

第1章 习 题

1-3 图 1.8 所示是采用浮子控制的水钟计时原理图。试分析其保持准确计时的原理，并绘制其职能方框图，说明浮子的控制作用，指出该系统的输入量、输出量和反馈量。

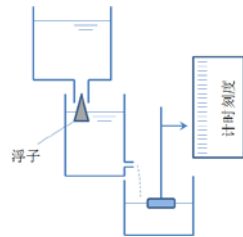


图 1.8 水钟计时原理图

解：计时原理：最上面的蓄水池提供水源，中间蓄水池浮子保证恒定水位，以确保其流出的水滴速度均匀，从而保证最下面水池中的带有指针的浮子均匀上升，并指示出时间信息。

浮子的控制作用：当中间蓄水池进水量大于出水量时，浮子随水位上升，使进水口变小，从而节制进水量，而当进水量小于出水量时，浮子随水位下降，使进水口变大，进水量变大，起到负反馈控制作用，保证恒定水位。



输入量：进水量

输出量：带有指针的浮子位置

反馈量：中间蓄水池浮子位置

1-4 图 1.9 所示是自动升降门的自动控制原理图。试分析说明其控制工作原理，并绘制其职能方框图，指出输入量、输出量、反馈量。

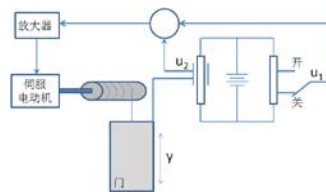


图 1.9 自动升降门系统原理图

解：控制工作原理：

- 如果希望开门，则将门当前状态对应的电压取出，与开门状态参考电位比较（相减），然后送放大器，驱动伺服电机，带动绞盘使门打开，直到门的状态所对应的电压与开门状态参考电位相等时，放大器比较（相减）的结果为零，执行元件不工作，门保持打开状态不再变化。
- 如果希望关门，则将门当前状态对应的电压取出，与关门状态参考电位比较（相减），然后送放大器，驱动伺服电机，带动绞盘使门关闭，直到门的状态所对应的电压与关门状态参考电位相等时，放大器比较（相减）的结果为零，执行元件不工作，门保持关闭状态不再变化。



输入量：开门/关门状态参考电位

输出量：门实际状态

反馈量：门当前状态对应的电压

第2章 习 题

2-1 试判别以下方程所描述的系统是否为线性定常系统。

$$(1) \quad y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t) + 6 \quad (2) \quad \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 5y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

$$(3) \quad \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 5y(t)u(t) = \dot{u}(t) + 2u(t) \quad (4) \quad y(t)\cos t = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

解：(1) 不是 (2) 是 (3) 不是 (4) 不是

2-2 求图 2.36 所示无源网络的微分方程，其中， u_i 、 u_o 分别为输入、输出信号。

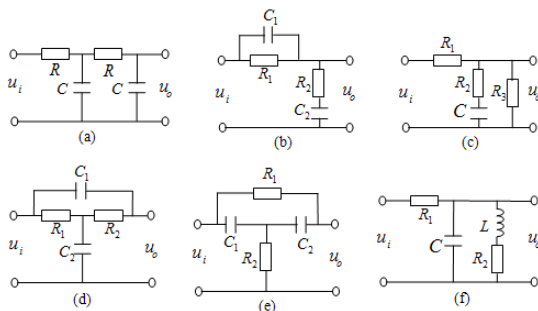


图 2.36 题 2-2 图

解：

$$(a) \quad R^2 C^2 \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + 3RC \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t)$$

$$(b) \quad R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2) \frac{du_i(t)}{dt} + u_i(t)$$

$$(c) \quad (R_1 R_2 + R_2^2 + R_1 R_3) C \frac{du_o(t)}{dt} + (R_1 + R_2) u_o(t) = R_2 R_3 C \frac{du_i(t)}{dt} + R_3 u_i(t)$$

$$(d) \quad R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_1 C_2) \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_1) \frac{du_i(t)}{dt} + u_i(t)$$

$$(e) \quad R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + (R_2 C_2 + R_2 C_1 + R_1 C_2) \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} + (C_1 + C_2) R_2 \frac{du_i(t)}{dt} + u_i(t)$$

$$(f) \quad R_1 C L \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + (R_1 R_2 C + L) \frac{du_o(t)}{dt} + (R_1 + R_2) u_o(t) = L \frac{du_i(t)}{dt} + R_2 u_i(t)$$

2-3 求图 2.37 所示有源网络的微分方程，其中， u_i 、 u_o 分别为输入、输出信号。

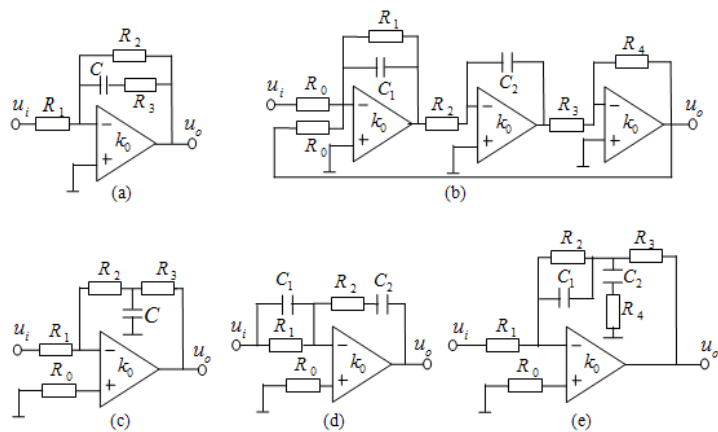


图 2.37 题 2-3 图

解:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & (R_1 R_2 + R_1 R_3) C \frac{du_o(t)}{dt} + R_1 u_o(t) = -[R_2 R_3 C \frac{du_i(t)}{dt} + R_2 u_i(t)] \\
 (b) \quad & R_0 R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + R_0 R_2 R_3 C_2 \frac{du_o(t)}{dt} + R_1 R_4 u_o(t) = -R_1 R_4 u_i(t) \\
 (c) \quad & R_1 u_o(t) = -[R_2 R_3 C \frac{du_i(t)}{dt} + (R_2 + R_3) u_i(t)] \\
 (d) \quad & -R_1 C_2 \frac{du_o(t)}{dt} = R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2) \frac{du_i(t)}{dt} + u_i(t) \\
 (e) \quad & R_2 R_4 C_1 C_2 \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + (R_2 C_1 + R_4 C_2) \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) \\
 & = -\frac{R_2 + R_3}{R_1} \left\{ \frac{R_2 R_3 R_4 C_1 C_2}{R_2 + R_3} \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} + [R_4 C_2 + \frac{R_2 R_3 (C_1 + C_2)}{R_1 + R_2}] \frac{du_i(t)}{dt} + u_i(t) \right\}
 \end{aligned}$$

