87s)}{(s+2)(s+6)(s+8)}$$

**6-15** 已知单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+50)}$$

- (1) 要求系统静态速度误差系数  $K_v = 10(1/s)$ ，试确定  $K$  值。
- (2) 绘制系统极坐标图，判定闭环系统稳定性。
- (3) 绘制 Bode 图，求幅值穿越频率  $\omega_c$  和相位裕量  $\gamma$ 。
- (4) 若要求系统相位裕量  $\gamma \geq 35^\circ$ ，试设计一个滞后校正装置  $D(s)$ 。

**解：** (1)  $\frac{1}{K_v} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{s(s+3)(s+50)} = \frac{1}{10} \Rightarrow K = 15$

(2) 频率特性

$$G(j\omega) = \frac{15}{j\omega(j\omega+3)(j\omega+50)} = \frac{-795}{(\omega^2+9)(\omega^2+2500)} + j \frac{15\omega^2-250}{\omega(\omega^2+9)(\omega^2+2500)}$$

实频特性

$$u(\omega) = -\frac{795}{(\omega^2+9)(\omega^2+2500)}$$

虚频特性

$$v(\omega) = \frac{15\omega^2-250}{\omega(\omega^2+9)(\omega^2+2500)}$$

幅频特性

$$|G(j\omega)| = \frac{0.1}{\omega \sqrt{\frac{1}{9}\omega^2+1} \sqrt{\frac{1}{2500}\omega^2+1}}$$

相频特性

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{3}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{50}\right)$$

当  $\omega = 0$  时，  $u(\omega) = \frac{53}{1500}$ ,  $v(\omega) = -\infty$ ,  $|G(j\omega)| = \infty$ ,  $\varphi(\omega) = -90^\circ$ ;

当  $\omega = \infty$  时，  $u(\omega) = 0$ ,  $v(\omega) = 0$ ,  $|G(j\omega)| = 0$ ,  $\varphi(\omega) = -270^\circ$ ;

系统的极坐标图如下所示

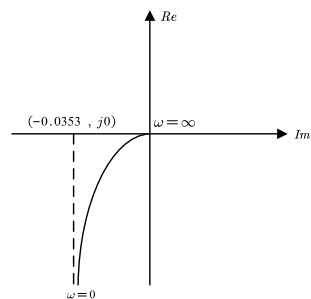


图 6-15(a) 系统的极坐标图

系统在右半平面的极点数为  $P=0$ ，奈奎施特曲线逆时针包围  $(-1, j0)$  的圈数  $N=0$ ， $P=N$ ，所以系统是稳定系统。

(3) 系统由 1 个比例环节（比例系数  $K=15$ ）、1 个积分环节、2 个滞后环节组成。

各个环节的转角频率为  $\omega_{T_1} = \frac{1}{3}$ ， $\omega_{T_2} = \frac{1}{50}$

系统的 Bode 图如下所示

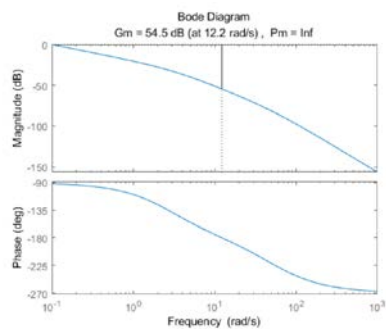


图 6-15(b) 系统 Bode 图

$$|G(j\omega_c)| = \frac{0.1}{\omega_c \sqrt{\frac{1}{9}\omega_c^2 + 1} \cdot \sqrt{\frac{1}{2500}\omega_c^2 + 1}} \Rightarrow \omega_c = 12.2$$

稳定裕度为  $\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 0.102^\circ$

(4) 滞后校正传递函数  $D(s) = \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$

系统校正后的开环传递函数

$$G(s)D(s) = \frac{0.1(Ts+1)}{s(\frac{1}{3}s+1)(0.02s+1)(\alpha Ts+1)}$$

根据已知的  $\gamma \geq 35^\circ$ （取  $\gamma=35^\circ$ ），由  $\angle G(\omega_c) = 180^\circ + \gamma + (5^\circ : 15^\circ)$ ，即

$$-90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega_c}{3}\right) - \arctan\left(\frac{\omega_c}{50}\right) = -180^\circ + 35^\circ + 12^\circ = -138^\circ$$

解得校正后的穿越频率  $\omega_c = 3$

而  $|G(j\omega_c)| = 0.0235$ ，可取  $\alpha = 0.0235$ 。根据经验取  $\frac{1}{T} = \frac{\omega_c}{5 \sim 10} = \frac{\omega_c}{5} = 0.6$ ，于是得  $T = 1.67$ ，设计的滞后校正装置为

$$D(s) = \frac{1.67s + 1}{0.039s + 1}$$

校正后系统的开环传递函数为

$$G(s)D(s) = \frac{0.1(1.67s + 1)}{s(\frac{1}{3}s + 1)(0.02s + 1)(0.039s + 1)}$$

**6-16** 什么是 PID 控制器？写出其输入/输出之间的传递函数。PD、PI 控制器怎样影响系统的上升时间、调整时间、带宽？

**解：**PID 控制器又称之为 PID 调节器，是按照偏差的比例 P、积分 I 和微分 D 进行控制的调节器的简称，它主要针对控制对象的参数进行调节。

$$\text{系统传递函数 } G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

PD 控制对系统性能的影响：减小调节时间，减小超调量，增大系统阻尼，增强系统稳定性，增加高频干扰。

PI 控制对系统性能的影响：提高系统型别，减少系统稳态误差，增强系统抗高频干扰能力，调节时间增大。

**6-17** 传递函数为  $G(s) = K_p(1 + \frac{1}{Ts} + \tau s)$  的控制器具有什么样的控制规律？其参数选择一般具有什么特点？加入控制系统后，系统的性能将会有哪些改善？

**解：**控制规律：PID 控制既有比例作用的及时迅速，又有积分作用的消除余差能力，还有微分作用的超前控制功能。当偏差出现时，微分能立即大幅度动作，抑制偏差的这种跃变；比例同时起消除偏差的作用，使偏差幅度减小，由于比例作用是持久和起主要作用的控制规律，因此可使系统比较稳定；而积分作用慢慢把余差克服掉。

参数调整特点：PID 控制器参数整定的方法很多，概括起来有两大类：一是理论计算整定法。它主要是依据系统的数学模型，经过理论计算确定控制器参数。这种方法所得到的计算数据未必可以直接用，还必须通过工程实际进行调整和修改。二是工程整定方法，它主要依赖工程经验，直接在控制系统的试验中进行，且方法简单、易于掌握，在工程实际中被广泛采用。PID 控制器参数的工程整定方法，主要有临界比例法、反应曲线法和衰减法。三种方法各有其特点，其共同点都是通过试验，然后按照工程经验公式对控制器参数进行整定。



系统性能改善：系统经过 PID 控制后，稳态误差消除，超调量减小到很小的程度，响应速度加快，系统动态性和稳定性都得到改善。

**6-18** 设系统结构图如图 6-18 所示。要求采用串联校正和复合校正两种方法，消除系统跟踪斜坡输入信号的稳态误差，试分别确定串联校正装置  $G_c(s)$  与复合校正前馈装置  $G_r(s)$  的传递函数。

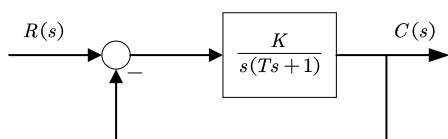


图 6-18 系统结构图

**解：**（1）若使系统跟踪斜坡输入信号的稳态误差为 0，可得

$$G(s) = \frac{\tau s + 1}{s}$$

同时，必须使闭环系统稳定。

校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s)C_0(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(Ts + 1)}$$