2-4 求图 2.38 所示机械系统的微分方程。图中位移 x_i 为输入量，位移 x_o 为输出量。

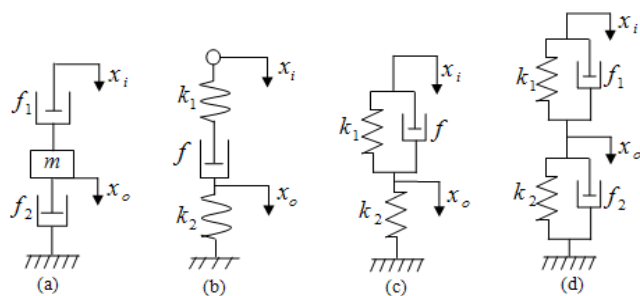


图 2.38 题 2-4 图

解:

$$(a) \quad m \frac{d^2 x_o(t)}{dt^2} + (f_1 + f_2) \frac{dx_o(t)}{dt} = f_1 \frac{dx_i(t)}{dt}$$

- (b) $(k_1 + k_2)f \frac{dx_o(t)}{dt} + k_1 k_2 x_o(t) = k_1 f \frac{dx_i(t)}{dt}$
- (c) $f \frac{dx_o(t)}{dt} + (k_1 + k_2)x_o(t) = f \frac{dx_i(t)}{dt} + k_1 x_i(t)$
- (d) $(f_1 + f_2) \frac{dx_o(t)}{dt} + (k_1 + k_2)x_o(t) = f_1 \frac{dx_i(t)}{dt} + k_1 x_i(t)$

2-5 试证明图 2.39 中所示的电路网络 (a) 和机械系统 (b) 是相似系统 (即有相同形式的数学模型)。

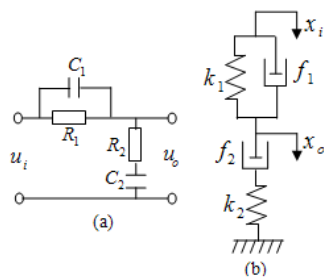


图 2.39 题 2-5 图

解:

$$(a) R_1 R_2 \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + \left(\frac{R_1}{C_2} + \frac{R_1}{C_1} + \frac{R_2}{C_1} \right) \frac{du_o(t)}{dt} + \frac{1}{C_1 C_2} u_o(t) = R_1 R_2 \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} + \left(\frac{R_1}{C_2} + \frac{R_2}{C_1} \right) \frac{du_i(t)}{dt} + \frac{1}{C_1 C_2} u_i(t)$$

$$(b) f_1 f_2 \frac{d^2 x_o(t)}{dt^2} + (f_1 k_2 + f_1 k_1 + f_2 k_1) \frac{dx_o(t)}{dt} + k_1 k_2 x_o(t) = f_1 f_2 \frac{d^2 x_i(t)}{dt^2} + (f_1 k_2 + f_2 k_1) \frac{dx_i(t)}{dt} + k_1 k_2 x_i(t)$$

由 (a) (b) 两式可以看出两系统具有相同形式的微分方程, 所以 (a) 和 (b) 是相似系统。

2-6 在液压系统的管道中, 设通过阀门的流量 Q 满足流量方程: $Q = K\sqrt{P}$ 。式中, K 为常数; P 为阀门前后的压差。若流量 Q 与压差 P 在其平衡点 (Q_0, P_0) 附近做微小变化, 试导出线性化流量方程。

解: $\Delta Q = L \Delta P$ 式中 $L = \frac{K}{2\sqrt{P_0}}$, $\Delta Q = Q - Q_0$, $\Delta P = P - P_0$ 。线性化式子表示为: $Q = LP$

2-7 设弹簧特性曲线由 $F = 12.56y^{1.1}$ 描述, 式中 F 是弹簧力, y 是变形位移。若弹簧在变形位移 0.25 附近做微小变化, 试推到 ΔF 的线性化方程。

解: $\Delta F = 12\Delta y$, 式中 $\Delta F = F - 2.73$, $\Delta y = y - 0.25$

2-8 二级 RC 电路网络如图 2.40 所示,

试画出其方框图, 并求其传递函数

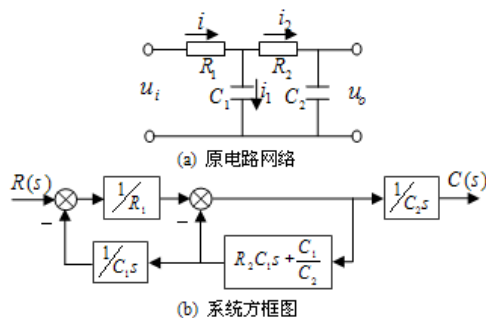
$$\frac{u_o(s)}{u_i(s)}。$$

解: 设如右图 (a) 所示中间变量 i ,

i_1 , i_2 , 得方程组为

$$I = I_1 + I_2$$

$$U_i = R_1 I + \frac{1}{C_1 s} I_1$$



题 2-8 图

$$\frac{1}{C_1 s} I_1 = R_2 I_2 + \frac{1}{C_2 s} I_2$$

$$U_o = \frac{1}{C_2 s} I_2$$

根据以上 4 式, 按信号流动的方向绘制的系统方框图如右图 (b) 所示。

$$\text{传递函数 } \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) s + 1}$$

2-9 在图 2.41 中, 已知 $G(s)$ 和 $H(s)$ 两方框中相对应的微分方程分别是

$$\begin{cases} \frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = D(t) \\ \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = 2c(t) \end{cases}$$

且初始条件均为零, 试求传递函数 $C(s)/R(s)$ 和 $E(s)/R(s)$ 。

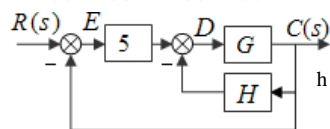


图 2.41 题 2-9 图

解: $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5(s+1)}{s^2+8s+9}$ $\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s^2+3s+2}{s^2+8s+9}$

2-10 试求图 2.42 (a) 和 (b) 所示机械系统的传递函数 $\frac{X_2(s)}{F_1(s)}$ 和 $\frac{X_2(s)}{F_2(s)}$, 其中的 $F_1(t)$ 、 $F_2(t)$ 分别是施加给机械系统的作用力, $x_2(t)$ 是质量块的位移。

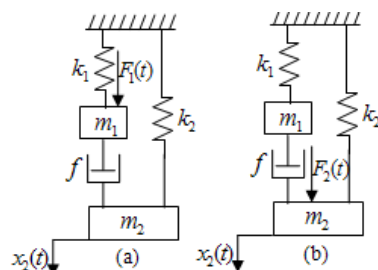


图 2.42 题 2-10 图

解: (a) $\frac{X_2(s)}{F_1(s)} = \frac{fs}{m_1 m_2 s^4 + (m_1 + m_2)fs^3 + (k_1 m_2 + k_2 m_1)s^2 + (k_1 + k_2)fs + k_1 k_2}$

(b) $\frac{F_2(s)}{X_2(s)} = \frac{fs + k_1}{fm_2 s^3 + k_1 m_2 s^2 + (k_1 + k_2)fs + k_1 k_2}$

2-11 设系统的传递函数为 $\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{2}{s^3 + 2s^2 + 3s + 2}$, 试写出系统输入/输出之间的微分方程。

解: $\frac{d^3 c(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 3\frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = 2r(t)$

2-12 求图 2.36 所示的无源电路网络的传递函数 $\frac{U_o(s)}{U_i(s)}$ 。

解:

- (a) $\frac{1}{R^2 C^2 s^2 + 3RCs + 1}$
- (b) $\frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2)s + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)s + 1}$
- (c) $\frac{R_2 R_3 Cs + R_3}{(R_1 R_2 + R_2^2 + R_1 R_3)Cs + R_1 + R_2}$
- (d) $\frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_1)s + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_1 C_2)s + 1}$
- (e) $\frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (C_1 + C_2)R_2 s + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_2 C_2 + R_2 C_1 + R_1 C_2)s + 1}$
- (f) $\frac{Ls + R_2}{R_1 CLs^2 + (R_1 R_2 C + L)s + R_1 + R_2}$

2-13 绘制图 2.37 所示的有源电路网络的传递函数方框图，并求传递函数 $\frac{U_o(s)}{U_i(s)}$ 。

- 解: (a) $-\frac{R_2 R_3 Cs + R_2}{(R_1 R_2 + R_1 R_3)Cs + R_1}$
- (b) $-\frac{R_1 R_4}{R_0 R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 s^2 + R_0 R_2 R_3 C_2 s + R_1 R_4}$
- (c) $-\frac{R_2 R_3 Cs + R_2 + R_3}{R_1}$
- (d) $-\frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2)s + 1}{R_1 C_2 s}$
- (e) $-\frac{R_2 + R_3}{R_1} \frac{\frac{R_2 R_3 R_4 C_1 C_2}{R_2 + R_3} s^2 + [R_4 C_2 + \frac{R_2 R_3 (C_1 + C_2)}{R_1 + R_2}]s + 1}{R_2 R_4 C_1 C_2 s^2 + (R_2 C_1 + R_4 C_2)s + 1}$

2-14 绘制图 2.38 所示的机械系统的传递函数方框图，并求传递函数 $\frac{X_o(s)}{X_i(s)}$ 。

- 解: (a) $\frac{f_1 s}{ms^2 + (f_1 + f_2)s}$
- (b) $\frac{k_1 f s}{(k_1 + k_2)fs + k_1 k_2}$
- (c) $\frac{fs + k_1}{fs + k_1 + k_2}$
- (d) $\frac{f_1 s + k_1}{(f_1 + f_2)s + k_1 + k_2}$

2-15 试用方框图等效变换的方法求图 2.43 所示各系统的传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 。

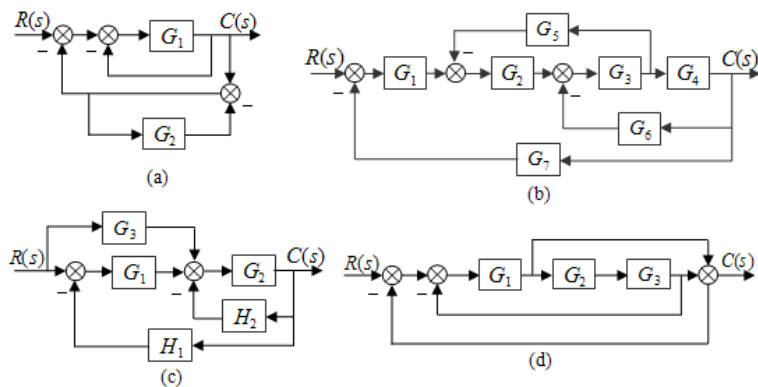


图 2.43 题 2-15 图

解: (a) $\frac{G_1 + G_1 G_2}{1 + 2G_1 + G_2 + G_1 G_2}$

(b) $\frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 G_5 + G_3 G_4 G_6 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_7}$

(c) $\frac{G_1 G_2 + G_2 G_3}{1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 H_1}$ (d) $\frac{G_1 G_2 G_3 + G_1}{1 + G_1 + 2G_1 G_2 G_3}$

2-16 如图 2.44 所示的控制系统，试求：

(1) 系统的开环传递函数；

(2) 当 $F(s)=0$ 时的 $G_{CR} = \frac{C(s)}{R(s)}$ 和 $G_{ER} = \frac{E(s)}{R(s)}$ ；当 $R(s)=0$ 时的 $G_{CF} = \frac{C(s)}{F(s)}$ 和

$G_{EF} = \frac{E(s)}{F(s)}$ ；

(3) 求在 $R(s)$ 和 $F(s)$ 共同作用下系统的总输出 $C(s)$ 和总误差 $E(s)$ 。

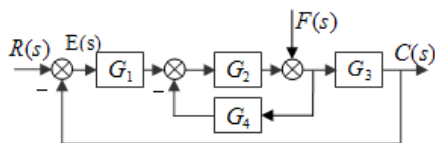
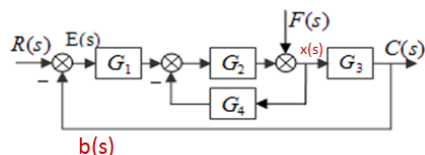


图 2.44 题 2-16 图



解:

(1) 开环传递函数 $(b(s)/E(s))$

$b(s) = C(s) = G_3 x(s)$, $x(s) = G_2 [G_1 E(s) - G_4 x(s)]$

$$\frac{b(s)}{E(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 G_4}$$

$$(2) \quad b(s) = C(s) = G_3 x(s), \quad x(s) = F(s) + G_2 [G_1 E(s) - G_4 x(s)], \quad E(s) = R(s) - b(s)$$

$$F(s)=0 \text{ 时, } x(s) = G_2 [G_1 E(s) - G_4 x(s)] \rightarrow x(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_4} E(s) \rightarrow x(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_4} (R(s) - C(s)), \text{ 有}$$

$$\Phi_{cr}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_4 + G_1 G_2 G_3}, \quad \Phi_{er}(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_4 + G_1 G_2 G_3}$$

$$R(s)=0 \text{ 时, } x(s) = G_2 [G_1 E(s) - G_4 x(s)] \rightarrow x(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_4} E(s) \rightarrow E(s) = -C(s) \text{ 和 } x(s) = -\frac{G_1 G_2}{1 + G_4} C(s),$$

有

$$\Phi_{ef}(s) = \frac{C(s)}{F(s)} = \frac{G_3}{1 + G_2 G_4 + G_1 G_2 G_3}, \quad \Phi_{ef}(s) = \frac{E(s)}{F(s)} = \frac{-G_3}{1 + G_2 G_4 + G_1 G_2 G_3}$$

$$(3) \quad C(s) = \Phi_{cr}(s)R(s) + \Phi_{ef}(s)F(s) = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 G_4 + G_1 G_2 G_3} R(s) + \frac{G_3}{1 + G_2 G_4 + G_1 G_2 G_3} F(s)$$