其闭环系统的特征方程为

$$Ts^3 + s^2 + K\tau s + K = 0$$

若使系统稳定，则由劳斯稳定判据知，应有  $K\tau > KT$ ，即  $\tau > K$ 。

（2）对于复合前馈校正

$$\Phi_{er}(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 - \frac{KG_r(s)}{s(Ts + 1)}}{1 + \frac{K}{s(Ts + 1)}} = \frac{s(Ts + 1) - KG_r(s)}{s(Ts + 1) + K}$$

由上式可知：当  $K > 0$ ， $T > 0$  时，闭环系统稳定；当输入信号为斜坡输入信号时，系统的稳态误差为

$$e_{ss}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(Ts + 1) - KG_r(s)}{s(Ts + 1) + K} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(Ts + 1) - KG_r(s)}{s^2(Ts + 1) + Ks}$$

若使  $e_{ss}(\infty) = 0$ ，则  $1 - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{KG_r(s)}{s} = 0$ 。可得  $G_r(s) = \frac{s}{K}$

**6-19** 具有 PI 控制器的 0 型系统如图 6.36 所示。

（1）确定  $K_I$ ，使得静态速度误差系数  $K_v = 100$  (1/s)。

（2）对于确定的  $K_I$  值，确定使系统稳定的静态位置误差系数值的范围。

（3）分析系统的静态位置误差系数值的大小超调量的影响，找出使最大超调量最小的静态位置误差系数值。

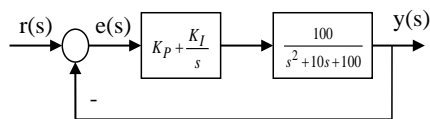


图 6.36 习题 6-19 图

**解:** (1) 根据控制框图计算, 可得该系统的开环传递函数

$$G(s)H(s) = \left(K_p + \frac{K_I}{s}\right) \left(\frac{100}{s^2 + 10s + 100}\right) = \frac{100(K_p s + K_I)}{s^3 + 10s^2 + 100s}$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$$

可得

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{100(K_p s + K_I)}{s^3 + 10s^2 + 100s} = 100$$

则

$$K_I = 100$$

(2) 由题意求系统闭环传递函数

$$G_B = \frac{100(K_p s + K_I)}{s^3 + 10s^2 + 100(1 + K_p)s + 100K_I}$$

该系统的特征方程为

$$s^3 + 10s^2 + 100(1 + K_p)s + 100K_I = 0$$

由劳斯判据得, 要使系统稳定, 须满足以下条件:

$$10K_I - 100(1 + K_p) < 0$$

可得  $K_p$  的范围为

$$K_p > 0.1K_I - 1$$

(3)



(a)  $K_p = 20000$ ,  $K_I = 0$ ,  $K_D = 0$ ,  $\sigma\% = 38.194\%$



(b)  $K_p = 10000$ ,  $K_I = 0$ ,  $K_D = 0$ ,  $\sigma\% = 19.880\%$



(c)  $K_p = 5000$ ,  $K_I = 0$ ,  $K_D = 0$ ,  $\sigma\% = 5.851\%$



(d)  $K_p = 1700$ ,  $K_I = 0$ ,  $K_D = 0$ ,  $\sigma\% = 0.505\%$

图 6-19 不同  $K_p$  参数下的系统阶跃响应曲线

由图(6-19)可知, 当  $K_p = 1700$  时候, 最大超调量最小, 对应的超调量  $\sigma\% = 0.505\%$ 。

**6-20** 设单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{0.08K}{s(s+0.5)}$$

要求满足的性能指标是: 静态速度误差系数  $K_v \geq 4$  (1/s), 相位裕量  $\gamma \geq 50^\circ$ , 超调量  $M_p \leq 30\%$ 。试设计一个串联超前校正装置。

**解:** 由静态速度误差系数  $K_v \geq 4$  (1/s)得

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{0.08K}{s(s+0.5)} = 0.16K = 4$$

故  $K=25$ , 原系统传递函数为  $G(s) = \frac{2}{s(s+0.5)}$ , 令  $|G(j\omega)|=1$ , 可得  $\omega_{c0} = 1.371 \text{ rad/s}$ , 系统本身的相位裕度

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan(2\omega_c) \big|_{\omega_{c0} = 1.371} \approx 20.04^\circ < 50^\circ$$

根据 MATLAB 验证如下:

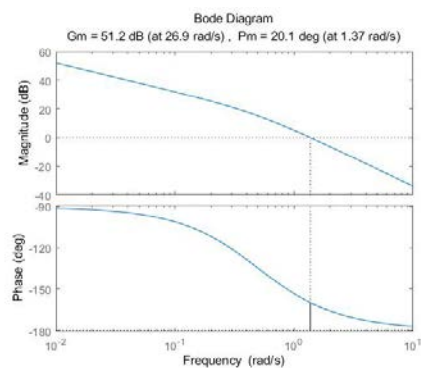


图 6-20 (a) 校正前系统 Bode 图

计算得系统本身的相位裕度为  $20.04^\circ$ 。

由超调量  $M_p \leq 30\%$ ，可将超调量转换为频域指标，由

$$M_p = 100[0.16 + 0.4(M_r - 1)] \leq 30\%$$

可得

$$M_r \leq 1.35$$

又因为

$$M_r = \frac{1}{\sin \gamma}$$

所以

$$\gamma \geq 47.79^\circ$$

结合题意，要求  $\gamma \geq 50^\circ$ ，设超前校正器的传递函数为  $G_c(s) = \frac{aTs+1}{Ts+1}$ ，所提供的相角最大超前量为

$$\varphi_m = \gamma^* - \gamma_0 + 5^\circ = 34.96^\circ$$

超前网络参数  $a = \frac{1 + \sin(\varphi_m)}{1 - \sin(\varphi_m)} = 3.684$ ， $10 \lg a = 5.663 \text{ dB}$ ，在  $-10 \lg a$  处作水平线，与  $L_0(\omega)$  相交于

$A'$  点；设交点频率为  $\omega_{A'}$ ，由  $40 \lg(\frac{\omega_{A'}}{\omega_{c0}}) = 5.663$ ，可得  $\omega_{A'} = \omega_{c0} \cdot 10^{\frac{5.663}{40}} = 1.898$ ，选择  $\omega_c = 2 \text{ rad/s}$  为新的截止频率进行校正。

在  $\omega_c = 2 \text{ rad/s}$  处作垂直线，与  $L_0(\omega)$  相较于 A 点，确定其关于 0 dB 线交于 C 点，对应频率为  $\omega_c$ ；

在 CB 延长线上定 D 点，使  $\frac{\omega_D}{\omega_c} = \frac{\omega_c}{\omega_c}$ ，则 C 点频率

$$\omega_c = \frac{\omega_{c0}^2}{\omega_c} = \frac{1.37^2}{2} = 0.93845$$

D 点频率

$$\omega_D = \frac{\omega_c^2}{\omega_c} = 42.623$$

初步确定校正装置传递函数为

$$G_c(s) = \frac{\frac{s}{\omega_c} + 1}{\frac{s}{\omega_D} + 1} = \frac{\frac{s}{0.938} + 1}{\frac{s}{4.262} + 1}$$

校正后系统的开环传递函数为

$$G^*(s) = G_c(s)G_0(s) = \frac{4(\frac{s}{0.938} + 1)}{(\frac{s}{4.262} + 1)(2s + 1)}$$

校正后系统的截止频率为

$$\omega_c = \omega_c^* = 2.05 \text{ rad/s}$$

$$\gamma^* = 180^\circ + \angle G^*(j\omega_c) = 180^\circ + \arctan(\frac{2}{0.938}) - \arctan(\frac{2}{4.262}) - \arctan(\frac{2}{0.5}) - 90^\circ = 53.77^\circ$$

用 MATLAB 进行验证，系统 Bode 图如下所示

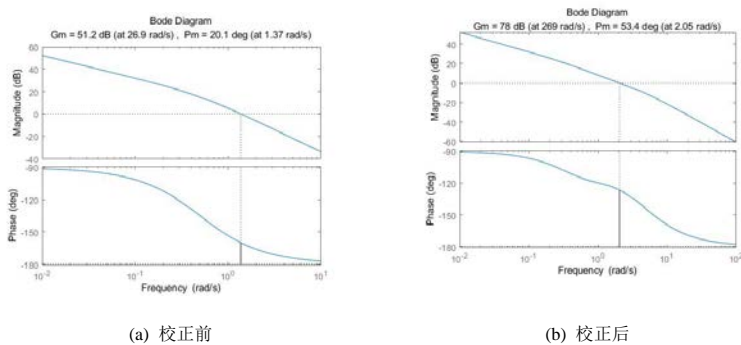


图 6-20 校正前后系统 Bode 图

**6-21** 某控制系统如图 6.37 所示，使用 Z-N 设计方法确定 PID 控制器的参数。

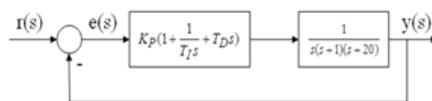


图 6.37 习题 6-21 图

**解：**控制对象传递函数中含有积分环节，其阶跃响应不是 S 型曲线，因而只能用 Z-N 第二设计方法来确定 PID 控制器的参数。

先假设  $T_I \rightarrow \infty$ 、 $T_D = 0$ ，则系统的闭环传递函数为

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K_P}{s(s+1)(s+20) + K_P}$$

系统的特征方程为  $s^3 + 21s^2 + 20s + K_p = 0$ ，将  $s = j\omega$  代入该特征方程可计算得到系统输出产生持续振荡的  $K_p = 120$  和振荡频率  $\omega = \sqrt{20}$  (1/s)，即得系统的临界增益  $K_C = 120$  和持续等幅振荡的周期  $T_c = \frac{2\pi}{\omega} = 1.40$  (s)。依此查表 6-2，可得使系统阶跃响应的超调量约在 25% 左右下的 PID 控制器参数为

$$K_p = 0.6K_C = 72, \quad T_I = 0.5T_C = 0.7, \quad T_D = 0.125T_C = 0.175$$

从而获得 PID 控制律为

$$u(t) = 72 \left( e(t) + \frac{1}{0.7} \int_0^t e(t) dt + 0.175 \frac{de(t)}{dt} \right)$$

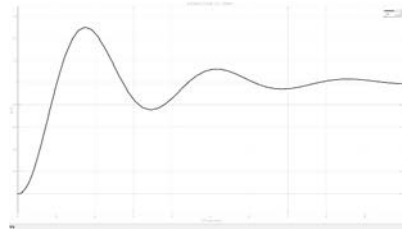
对应的系统闭环传递函数为

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K_p T_D s^2 + K_p s + K_p / T_I}{s^4 + 21s^3 + (20 + K_p T_D)s^2 + K_p s + K_p / T_I} = \frac{12.6s^2 + 0.175s + 102.86}{s^4 + 21s^3 + 32.6s^2 + 72s + 102.86}$$

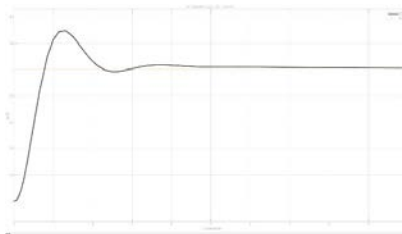
用 MATLAB 可求出该系统的单位阶跃响应，如图 6.26(a)所示是初次按 Z-N 法设计 PID 控制下的系统单位阶跃响应。由图 6-21 (a) 可见，系统的超调量很大，约为 46.324%。在这个基础上，进一步调整 PID 控制器的参数为  $K_p = 72$ ， $T_I = 8.2$ ， $T_D = 32.2$  时，系统的闭环传递函数为

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{14.4s^2 + 18s + 5.81}{s^4 + 6s^3 + 19.4s^2 + 18s + 5.81}$$

用 MATLAB 计算此时系统的单位阶跃响应，如图 6-21 (b) 所示，显然这时系统的超调量显著下降，约为 27.564%，且动态响应速度加快了。



(a)  $K_p=72$ ， $T_I=0.7$ ， $T_D=0.175$



(b)  $K_p=72$ ， $T_I=8.2$ ， $T_D=32.2$

图 6-21 PID 控制系统的单位阶跃响应

**6-22** 已知系统开环传递函数为  $G(s) = \frac{K}{s(0.5s+1)(0.1s+1)}$ ，试设计 PID 校正装置，使系统

$K_v \geq 10$ ,  $\gamma(\omega_c'') \geq 50^\circ$  且  $\omega_c'' \geq 4$ 。

**解：**令  $K = K_v = 10$ ，作待校正系统  $L'(\omega)$ ，如图 6-22(a)所示。由图知， $\omega_c' = 4.47$ ， $\gamma(\omega_c') \approx 0^\circ$ 。

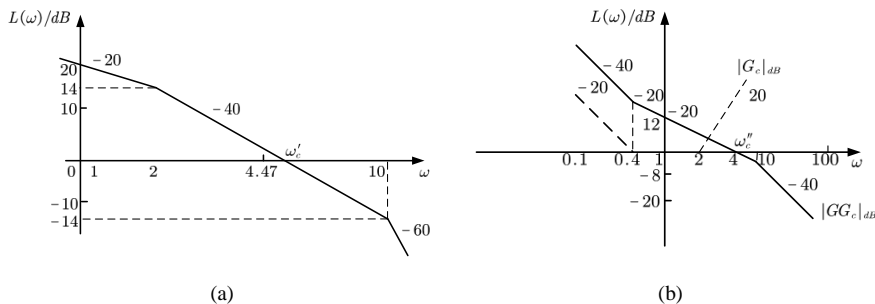


图 6-22 系统校正前后开环对数幅频渐近特性

设 PID 校正装置传递函数为

$$G(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{\tau_1 s} = \frac{(1 + s/\omega_1)(1 + s/\omega_2)}{s/\omega_1}$$

则校正后系统频率特性为

$$G(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega/\omega_1)(1 + j\omega/\omega_2)}{(j\omega)^2(1 + j\omega/2)(1 + j\omega/10)}, K_1 = K_{\omega_1}$$

由于校正后为 II 型系统，故  $K_v$  的要求肯定满足，系统开环增益可任选，由其他条件而定。

初选  $\omega_c'' = 4$ 。为降低系统阶次，选  $\omega_2 = 2$ ，并选  $\omega_1 = 0.4$ ，此时

$$G(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{K_1(1 + j\omega/0.4)}{(j\omega)^2(1 + j\omega/10)}$$

其对数幅频特性应通过截止频率  $\omega_c'' = 4$ ，故由近似式

$$\frac{K_1 \omega_c''/0.4}{(\omega_c'')^2} = 1$$

得  $K_1 = 1.6$ ，从而  $K = 4$ 。由此画出校正后系统开环对数幅频渐近特性，如图 6-22(b)所示。不难验算

$$\gamma(\omega_c'') = \frac{\arctan(\omega_c''/0.4)}{0.4} - \frac{\arctan(\omega_c'')}{10} = 62.5^\circ$$