2-17 用梅逊公式求图 2.45 所示系统的传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 。

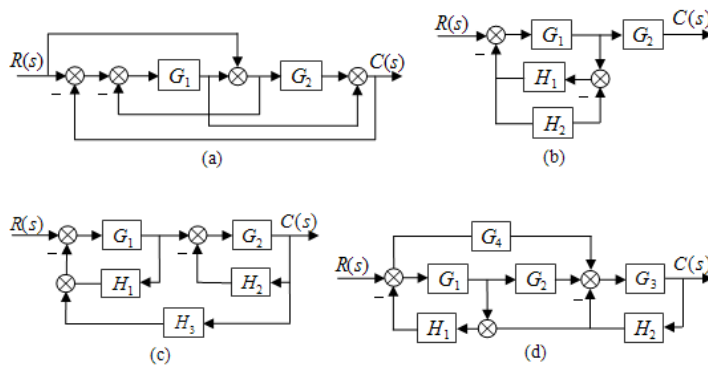


图 2.45 题 2-17 图

解: (a) $\frac{G_1 + G_2 + G_1 G_2}{1 + 2G_1 + G_1 G_2}$

(b) $\frac{G_1 G_2 (1 + H_1 H_2)}{1 + G_1 H_1 + H_1 H_2}$

(c) $\frac{G_1 G_2}{1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 H_3 + G_1 G_2 H_1 H_2}$

(d) $\frac{G_1 G_2 G_3 + G_3 G_4}{1 + G_1 H_1 + G_3 H_2 + G_3 G_4 H_1 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_1 H_2}$

2-18 系统的方框图如图 2.46 所示，试求系统的开环传递函数、闭环传递函数和误差传递函数。

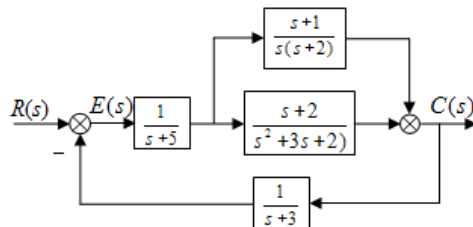


图 2.46 题 2-18 图

解：系统的开环传递函数

$$= \frac{B(s)}{E(s)} = G_1(s)G_2(s)H(s) = \frac{1}{s+5} \cdot \frac{2s^2+4s+1}{s^3+3s^2+2s} \cdot \frac{1}{s+3} = \frac{2s^2+4s+1}{(s+3)(s+5)(s^3+3s^2+2s)}$$

系统的闭环传递函数

$$= \Phi_{RC}(s) = \frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{2s^3+10s^2+13s+3}{s^5+11s^4+41s^3+63s^2+34s+1}$$

系统的误差传递函数=

$$\Phi_{RE}(s) = \frac{E_R(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{s^5+11s^4+41s^3+63s^2+34s+1}{s^5+11s^4+41s^3+63s^2+34s+1}$$

2-19 机械平移系统如图 2.47 所示，试建立其状态空间表达式，其中的 F 为外部作用力， y 为质量块位移。

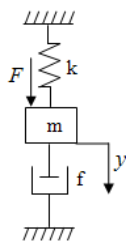


图 2.47 题 2-19

解：

微分方程为 $m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + f \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F(t)$ ，有 $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{f}{m} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{m} y(t) = \frac{1}{m} F(t)$

对照教材 p20 上的式 (2-27)，有

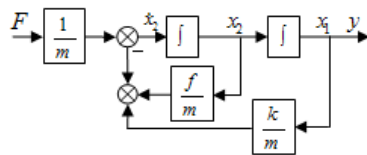
$$n=2, \quad a_0=1/m, \quad a_1=f/m, \quad b_0=1/m$$

依据 p21 上的式 (2-33) 和 p22 上的式 (2-36)，得

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

系统的状态变量图为：



题 2-19 状态变量图

2-20 在图 2.48 所示的系统中，若选取 x_1 、 x_2 、 x_3 为状态变量，试列写其状态空间表达式。

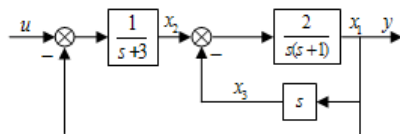


图 2-67 题 2-20

解：

依据图中变量所示关系，有

$$x_1(s) = \frac{2}{s(s+1)}(x_2(s) - x_3(s)), \quad x_2(s) = \frac{1}{s+3}(u(s) - x_1(s)), \quad y(s) = x_1(s), \quad x_3(s) = sx_1(s)$$

$$x_3(s) = sx_1(s) \rightarrow \dot{x}_1(t) = x_3(t)$$

$$x_2(s) = \frac{1}{s+3}(u(s) - x_1(s)) \rightarrow \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 3x_2(t) + u(t)$$

$$x_1(s) = \frac{2}{s(s+1)}(x_2(s) - x_3(s)) \text{ 和 } x_3(s) = sx_1(s) \rightarrow sx_3(s) = 2x_2(s) - 3x_3(s) \rightarrow \dot{x}_3(t) = 2x_2(t) - 3x_3(t)$$

$$y(s) = x_1(s) \rightarrow y(t) = x_1(t)$$

则有

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) - 3x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_3(t) &= 2x_2(t) - 3x_3(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2-21 设系统框图如图 2-68 所示，试求其状态空间表达式。

$$\text{解: } \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{k_3}{T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & \frac{k_2}{T_2} \\ -\frac{k_1 k_4}{T_1} & 0 & -\frac{1}{T_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_1}{T_1} \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2-22 系统的输入、输出微分方程为下列各式，试写出它们的状态空间表达式。

$$(1) \frac{d^3 y}{dt^3} + 6 \frac{d^2 y}{dt^2} + 15 \frac{dy}{dt} + 5y = 7u \quad (2) \frac{d^3 y}{dt^3} + 5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 7y = 8u$$

$$(3) \frac{d^3 y}{dt^3} + 18 \frac{d^2 y}{dt^2} + 192 \frac{dy}{dt} + 640y = 160 \frac{du}{dt} + 640u$$

2-22 (1)
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -15 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad y = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -7 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} u \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -192 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 164 \\ -2240 \end{pmatrix} u \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

第3章 习 题

3-1 假设温度计可用 $\frac{1}{Ts+1}$ 传递函数描述其特性，现在用温度计测量盛在容器内的水温。发现需要 1min 时间才能指示出实际水温的 98% 的数值，试问该温度计指示出实际水温从 10% 变化到 90% 所需的时间是多少？

解： 依据教材中 p68 中式 (3-20b)，有 $4T=1\text{min}$ ， $T=0.25\text{min}=15\text{s}$

因为 $y(s) = \frac{1}{Ts+1} u(s)$ ，且 $u(s) = \frac{1}{s}$ ，拉氏反变换为 $y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$

(由 $y(t) = 0.98 = 1 - e^{-\frac{60}{T}}$ ，也可解得 $T=15$ (s))

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t_1}{T}} = 0.1, \text{ 有 } t_1 = -T \ln 0.9$$