全部满足设计指标要求。

## 第 7 章 习 题

**7-1** 试求下列函数的 Z 变换：

- (1)  $g(t) = \sin \omega t$
- (2)  $g(t) = 1 - e^{-at}$
- (3)  $g(t) = t^2 e^{-3t}$
- (4)  $g(t) = a^{\frac{1}{t}}$

**解：**函数的 Z 变换

$$(1) \quad g(t) = \sin \omega t$$

$$G(z) = Z[\sin \omega t] = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

$$(2) \quad g(t) = 1 - e^{-at}$$

$$G(z) = Z[1 - e^{-at}] = \frac{z}{z-1} - \frac{ze^{aT}}{ze^{aT} - 1} = \frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(ze^{aT} - 1)}$$

$$(3) \quad g(t) = t^2 e^{-3t}$$

$$Z[t^2] = \frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$G(z) = Z[t^2 e^{-3t}] = \frac{T^2 ze^{-3T}(z + e^{-3T})}{(z - e^{-3T})^3}$$

$$(4) \quad g(t) = a^{\frac{t}{T}}$$

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

**7-2** 求下列拉氏变换式的  $Z$  变换 ( $T$  为采样周期,  $a$ 、 $b$  为常数)

$$(1) \quad G(s) = \frac{K}{s+a}$$

$$(2) \quad G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$$

$$(3) \quad G(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b)}$$

$$(4) \quad G(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)}$$

$$(5) \quad G(s) = \frac{s+1}{s^2}$$

$$(6) \quad G(s) = \frac{e^{-nTs}}{s+a}$$

解: 拉氏变换式的  $Z$  变换为

$$(1) \quad G(z) = \frac{K \cdot z}{z - e^{-aT}}$$

$$(2) \quad G(z) = \frac{K}{a} \cdot \frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})}$$

$$(3) \quad G(z) = \frac{K}{b-a} \cdot \frac{z(e^{-aT} - e^{-bT})}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}$$

$$(4) \quad G(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$$G(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2}$$



$$(5) \quad G(s) = \frac{3}{2s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{2(s+2)}$$

$$G(z) = \frac{3z}{z(z-1)} - \frac{2z}{z-e^{-T}} + \frac{z}{2(z-e^{-2T})}$$

$$(6) \quad G(z) = \frac{z^{1-n}}{z-e^{-aT}}$$

**7-3** 求下列函数的  $Z$  反变换 ( $T$  是采样周期):

$$(1) \quad G(z) = \frac{z}{z-0.5}$$

$$(2) \quad G(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$$

$$(3) \quad G(z) = \frac{z}{(z-e^{-T})(z-e^{-2T})}$$

解: 函数的  $Z$  反变换为

$$(1) \quad G(z) = \frac{z}{z-0.5}$$

$$g(nT) = 0.5^n$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(2) \quad G(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$$

$$g(nT) = 10(2^n - 1)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(3) \quad G(z) = \frac{z}{(z-e^{-T})(z-e^{-2T})}$$

$$g(nT) = \frac{e^{2T}}{1-e^{-T}}(e^{-2n} - e^{-n})$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

**7-4** 依据  $Z$  变换的终值定理, 确定下列函数的终值。

$$(1) \quad E(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$(2) \quad E(z) = \frac{0.792z^2}{(z-1)(z^2-0.416z+0.208)}$$

解: 函数的终值为

$$(1) \quad E(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \infty$$

$$(2) \quad E(z) = \frac{0.792z^2}{(z-1)(z^2-0.416z+0.208)}$$

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.792z^2}{z^2 - 0.416z + 0.208} = 1$$

**7-5** 用 Z 变换方法求解下列差分方程。

$$(1) \quad y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = \delta(k)$$

$$y(0) = y(1) = 1, \delta(k) = \begin{cases} 1, k=0 \\ 0, k>0 \end{cases}$$

$$(2) \quad y(k+3) + 6y(k+2) + 11y(k+1) + 6y(k) = 0$$

$$y(0) = y(1) = 1, y(2) = 0$$

$$(3) \quad y(k+2) + 5y(k+1) + 6y(k) = \cos \frac{k}{2} \pi \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

$$y(0) = 0, y(1) = 1$$

解：差分方程为

$$(1) \quad y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = \delta(k)$$

$$y(0) = y(1) = 1, \delta(k) = \begin{cases} 1, k=0 \\ 0, k>0 \end{cases}$$

$$z^2[Y(z) - y(1)z^{-1} - y(0)] + 3z[Y(z) - y(0)] + 2Y(z) = 1$$

$$Y(z) = 1 + \frac{3}{z+2} - \frac{2}{z+1}$$

$$y(n) = \begin{cases} 1, n=0 \\ 3(-2)^{n-1} - 2(-1)^{n-1}, n \geq 1 \end{cases}$$

$$(2) \quad y(k+3) + 6y(k+2) + 11y(k+1) + 6y(k) = 0$$

$$y(0) = y(1) = 1, y(2) = 0$$

$$[z^3Y(z) - z^3y(0) - z^2y(1) - zy(2)] + 6[z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1)] + 11[zY(z) - zy(0)] + 6Y(z) = 0$$

$$(z^3 + 6z^2 + 11z + 6) \cdot Y(z) = z^3 + 7z^2 + 17z$$

$$Y(z) = \frac{z^3 + 7z^2 + 17z}{z^3 + 6z^2 + 11z + 6}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{z+1} - 7 \cdot \frac{1}{z+2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{z+3}$$

$$y(n) = \frac{11}{2}(-1)^n - 7(-2)^n + \frac{5}{2}(-3)^{-n}$$

$$= (-1)^n \left[ \frac{11}{2} - 7 \cdot 2^n + \frac{5}{2} \cdot 3^n \right]$$

$$(3) \quad y(k+2) + 5y(k+1) + 6y(k) = \cos \frac{k}{2} \pi \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

$$y(0) = 0, y(1) = 1$$

$$(z^2 + 5z + 6)Y(z) = \frac{z(z - \cos \frac{\pi}{2})}{z^2 - 2z \cos \frac{\pi}{2} + 1} = \frac{z^2}{z+1}$$

$$Y(z) = -\frac{2}{5} \cdot \frac{z}{z+2} + \frac{3}{10} \cdot \frac{z}{z+3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{z-1}{z^2+1}$$

$$y(n) = (-1)^{n+1} \left[ \frac{2}{5} \cdot 2^{n+1} - \frac{1}{10} \cdot 3^{n+1} \right] + \frac{1}{10} [\cos \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{n\pi}{2}], n=1, 2, 3, \dots$$

**7-6** 已知系统的差分方程为  $2y(k)+3y(k-1)+5y(k-2)+4y(k-3)=u(k)+u(k-1)+2u(k-2)$ ，且初始条件都为零，试求其脉冲传递函数。

解：脉冲传递函数为

$$2Y(z)+3z^{-1}Y(z)+5z^{-2}Y(z)+4z^{-3}Y(z)=U(z)+z^{-1}U(z)+2z^{-2}U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z^3+z^2+2z}{2z^3+3z^2+5z+4}$$

**7-7** 已知离散系统的结构方框图如图 7-37 所示，试求开环脉冲传递函数  $G(z)$ 。

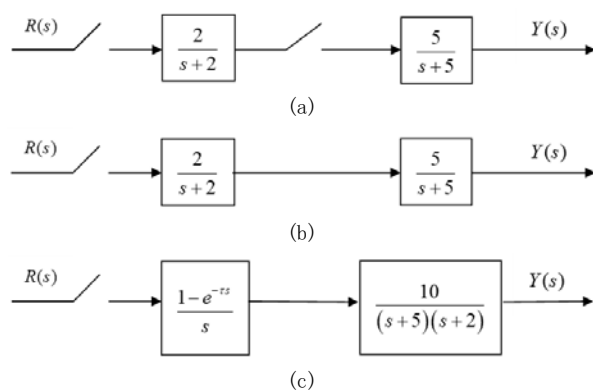


图 7-37 习题 7-7 图

解：

$$(a) \quad Z\left[\frac{2}{s+2}\right]=\frac{2z}{z-e^{-2T}}$$

$$Z\left[\frac{5}{s+5}\right]=\frac{5z}{z-e^{-5T}}$$

$$G(z)=Z\left[\frac{2}{s+2}\right] \cdot Z\left[\frac{5}{s+5}\right]=\frac{10z}{(z-e^{-2T})(z-e^{-5T})}$$

$$(b) \quad Z\left[\frac{2}{s+2} \cdot \frac{2}{s+5}\right]=Z\left[\frac{10}{3} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{s+5}\right]=\frac{10}{3} \cdot \frac{z(e^{-2T}-e^{-5T})}{(z-e^{-2T})(z-e^{-5T})}$$

$$G(z)=Z\left[\frac{2}{s+2} \cdot \frac{2}{s+5}\right]=\frac{10}{3} \cdot \frac{z(e^{-2T}-e^{-5T})}{(z-e^{-2T})(z-e^{-5T})}$$

(c)

$$Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{10}{(s+5)(s+2)}\right]=10(1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s(s+5)(s+2)}\right]$$

$$=\frac{10(z-1)}{z}Z\left[\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s+2} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{s+5}\right]$$

$$G(z)=1-\frac{1}{3} \cdot \frac{(z-1)(3z+2e^{-2T}-5e^{-5T})}{(z-e^{-2T})(z-e^{-5T})}$$

**7-8** 试求图 7-38 各闭环离散系统的脉冲传递函数  $\Phi(z)$ 。

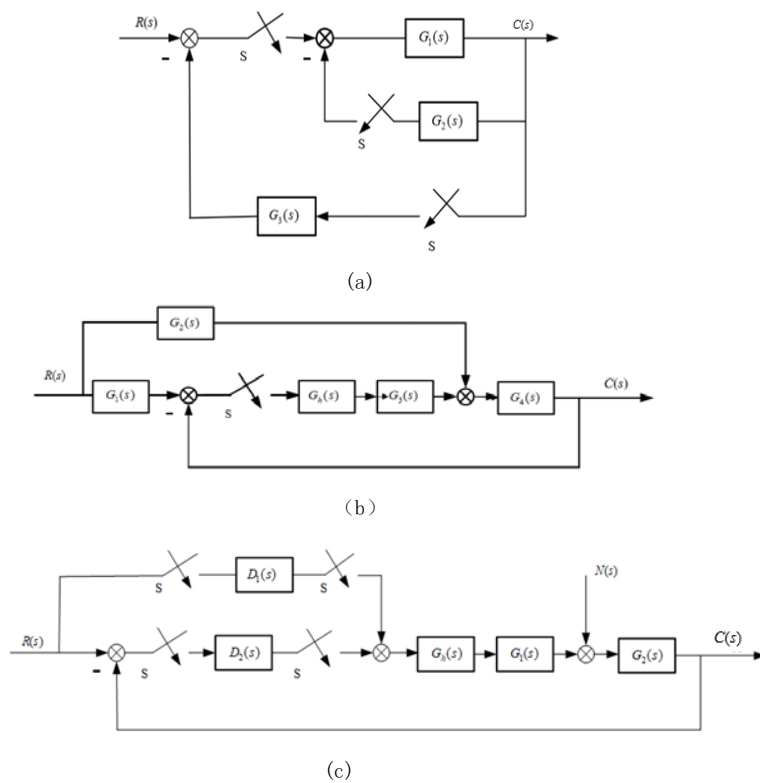
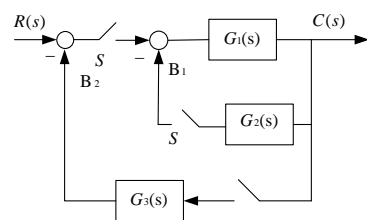


图 7-38 习题 7-8 图

解：(a) 将原系统结构图等效变换为图解 7-8(a) 所示



图解 7-8 (a)

$$B_1(z) = [E(z) - B_1(z)]$$

$$[1 + G_1 G_2(z)] \cdot B_1(z) = G_1 G_2(z) E(z)$$

$$B_1(z) = \frac{G_1 G_2(z)}{1 + G_1 G_2(z)} E(z)$$

$$\begin{aligned}
& G(z)B_1(z)G_1(z)[E(z) - B_1(z)] \\
& = G_1(z)\left[1 - \frac{G_1G_2(z)}{1 + G_1G_2(z)}\right]E(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G_1G_2(z)}E(z) \\
& B_2(z) = G_3(z) \cdot C(z) \\
& E(z) = R(z) - B_2(z) = R(z) - G_3(z) \cdot C(z) \\
& C(z) = \frac{G_1G_2(z)}{1 + G_1G_2(z)} \cdot [R(z) - G_3(z) \cdot C(z)] \\
& [1 + G_1G_2(z)]C(z) = G_1(z) \cdot R(z) \\
& [1 + G_1G_2(z) + G_1(z)G_3(z)]C(z) = G_1(z) \cdot R(z) \\
& \Phi(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_1(z)}{1 + G_1G_2(z) + G_1(z)G_3(z)}
\end{aligned}$$

(b) 由系统的结构图可知

$$\begin{aligned}
E(z) &= RG_1(z) - C(z) \\
C(z) &= RG_2G_4(z) + E(z)G_hG_3G_4(z) \\
&= RG_2G_4(z) + G_hG_3G_4(z)[RG_1(z) - C(z)] \\
C(z) &= \frac{RG_2G_4(z) + G_hG_3G_4(z)RG_1(z)}{1 + G_hG_3G_4(z)}
\end{aligned}$$

(c) 由系统结构图可知

$$\begin{aligned}
E(z) &= R(z) - C(z) \\
C(z) &= NG_2(z) + R(z)D_{D2}(z)G_h(z)G_1G_2(z) + E(z)D_{D1}(z)G_h(z)G_1G_2(z) \\
&= NG_2(z) + R(z)D_{D2}(z)G_h(z)G_1G_2(z) + D_{D1}(z)G_h(z)G_1G_2(z)[R(z) - C(z)] \\
C(z) &= \frac{NG_2(z) + R(z)D_{D2}(z)G_h(z)G_1G_2(z) + D_{D1}(z)G_h(z)G_1G_2(z)R(z)}{1 + D_{D1}(z)G_h(z)G_1G_2(z)} \\
C(z) &= \frac{NG_2(z) + [D_{D2}(z) + D_{D1}(z)]G_hG_1G_2(z)R(z)}{1 + D_{D1}(z)G_h(z)G_1G_2(z)}
\end{aligned}$$

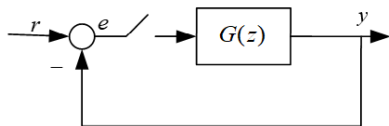
**7-9** 设有单位反馈误差采样的离散系统，连续部分传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+5)}$$

输入  $r(t) = 1(t)$ ，采样周期  $T = 1s$ 。试求：

- (1) 输出  $Z$  变换  $Y(z)$ ；
- (2) 采样瞬时的输出响应  $y^*(t)$ ；
- (3) 输出响应的稳态值  $y^*(\infty)$ 。