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t_2}{T}} = 0.9, \text{ 有 } t_2 = -T \ln 0.1$$

$$t_r = t_2 - t_1 = T \ln \frac{0.9}{0.1} = 2.2T = 0.55 \text{ min}$$

3-2 已知某系统的微分方程为 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f'(t) + 3f(t)$ ，初始条件 $y(0) = 1$ ， $y'(0) = 2$ ，试求：

(1) 系统输入 $f(t)=0$ 时的输出 $y(t)$ ；

(2) 系统输入 $f(t)=1(t)$ 时, 系统输出 $y(t)$ 。

解:

(1) 解: 计算微分方程的通解 (输入为零时的解, 亦即自由响应)。考虑齐次微分方程

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$$

其特征方程为 $\alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0$

解得特征根为

$$\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -2$$

则解为: $y_k(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$

由初始条件得 $C_1 = 4, C_2 = -3$

$$y_k(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t}$$

(2) 系统输入 $f(t)=1(t)$ 时, 系统的微分方程为

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 1$$

对照输入信号, 令方程的特解为 $y_p(t) = B_1$ (B_1 为待定系数)。代入微分方程计算可得 $B_1=1/2$ 。所以, 系统在 $f(t)=1(t)$ 的输入作用下的输出为

$$y(t) = y_k(t) + y_p(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t} + \frac{1}{2}$$

3-3 已知系统的微分方程为 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f'(t) + 3f(t)$, 当输入 $f(t)=e^{-4t}$ 时, 系统的

输出为 $y(t) = \frac{14}{3}e^{-t} - \frac{7}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}$ 。试求系统的自由响应与受迫响应、瞬态响应与稳态响应。

解:

$$H(p) = \frac{p+3}{p^2+3p+2} = \frac{2}{p+1} - \frac{1}{p+2}, \quad h(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})\varepsilon(t),$$

$$y_f(t) = \left\{ \int_0^t e^{-4\tau} [2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}] d\tau \right\} \varepsilon(t) = \left[\frac{2}{3}e^{-t}(1 - e^{-3t}) - \frac{1}{2}e^{-2t}(1 - e^{-2t}) \right] \varepsilon(t)$$

$$= \left(-\frac{1}{6}e^{-4t} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-t} \right) \varepsilon(t) \quad (\text{零状态响应})$$

$$\therefore y_x(t) = y(t) - y_f(t) = (4e^{-t} - 3e^{-2t})\varepsilon(t) \quad (\text{零状态响应})$$

强迫响应: $-\frac{1}{6}e^{-4t}\varepsilon(t)$; 自由响应: $(\frac{14}{3}e^{-t} - \frac{7}{2}e^{-2t})\varepsilon(t)$;

$y(t)$ 全为暂态, 不含稳态响应。

3-4 单位反馈控制系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{4}{s(s+5)}$, 求系统的单位阶跃响应 $y(t)$ 和调节时间 t_s 。

解: 依题, 系统闭环传递函数

$$\Phi(s) = \frac{4}{s^2 + 5s + 4} = \frac{4}{(s+1)(s+4)} = \frac{4}{(s+\frac{1}{T_1})(s+\frac{1}{T_2})} \quad \begin{cases} T_1 = 1 \\ T_2 = 0.25 \end{cases}$$

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+4)} = \frac{C_0}{s} + \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+4}$$

$$C_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4}{(s+1)(s+4)} = 1$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \Phi(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4}{s(s+4)} = -\frac{4}{3}$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow -4} (s+4) \Phi(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4}{s(s+1)} = \frac{1}{3}$$

$$h(t) = 1 - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t}$$

$$Q \quad \frac{T_1}{T_2} = 4, \quad \therefore t_s = \left(\frac{t_s}{T_1}\right) T_1 = 3.3 T_1 = 3.3。$$

3-5 设图 3.35 (a) 所示系统的单位阶跃响应如图 3.35 (b) 所示。试确定系统的参数 K_1 , K_2 和 a 。

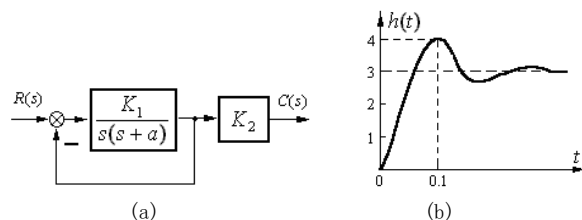


图 3.35 习题 3-5 图

解：由系统阶跃响应曲线有

$$\begin{cases} h(\infty) = 3 \\ t_p = 0.1 \\ \sigma\% = (4-3)/3 = 33.3\% \end{cases}$$

系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{K_1 K_2}{s^2 + as + K_1} = \frac{K_2 \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1)$$

$$\text{由} \quad \begin{cases} t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\omega_n} = 0.1 \\ \sigma\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} = 33.3\% \end{cases} \quad \text{联立求解得} \quad \begin{cases} \xi = 0.33 \\ \omega_n = 33.28 \end{cases}$$

$$\text{由式 (1)} \quad \begin{cases} K_1 = \omega_n^2 = 1108 \\ a = 2\xi\omega_n = 22 \end{cases}$$

$$\text{另外} \quad h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_1 K_2}{s^2 + as + K_1} = K_2 = 3$$

3-6 设单位反馈控制系统的开环传递函数为 $G_k(s) = \frac{25}{s(s+6)}$,

求 (1) 系统的阻尼比 ζ 和无阻尼固有频率 ω_n ;

(2) 系统的峰值时间 t_p 、超调量 $M_p\%$ 、调节时间 $t_s(\Delta=0.02)$ 。

$$\text{解: 系统闭环传递函数 } G_B(s) = \frac{\frac{25}{s(s+6)}}{1 + \frac{25}{s(s+6)}} = \frac{25}{s(s+6)+25} = \frac{25}{s^2+6s+25}$$

与标准形式对比, 可知 $2\xi\omega_n = 6$, $\omega_n^2 = 25$

故 $\omega_n = 5$, $\xi = 0.6$

$$\text{又 } \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} = 5 \times \sqrt{1-0.6^2} = 4$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{4} = 0.785$$

$$M_p \% = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = e^{\frac{-0.6\pi}{\sqrt{1-0.6^2}}} \times 100\% = 9.5\%$$

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 1.33$$

3-7 设系统的闭环传递函数为 $G_c(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$, 试求最大超调量 $M_p = 9.6\%$ 、峰值时间 $t_p = 0.2$ 秒时的闭环传递函数的参数 ξ 和 ω_n 的值。

$$\text{解: } \because \sigma\% = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 9.6\%$$

$$\therefore \xi = 0.6$$

$$\because t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 0.2$$

$$\therefore \omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{3.14}{0.2 \sqrt{1-0.6^2}} = 19.6 \text{ rad/s}$$

3-8 系统结构方框图如图 3.36 所示。试求局部反馈加入前、后系统的静态位置误差系数、静态速度误差系数和静态加速度误差系数。

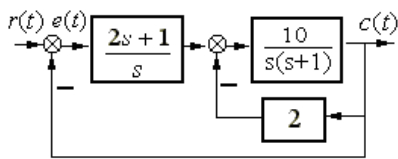


图 3.36 习题 3-8 图

解 局部反馈加入前, 系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10(2s+1)}{s^2(s+1)}$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \infty$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 10$$