解：(1) 依据题意画出系统结构图如图 7-9 所示



图解 7-9

$$\begin{aligned}
 G(z) &= Z \left[ \frac{1}{s^3(s+5)} \right] \\
 &= \frac{1}{5} \left[ \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z(1-e^{-5})}{5(z-1)(z-e^{-5})} \right] \\
 &= \frac{[(4+e^{-5})z+1-6e^{-5}]z}{25(z-1)^2(z-e^{-5})} \\
 \Phi_z &= \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{(4+e^{-5})z^2 + (1-6e^{-5})z}{25(z-1)^2(z-e^{-5}) + (4+e^{-5})z^2 + (1-6e^{-5})z} \\
 &= \frac{3.9933z^2 + 0.9596z}{25z^3 - 46.1747z^2 + 26.2966z - 0.1684} \\
 Y(z) &= \Phi(z)R(z) = \Phi(z) \frac{z}{z+1} \\
 &= \frac{(0.1597z + 0.03838)z^2}{z^4 - 2.847z^3 + 2.899z^2 - 1.0586z + 0.006736} \\
 &= 0.1597z^{-1} + 0.4585z^{-2} + 0.842z^{-3} + 1.235z^{-4} + \dots
 \end{aligned}$$

(2)  $y^*(t) = 0.1597\delta(t-T) + 0.4585\delta(t-2T) + 0.842\delta(t-3T) + 1.235\delta(t-4T) + \dots$

(3) 令  $z = \frac{\omega+1}{\omega-1}$ , 应用劳斯稳定性判据可知, 闭环系统不稳定, 因此求终值无意义。

**7-10** 试判断下列系统的稳定性。

(1) 已知离散系统的特征方程为  $D(z) = (z+1)(z+0.5)(z+2) = 0$

(2) 已知离散系统的特征方程为  $D(z) = z^4 + 0.2z^3 + z^2 + 0.36z + 0.8 = 0$

解:

(1) 有特征根在单位圆外, 系统不稳定。

(2) 令  $z = \frac{\omega+1}{\omega-1}$ , 应用劳斯稳定性判据可知, 系统不稳定。

**7-11** 设离散控制系统如图 7-39 所示, 采样周期  $T=1$  s, 零阶保持器  $G_h(s)$  和  $G(s)$  分别为

$$G_h(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \text{ 和 } G(s) = \frac{K}{s(0.2s+1)}$$

要求:

(1) 当  $K=5$  时, 分别在  $\omega$  域和  $z$  域中分析系统的稳定性;

(2) 确定使系统稳定的  $K$  值范围。

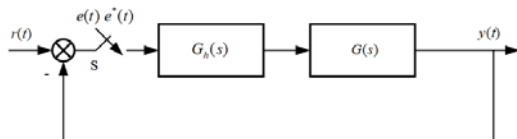


图 7-39 习题 7-11 图

解: (1)

$$\begin{aligned} G_h G(z) &= (1-z^{-1}) \cdot Z \left[ \frac{K}{s^2(0.2s+1)} \right] = K \frac{z-1}{z} \left[ \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{(1-e^{-5T})}{5(z-1)(1-e^{-5T})} \right] \\ &= K \left[ \frac{1}{z-1} - \frac{1-e^{-5T}}{5(1-e^{-5T})} \right] = K \left[ \frac{\frac{4+e^{-5T}}{5}z + \frac{1+e^{-5T}}{5} - e^{-5T}}{(z-1)(1-e^{-5T})} \right] \\ D(z) &= (z-1)(1-e^{-5T}) + K \left[ \frac{4+e^{-5T}}{5}z + \frac{1+e^{-5T}}{5} - e^{-5T} \right] \\ &= z^2 + \left[ -(1+e^{-5T}) + K \left( \frac{4+e^{-5T}}{5} \right) \right] z + \left[ e^{-5T} + K \frac{1-e^{-6T}}{5} \right] \end{aligned}$$

当  $K=5$  时

$$D(z) = z^2 + 3z + 0.9663 = 0$$

解根得

$$\lambda_1 = -2.633, \lambda_2 = -0.367 \quad (\text{系统不稳定})$$

以  $z = \frac{w+1}{w-1}$  代入整理可得,

$$D(w) = w^2 + 0.01357w - 0.208$$

$D(w)$  中有系数小于零, 不满足系统稳定性的条件。

(2) 当  $K$  为变量时

$$D(z) = z^2 + (0.80135K - 1.006738)z + (0.1919K + 0.006738)$$

以  $z = \frac{w+1}{w-1}$  代入整理可得

$$D(w) = 0.9933Kw^2 + (1.9865 - 0.3838K)w + (2.0135 - 0.60945K)$$

由劳斯稳定性判据可知,  $K$  的范围是  $0 < K < 3.304$

**7-12** 利用劳斯判据分析图 7-40 所示二阶离散系统参量  $K$  和采样周期  $T$  对系统稳定性的影响。

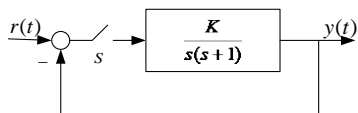


图 7-40 习题 7-12 图

解：根据已知的  $G(s)$  可以求出开环的脉冲传递函数

$$G(z) = \frac{Kz(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

闭环特征方程为：

$$1 + G(z) = 1 + \frac{Kz(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})} = 0$$

即

$$z^2 + [K(1-e^{-T}) - (1+e^{-T})]z + e^{-T} = 0$$

令  $z = \frac{1+w}{1-w}$ ，进行  $w$  变换，得

$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + [K(1-e^{-T}) - (1+e^{-T})]\frac{1+w}{1-w} + e^{-T} = 0$$

化简整理后得

$$[2(1+e^{-T}) - K(1-e^{-T})]w^2 + 2(1-e^{-T})w + K(1-e^{-T}) = 0$$

可得如下劳斯表：

$$\begin{array}{rcl} w^2 & 2(1+e^{-T}) - K(1-e^{-T}) & K(1-e^{-T}) \\ w^1 & 2(1-e^{-T}) & \\ w^0 & K(1-e^{-T}) & \end{array}$$

得系统稳定的条件

$$\begin{cases} 2(1+e^{-T}) - K(1-e^{-T}) > 0 \\ K(1-e^{-T}) > 0 \\ K > 0 \end{cases}$$

解得

$$0 < K < \frac{2(1+e^{-T})}{1-e^{-T}}$$

**7-13** 已知图 7-41 所示的离散控制系统中，采样周期为  $T=1s$ ， $e_2(k) = e_2(k-1) + e_1(k)$ ，试确定系统稳定时的  $K$  值范围。

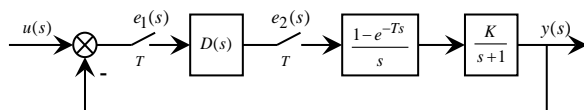


图 7-41 习题 7-13 图

解：由于

$$e_2(k) = e_2(k-1) + e_1(k)$$

$$E_2(z) = z^{-1} E_2(z) + E_1(z)$$

则

$$D(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$



广交对象脉冲传递函数

$$G(z) = Z \left[ \frac{(1 - e^{-Ts})K}{s(s+1)} \right] = (1 - z^{-1})Z \left[ \frac{K}{s(s+1)} \right] = (1 - z^{-1}) \left[ \frac{(1 - e^{-1})Kz}{(z-1)(z-e^{-1})} \right] = \frac{0.632K}{z-0.368}$$

开环脉冲传递函数为

$$D(z)G(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot \frac{0.632K}{z-0.368} = \frac{0.632Kz}{(z-1)(z-0.368)}$$