局部反馈加入后，系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{2s+1}{s} \cdot \frac{\frac{10}{s(s+1)}}{1 + \frac{20}{s+1}} = \frac{10(2s+1)}{s(s^2+s+20)}$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 0.5$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0$$

3-9 已知系统的闭环特征方程，试判别对应系统的稳定性，并确定在右半 s 平面的特征根个数。

$$(1) D(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 = 0$$

$$(2) D(s) = s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 24s^2 + 32s + 48 = 0$$

$$(3) D(s) = s^5 + 2s^4 - s - 2 = 0$$

$$(4) D(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

解 (1) $D(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 = 0$

Routh:	s^5	1	2	11
	s^4	2	4	10
	s^3	ε	6	
	s^2	$4\varepsilon - 12/\varepsilon$	10	
	s	6		
	s^0	10		

第一列元素变号两次，有 2 个正根。

$$(2) D(s) = s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 24s^2 + 32s + 48 = 0$$

Routh:	s^5	1	12	32
	s^4	3	24	48
	s^3	$\frac{3 \times 12 - 24}{3} = 4$	$\frac{32 \times 3 - 48}{3} = 16$	0
	s^2	$\frac{4 \times 24 - 3 \times 16}{4} = 12$	48	
	s	$\frac{12 \times 16 - 4 \times 48}{12} = 0$	0	辅助方程 $12s^2 + 48 = 0$,
	s	24		辅助方程求导: $24s = 0$
	s^0	48		

系统没有正根。对辅助方程求解，得到系统一对虚根 $s_{1,2} = \pm j2$ 。

$$(3) D(s) = s^5 + 2s^4 - s - 2 = 0$$

Routh:	s^5	1	0	-1	
	s^4	2	0	-2	辅助方程 $2s^4 - 2 = 0$
	s^3	8	0		辅助方程求导 $8s^3 = 0$
	s^2	ε	-2		
	s	$16/\varepsilon$			
	s^0	-2			

第一列元素变号一次，有 1 个正根；由辅助方程 $2s^4 - 2 = 0$ 可解出：

$$2s^4 - 2 = 2(s+1)(s-1)(s+j)(s-j)$$

$$D(s) = s^5 + 2s^4 - s - 2 = (s+2)(s+1)(s-1)(s+j)(s-j)$$

$$(4) D(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

Routh:	s^5	1	24	-25	
	s^4	2	48	-50	辅助方程 $2s^4 + 48s^2 - 50 = 0$
	s^3	8	96		辅助方程求导 $8s^3 + 96s = 0$
	s^2	24	-50		
	s	$338/3$			
	s^0	-50			

第一列元素变号一次，有 1 个正根；由辅助方程 $2s^4 + 48s^2 - 50 = 0$ 可解出：

$$2s^4 + 48s^2 - 50 = 2(s+1)(s-1)(s+j5)(s-j5)$$

$$D(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = (s+2)(s+1)(s-1)(s+j5)(s-j5)$$

3-10 已知单位反馈控制系统的开环传递函数如下，试分别求出当输入信号为 $1(t)$ 、 t 和 t^2 时系统的稳态误差。

$$(1) G(s) = \frac{10}{(0.1s+1)(0.5s+1)}$$

$$(2) G(s) = \frac{7(s+3)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$$

$$\text{解: } (1) G(s) = \frac{10}{(0.1s+1)(0.5s+1)} \quad \begin{cases} K=10 \\ v=0 \end{cases}$$

$$D(s) = (0.1s+1)(0.5s+1)+10=0 \text{ 经判断系统稳定}$$

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r(t)-1(t)}{1+K} = \frac{1}{11}$$

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r(t)-t}{s} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r(t)-t^2}{s^2} = \infty$$

$$(2) \quad G(s) = \frac{7(s+3)}{s(s+4)(s^2+2s+2)} \quad \begin{cases} K = \frac{7 \times 3}{4 \times 2} = \frac{21}{8} \\ v = 1 \end{cases}$$

$$D(s) = s(s+4)(s^2+2s+2) + 7(s+3) = 0$$

经判断：系统不稳定。

3-11 已知单位反馈控制系统的开环传递函数如下

$$G_K(s) = \frac{100}{s(s+2)}$$

求：(1) 试确定系统的型次和开环增益 K ;

(2) 试求输入为 $r(t) = 1 + 3t$ 时，系统的稳态误差。

解：(1) 将传递函数化成标准形式

$$G_K(s) = \frac{100}{s(s+2)} = \frac{50}{s(0.5s+1)}$$

可见， $v=1$ ，这是一个 I 型系统

开环增益 $K=50$;

(2) 讨论输入信号， $r(t) = 1 + 3t$ ，即 $A=1$ ， $B=3$

$$\text{误差 } e_{ss} = \frac{A}{1+K_p} + \frac{B}{K_v} = \frac{1}{1+\infty} + \frac{3}{50} = 0 + 0.06 = 0.06$$

3-12 已知单位反馈控制系统的开环传递函数如下

$$G_K(s) = \frac{2}{s^2(s+0.1)(s+0.2)}$$

求：(1) 试确定系统的类型和开环增益 K ;

(2) 试求输入为 $r(t) = 5 + 2t + 4t^2$ 时，系统的稳态误差。

解：(1) 将传递函数化成标准形式

$$G_K(s) = \frac{2}{s^2(s+0.1)(s+0.2)} = \frac{100}{s^2(10s+1)(5s+1)}$$

可见， $v=2$ ，这是一个 II 型系统

开环增益 $K=100$;

(2) 讨论输入信号， $r(t) = 5 + 2t + 4t^2$ ，即 $A=5$ ， $B=2$ ， $C=4$

$$\text{误差 } e_{ss} = \frac{A}{1+K_p} + \frac{B}{K_v} + \frac{C}{K_a} = \frac{5}{1+\infty} + \frac{2}{\infty} + \frac{4}{100} = 0 + 0 + 0.04 = 0.04$$

3-13 已知控制系统的结构方框图如图 3.37 所示，试求：

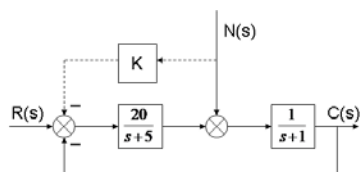


图 3.37 习题 3-13 图

(1) 不加虚线所画的顺馈控制时, 系统在干扰作用下的传递函数 $\Phi_n(s)$;

(2) 当干扰 $N(t) = 1(t)$ 时, 系统的稳态输出;

(3) 若加入虚线所画的顺馈控制时, 系统在干扰作用下的传递函数, 并求 $N(t)$ 对输出 $C(t)$ 稳态值影响最小的适合 K 值。

解 (1) 无顺馈时, 系统误差传递函数为

$$\Phi_n(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{s+5}{(s+1)(s+5)+20} = \frac{s+5}{s^2+6s+25}$$

$$(2) c_n(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_n(s) \cdot N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_n(s) \cdot \frac{\Delta}{s} = \frac{\Delta}{5}$$

(3) 有顺馈时, 系统误差传递函数为

$$\Phi_n(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{\frac{1}{s+1} \left[1 - \frac{20K}{s+25} \right]}{1 + \frac{20}{(s+1)(s+5)}} = \frac{s+5-20K}{s^2+6s+25}$$

$$\text{令 } c_n(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_n(s) \cdot N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_n(s) \cdot \frac{\Delta}{s} = \Delta \left(\frac{5-20K}{25} \right) = 0$$

得 $K = 0.25$

3-14 设控制系统的结构方框图如图 3.38 所示, 其中 $N(s)$ 为可量测扰动。若要求系统输出 $C(s)$ 完全不受 $N(s)$ 的影响, 且跟踪阶跃输入信号的稳态误差为零, 试确定装置 $G_{c1}(s)$ 和装置 $G_{c2}(s)$ 。

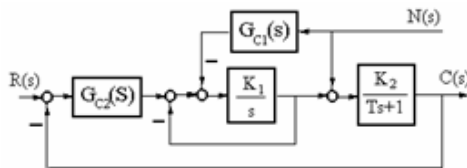


图 3.38 习题 3-14 图

解 (1) 求 $G_{c1}(s)$ 。令

$$\Phi_n(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{\frac{K_2}{Ts+1} \left(1 + \frac{K_1}{s} \right) - \frac{K_1 K_2}{s(Ts+1)} G_{c1}(s)}{1 + \frac{K_1}{s} + \frac{K_1 K_2 G_{c2}(s)}{s(Ts+1)}} = \frac{K_2 [s + K_1 - K_1 G_{c1}(s)]}{s(Ts+1) + K_1(Ts+1) + K_1 K_2 G_{c2}(s)} = 0 \text{ 得:}$$

$$G_{c1}(s) = \frac{s + K_1}{K_1}。$$

(2) 求 $G_{c2}(s)$ 。令

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 + \frac{K_1}{s}}{1 + \frac{K_1}{s} + \frac{K_1 K_2 G_{c2}(s)}{s(Ts+1)}} = \frac{(s + K_1)(Ts+1)}{s(Ts+1) + K_1(Ts+1) + K_1 K_2 G_{c2}(s)}$$

当 $r(t) = 1(t)$ 作用时, 令
$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_1}{K_1 + K_1 K_2 G_{c2}(s)} = 0$$

明显地, 取 $G_{c2}(s) = \frac{1}{s}$ 可以达到目的。

3-15 设系统的闭环特征方程为 $s^4 + 6s^3 + 12s^2 + 10s + 3 = 0$ 。试用劳斯稳定判据判别该系统的稳定性。

解: 用劳斯稳定判据判别, $a_4=1$, $a_3=6$, $a_2=12$, $a_1=10$, $a_0=3$ 均大于零, 且有

s^4	1	12	3
s^3	6	10	
s^2	10.33	3	
s	8.26	0	
s^0	3		

第 1 列元素都为正, 所以, 此系统是稳定的。

3-16 试确定图 3.39 所示系统的稳定性。

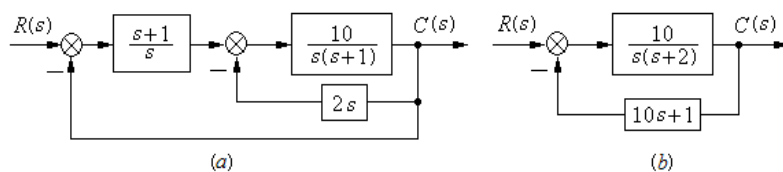


图 3.39 习题 3-16 图

解: (a).
$$G(s) = \frac{s+1}{s} \cdot \frac{10}{1 + \frac{2s \times 10}{s(s+1)}} = \frac{10(s+1)}{s^2(s+21)}$$

$$D(s) = s^2(s+21) + 10(s+1) = s^3 + 21s^2 + 10s + 1$$

s^3	1	10
s^2	21	1
s^1	$\frac{210-1}{21} > 0$	
s^0	1	

系统稳定。

$$(b). \phi(s) = \frac{10}{s(s+2)} = \frac{10}{s^2 + 102s + 10}$$

$$D(s) = s^2 + 102s + 10$$

满足必要条件, 故系统稳定。

3-17 已知单位反馈控制系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s(0.01s^2 + 0.2\xi s + 1)}$ ，试求系统稳定时，参

数 K 和 ξ 的取值关系。

解： $D(s) = s(0.01s^2 + 0.2\xi s + 1) + k = 0$

$$D(s) = s^3 + 20\xi s^2 + 100s + 100k = 0$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Routh: } s^3 & 1 & 100 \\ s^2 & 20\xi > 0 & 100k \\ s^1 & \frac{2000\xi - 100k}{20\xi} > 0 & \\ s^0 & 100k > 0 & \end{array}$$

$$\text{由 Routh 表第一列系数大于 0 得} \begin{cases} \xi > 0 \\ k > 0 \\ k < 20\xi \end{cases}, \text{ 即 } \frac{k}{\xi} < 20 (\xi > 0, k > 0)$$

3-18 设单位反馈控制系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s(1+0.2s)(1+0.1s)}$ ，要求闭环特征根的实部均小于-1，求 K 的取值范围。

解：系统特征方程为

$$s(1.0.2s)(1 + 0.1s) + K = 0$$

要使系统特征根实部小于-1，可以把原虚轴向左平移一个单位，令 $w = s + 1$ ，即 $s = w - 1$ ，代入原特征方程并整理得

$$0.02w^3 + 0.24w^2 + 0.46w + K - 0.72 = 0$$

运用劳斯判据，最后得

$$0.72 < K < 6.24$$

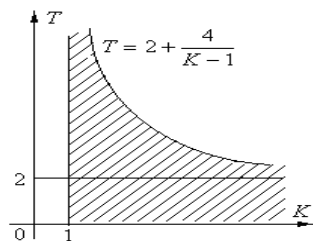
3-19 单位反馈控制系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K(s+1)}{s(Ts+1)(2s+1)}$ 。试在满足 $T > 0, K > 1$ 的条件下，确定使系统稳定的 T 和 K 的取值范围，并以 T 和 K 为坐标画出使系统稳定的参数区域图。

解 特征方程为：

$$D(s) = 2Ts^3 + (2+T)s^2 + (1+K)s + K = 0$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Routh: } s^3 & 2T & 1+K \Rightarrow T > 0 \\ s^2 & 2+T & K \Rightarrow T > -2 \\ s & 1+K - \frac{2TK}{2+T} & \Rightarrow T < 2 + \frac{4}{K-1} \\ s^0 & K & \Rightarrow K > 0 \end{array}$$

综合所得条件，当 $K > 1$ 时，使系统稳定的参数取值范围如图中阴影部所示。



3-20 系统的结构方框如图 3.40 所示。

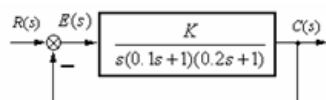


图 3.40 习题 3-20 图

- (1) 为确保系统稳定, K 如何取值?
- (2) 为使系统特征根全部位于 s 平面 $s = -1$ 的左侧, K 应取何值?
- (3) 若 $R(t) = 2t + 2$ 时, 要求系统稳态误差 $e_{ss} \leq 0.25$, K 应取何值?