闭环特征方程

$$1 + D(z)G(z) = z^2 + (0.632K - 1.368)z + 0.368 = 0$$

进行  $w$  变换, 令  $z = \frac{1+w}{1-w}$  化简后得

$$(2.736 - 0.632K)w^2 + 1.264w + 0.632K = 0$$

列出劳斯表如下

$w^2$	$2.736 - 0.632K$	$0.632K$
$w^1$	$1.264$	$0$
$w^0$	$0.632K$	

若系统稳定, 必须满足  $2.736 - 0.632K > 0, K > 0$

即  $0 < K < 4.329$

**7-14** 如图 7-42 所示的离散控制系统, 要求在  $r(t) = t$  作用下的稳态误差  $e_{ss} = 0.25T$ , 试确定放大系数  $K$  及系统稳定时  $T$  的取值范围。

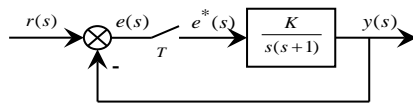


图 7-42 习题 7-14 图

解:  $G(z) = Z \left[ \frac{K}{s(s+1)} \right] = Kz \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right] = K \left[ \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} \right] = \frac{Kz(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$

因为  $E(z) = \frac{1}{1+G(z)} R(z) = \frac{(z-1)(z-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T}) + Kz(1-e^{-T})} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2}$

所以  $e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{(z-1)(z-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T}) + Kz(1-e^{-T})} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2} = 0.25T$

由上式求得  $K=4$ 。

该系统的特征方程为

$$1 + G(z) = (z-1)(z-e^{-T}) + 4z(1-e^{-T}) = 0$$

即

$$z^2 + (3 - 5e^{-T})z + e^{-T} = 0$$

令  $z = \frac{1+w}{1-w}$  代入上式得

$$4(1-e^{-T})w^2 + 2(1-e^{-T})w + 6e^{-T} - 2 = 0$$

列出劳斯表如下

$$\begin{array}{rcl} w^2 & 4(1-e^{-T}) & 6e^{-T}-2 \\ w^1 & 2(1-e^{-T}) & 0 \\ w^0 & K(1-e^{-T}) & \end{array}$$

系统若要稳定, 则劳斯表得第一列系数必须全部为正值, 即有

$$\begin{array}{l} 1-e^{-T} > 0, \quad T > 0 \\ 6e^{-T}-2 > 0, \quad T < \ln 3 \end{array}$$

由此得出  $0 < T < \ln 3$  时, 该系统是稳定的。

**7-15** 已知离散控制系统如图 7-43 所示, 其中  $K=10$ ,  $T=0.2$  秒, 输入为  $u(t)=1(t)+t+\frac{t^2}{2}$ , 试用计算系统的稳态误差。

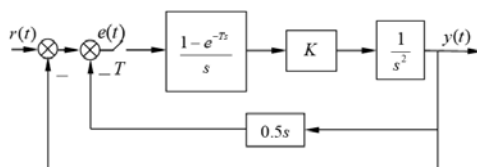


图 7-43 习题 7-15 图

解: 系统开环脉冲传递函数为

$$G(z) = Z \left[ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{10(1+0.5s)}{s^2} \right] = (1-z^{-1})Z \left[ \frac{10(1+0.5s)}{s^3} \right] = (1-z^{-1}) \left[ \frac{5T^2(z+1)z}{(z-1)^3} + \frac{5Tz}{(z-1)^2} \right]$$

将  $T=0.2$  代入并整理得

$$G(z) = \frac{1.28z-0.8}{(z-1)^2}$$

$$\Phi_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1+G(z)} = \frac{(z-1)^2}{(z-1)^2 + 1.28z - 0.8} = \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 - 0.8z + 0.2}$$

$$R(z) = Z \left[ 1 + t + \frac{t^2}{2} \right] = \left[ \frac{z}{z-1} + \frac{0.2z}{(z-1)^2} + \frac{0.04z(z+1)}{2(z-1)^2} \right]$$

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \Phi_e(z) R(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ 1 + \frac{0.2}{z-1} + \frac{0.04(z+1)}{2(z-1)} \right] \left[ \frac{(z-1)^2}{z^2 - 0.8z + 0.2} \right] = 0.1$$

**7-16** 已知离散控制系统如图 7-44 所示,  $T=0.1$  秒,  $K=1$  时, 求系统的静态误差系数  $K_p$  和  $K_v$  以及系统在  $u(t)=t$  作用下的稳态误差  $e_{ss}$ 。

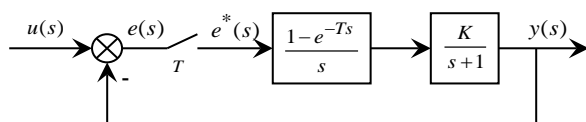


图 7-44 习题 7-16 图

解：系统开环脉冲传递函数为

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] = (1 - z^{-1})\left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1 - e^{-T})z}{(z-1)(z - e^{-T})}\right]$$

将  $T=0.1$  代入并整理得

$$G(z) = \frac{0.005(z+0.9)}{(z-1)(z-0.905)}$$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [1 + G(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[1 + \frac{0.005(z+0.9)}{(z-1)(z-0.905)}\right] = \infty$$

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{0.005(z+0.90)}{(z-1)(z-0.905)} = 0.1$$

$$e(\infty) = \frac{T}{K_v} = 1$$

**7-17** 已知离散控制系统图如图 7-45 所示，采样周期  $T$  为 1s，分别计算输入单位阶跃信号和单位斜坡信号时，系统的稳态误差。

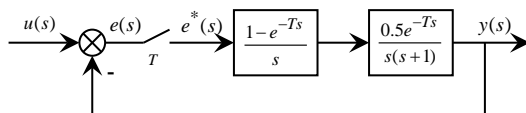


图 7-45 习题 7-17 图

$$\text{解： } G(z) = \frac{z-1}{z}Z\left[\frac{0.5e^{-s}}{s^2(s+1)}\right] = 0.5 \times \frac{z-1}{z^2}Z\left[\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\right]$$

$$= \frac{0.5(e^{-1}z - 2e^{-1} + 1)}{z(z-1)(z-e^{-1})} = \frac{0.189z + 0.132}{z(z-1)(z-0.368)}$$

$$D(z) = z^3 - 1.36z^2 - 0.557z + 0.132$$

易判断系统是稳定的。

$$\text{位置误差系数} \quad K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \infty$$

$$\text{速度误差系数} \quad K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) = 0.5$$

单位阶跃信号作用时系统的稳态误差为

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

单位斜坡信号作用时系统的稳态误差为

$$e(\infty) = \frac{T}{K_v} = 2$$

**7-18** 计算机控制系统如图 7-46 所示，其中数字调节器  $D(z) = K_p$ ，试分析  $K_p$  对系统的影响；若将  $K_p$  改为 PI 和 PID 调节器校正，试对系统的影响进行分析。

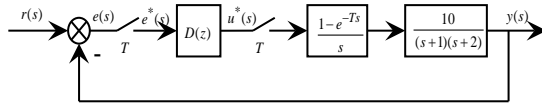


图 7-46 习题 7-18 图

解：系统广义对象的 Z 脉冲传递函数为

$$\begin{aligned} G_1(z) &= Z \left[ \frac{1-e^{-sT}}{s} \frac{10}{(s+1)(s+2)} \right] = Z \left[ (1-e^{-sT}) \left( \frac{5}{s} - \frac{10}{s+1} + \frac{5}{s+2} \right) \right] \\ &= \frac{0.0453z^{-1}(1+0.904z^{-1})}{(1-0.905z^{-1})(1-0.819z^{-1})} \\ &= \frac{0.0453(z+0.904)}{(z-0.905)(z-0.819)} \end{aligned}$$

系统的闭环脉冲传递函数为

$$\begin{aligned} G_B(z) &= \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D(z)G_1(z)}{1+D(z)G_1(z)} \\ &= \frac{0.0453(z+0.904)K_p}{z^2 - 1.724z + 0.0453K_p z + 0.4095K_p + 0.741} \end{aligned}$$

当  $K_p = 1$ ,  $R(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$  时有:

$$\begin{aligned} Y(z) &= G_B(z)R(z) \\ &= \frac{0.0453z^2 + 0.4095z}{z^3 - 2.679z^2 + 2.461z - 0.782} \end{aligned}$$

由上式用长除法可求得输出序列  $y(kT)$ , 见图 7.30。

输出量的稳态误差为:

$$E(z) = R(z) - Y(z) = \frac{R(z) - Y(z)}{R(z)},$$

$$E(z) = [1 - G_B(z)]R(z), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)[1 - G_B(z)]R(z)$$

当  $K_p = 1$ ,  $e(\infty) = 0.165$

当  $K_p = 2$ ,  $e(\infty) = 0.09$

由此可见, 当  $K_p$  加大时, 系统稳定误差减小, 但仍有误差。

- 在 PID 控制中积分系数对系统性能的影响

若采用 PI 调节器校正, 有

$$D(z) = K_p + K_i \frac{1}{1-z^{-1}} = K_p + K_i \frac{z}{z-1} = \frac{K_p(z-1) + K_i}{z-1} = \frac{(K_p + K_i) \left( z - \frac{K_p}{K_p + K_i} \right)}{z-1}$$

系统的开环脉冲传递函数为

$$G_K(z) = D(z)G_1(z) = \frac{(K_p + K_1) \left[ z - \frac{K_p}{K_p + K_1} \right] \times 0.045(z + 0.904)}{(z - 0.905)(z - 0.819)(z - 1)}$$

为了确定积分系数  $K_1$ ，可以使由于积分校正增加的零点  $\left[ z - \frac{K_p}{K_p + K_1} \right]$  抵消极点  $(z - 0.905)$ ，由此可得

$$\frac{K_p}{K_p + K_1} = 0.905$$

假设放大倍数  $K_p$  已由静态速度误差系数确定，若选  $K_p = 1$ ，则由式 (4.32) 可以确定  $K_1 = 0.015$ ，

$$D(z) = \frac{(K_p + K_1) \left[ z - K_p / (K_p + K_1) \right]}{z - 1} = \frac{1.105(z - 0.905)}{z - 1}$$

经过 PI 校正后，闭环脉冲传递函数：

$$G_B(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D(z)G_1(z)}{1 + D(z)W_1(z)} = \frac{0.05(z + 0.904)}{(z - 1)(z - 0.819) + 0.05(z + 0.904)}$$

$$Y(z) = G_B(z)R(z)$$

当  $R(z) = 1 / (1 - z^{-1})$  时，求出  $Y(z)$  为

$$Y(z) = \frac{0.05(z + 0.904)}{(z - 1)(z - 0.819) + 0.05(z + 0.904)} \cdot \frac{z}{z - 1}$$

用长除法求得  $y(kT)$ ，如图解 7-18 所示，系统的稳态误差为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)[1 - W_B(z)R(z)] = 0$$

可见增加积分校正后，消除了稳态误差提高了控制精度，但是超调量达到 45%且调节时间长。为了改善动态性能，必须引入微分校正即采用 PID 控制。

- 在 PID 控制中微分系数对系统性能的影响

当  $D(z)$  采用 PID 时为：  $D(z) = K_p + K_I \frac{1}{1 - z^{-1}} + K_D(1 - z^{-1})$

$$D(z) = \frac{K_p(1 - z^{-1}) + K_I + K_D(1 - z^{-1})^2}{1 - z^{-1}}$$

$$= \frac{K_p + K_I + K_D \left[ z^2 - \frac{K_p + 2K_D}{K_p + K_I + K_D} z + \frac{K_D}{K_p + K_I + K_D} \right]}{z(z - 1)}$$

假设  $K_p = 1$  已选定，并要求  $D(z)$  的两个零点对消  $W_1(z)$  的两个极点  $z = 0.905$ ，  $z = 0.819$ ，则：

$$z^2 - \frac{K_p + 2K_D}{K_p + K_I + K_D} z + \frac{K_D}{K_p + K_I + K_D} = (z - 0.905)(z - 0.819) = (z^2 - 1.724z + 0.7412)$$

两边系数对比可得：

$$\frac{K_p + 2K_D}{K_p + K_I + K_D} = 1.724$$

$$\frac{K_D}{K_p + K_I + K_D} = 0.7412$$

由于  $K_p = 1$ ，可解得  $K_I = 0.069, K_D = 3.062$

$$\text{所以 } D(z) = \frac{4.131(z - 0.905)(z - 0.819)}{z(z - 1)}$$

系统开环脉冲函数

$$G_K(z) = D(z)G_1(z) = \frac{4.131(z - 0.905)(z - 0.819) \times 0.453(z + 0.904)}{z(z - 1)(z - 0.905)(z - 0.819)} = \frac{0.187(z + 0.904)}{z(z - 1)}$$

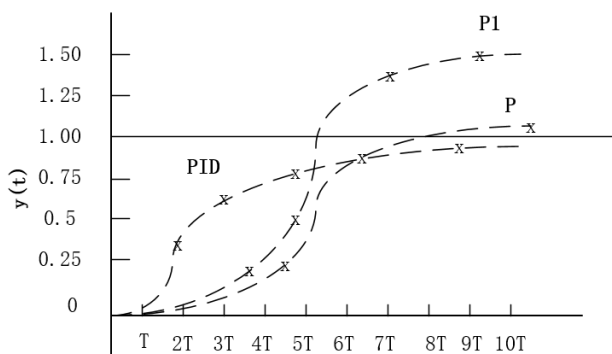
$$G_B(z) = \frac{G_K(z)}{1 + G_K(z)} = \frac{0.187(z + 0.904)}{z(z - 1) + 0.187(z + 0.904)}$$

$$Y(z) = G_B(z)X(z)$$

当  $R(z) = 1/(1 - z^{-1})$  时，求得  $Y(z)$ ，并用长除法求得  $y(kT)$ ，见图解 7-18。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)[1 - W_B(z)X(z)] = 0$$

由图解 7-18 可见，加入微分后，系统动态性能得到很大改善，调节时间  $t$  缩短，超调量  $\sigma_p$  减小。



图解 7-18 比例积分微分控制系统输出响应图

**7-19** 已知离散系统结构如图 7-47 所示，输入为单位阶跃响应，采样周期  $T = 0.1\text{ s}$ ，试用 MATLAB 求输出响应。

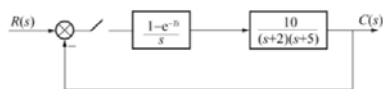
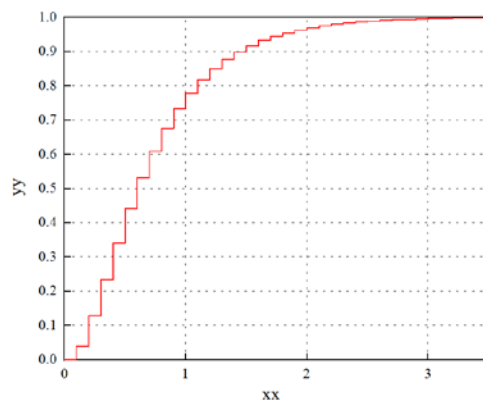


图 7-47 习题 7-19 图

解：用 dstep 求取离散系统的单位阶跃响应，MATLAB 程序清单为：

```
>> num = 10; den = [1, 7, 10]; T = 0.1;
>> I = [0:35]; time = i*T;
>> [num, denz] = c2dm(num, den, T, 'zoh');
>> y_zoh = dstep(num, denz, 36);
>> [xx, yy] = stairs(time, y_zoh)
>> plot(xx, yy, 'r'), hold; grid
```



图解 7-19 输出响应