解 $G(s) = \frac{50K}{s(s+10)(s+5)} \quad \begin{cases} K \\ v=1 \end{cases}$

(1) $D(s) = s^3 + 15s^2 + 50s + 50K$

	s^3	1	50	
	s^2	15	$50K$	
Routh:	s^1	$\frac{50(15-K)}{15}$		$\rightarrow K < 15$
	s^0	$50K$		$\rightarrow K > 0$

系统稳定范围: $0 < K < 15$

(2) 在 $D(s)$ 中做平移变换: $s = s' - 1$

$$D(s') = (s' - 1)^3 + 15(s' - 1)^2 + 50(s' - 1) + 50K$$

$$= s'^3 + 12s'^2 + 23s' + (50K - 36)$$

	s'^3	1	23	
	s'^2	12	$50K - 36$	
Routh:	s'^1	$\frac{312 - 50K}{12}$		$\rightarrow K < \frac{312}{50} = 6.24$
	s'^0	$50K - 36$		$\rightarrow K > \frac{36}{50} = 0.72$

满足要求的范围是: $0.72 < K < 6.24$

(3) 由静态误差系数法

当 $r(t) = 2t + 2$ 时, 令 $e_{ss} = \frac{2}{K} \leq 0.25$

得 $K \geq 8$ 。

综合考虑稳定性与稳态误差要求可得: $8 \leq K < 15$

3-21 判断下列系统的可控性。

$$(1) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$(2) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

解:

1) 由于该系统控制矩阵 $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 系统矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 所以

$$Ab = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

从而系统的能控性矩阵为

$$U_c = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

显然有

$$\text{rank} U_c = \text{rank} [b \quad Ab] = 2 = n$$

满足能控性的充要条件, 所以该系统能控。

2) 由于该系统控制矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

系统矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

则有,

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -7 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}$$

从而系统的能控性矩阵为

$$U_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -7 \\ -1 & 1 & 1 & -7 & 1 & 15 \end{bmatrix}$$

有

$$\text{rank} U_c = 3 = n$$

满足能控性的充要条件，所以该系统能控。

3-22 判断下列系统的可观测性。

(1)

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

解

(1) 系统的观测矩阵 $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，系统矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，得

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

系统能观性矩阵为

$$U_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

可知

$$\text{rank} U_o = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = 2 = n$$

满足能观性的充要条件，所以该系统是能观测的。

(2) 系统的观测矩阵 $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，系统矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ ，于是

$$CA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -14 & -8 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

系统能观性矩阵为

$$U_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \\ -8 & -14 & -8 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

易知

$$\text{rank } U_o = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = 3 = n$$

满足能观性的充要条件, 所以该系统是能观测的。

3-23 试确定当 p 与 q 为何值时下列系统不可控, 为何值时不可观测。

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y = [q \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

解 系统的能控性矩阵为

$$U_c = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} p & p-12 \\ -1 & p \end{bmatrix}$$

其行列式为

$$\det[b \quad Ab] = p^2 + p - 12$$

根据判定能控性的定理, 若系统能控, 则系统能控性矩阵的秩为 2, 亦即 $\det[b \quad Ab] \neq 0$, 可知 $p \neq -4$ 或 $p \neq 3$ 。

系统能观测性矩阵为

$$U_o = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & 1 \\ q+1 & 12q \end{bmatrix}$$

其行列式为

$$\det \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = 12q^2 - q - 1$$

根据判定能观性的定理，若系统能观，则系统能观性矩阵的秩为 2，亦即 $\det \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} \neq 0$ ，可知 $q \neq \frac{1}{3}$

或 $q \neq -\frac{1}{4}$ 。

第 4 章 习 题

4-1 设单位反馈控制系统的开环传递函数 $G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{(s+1)(s+2)}$ ，试绘制闭环系统的根轨迹。

解：①根轨迹共 2 条，起始于开环极点 $p_1=-1$ ， $p_2=-2$ ；随着 K 增大至 ∞ ，一条根轨迹趋向于开环零点 $z_1=-3$ ，另一条趋于无穷远处；

②实轴上根轨迹段： $(-\infty, -3]$ ， $[-2, -1]$ ；

③根轨迹有 1 条渐近线，渐近线与实轴正方向的夹角为：

$$\theta_a = \frac{\pm(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{\pm(2k+1)180^\circ}{2-1} = 180^\circ, \quad k=0$$

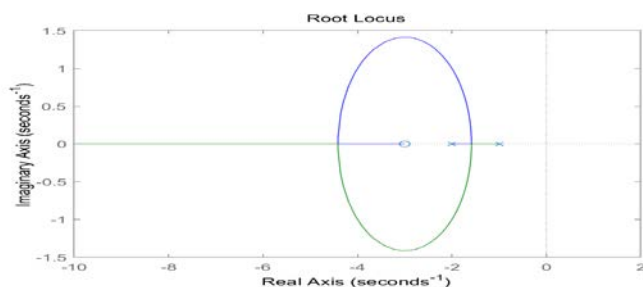
④根轨迹的分离点、汇合点：

$$K = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)}$$

令 $\frac{dK}{ds} = 0$ ，得 $s^2 + 6s + 7 = 0$

解得 $s_1=-1.59$ （分离点）， $s_2=-4.41$ （汇合点）

闭环系统概略根轨迹如题图 4-1 所示。



题图 4-1 习题 4-1 根轨迹

4-2 已知反馈控制系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$ ，试绘制该闭环系统的根轨迹。

解：

①该闭环系统有 $n=4$ 个开环极点，分别为 $p_1=0$ 、 $p_2=-4$ 、 $p_{3,4}=-2 \pm j4$ ；无有限开环零点（即 $m=0$ ），该系统有 $n=4$ 支根轨迹，分别起始于 4 个开环极点，终止于 4 个无穷远开环零点；

②复平面实轴上的 $[-4, 0]$ 区间段是根轨迹；

③4 支趋于无穷远处的根轨迹渐近线与正实轴的夹角为

$$\theta_a = \frac{\pm(2k+1)\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4} \quad (k=0,1,2,3)$$

4 支根轨迹渐近线与实轴的交点为

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{(0+(-4)+(-2+j4)+(-2-j4))-0}{4-0} = -2$$

由此可作出系统根轨迹的 4 条渐近线。

④分离点和汇合点

由闭环系统的特征方程可得

$$K = -s(s+4)(s^2+4s+20) = -(s^4+8s^3+36s^2+80s)$$

令 $\frac{dK}{ds} = 0$ ，即有 $\frac{dK}{ds} = -(4s^3+24s^2+72s+80) = -4(s+2)(s^2+4s+10) = 0$ ，解得 $s_1 = -2$ 和

$s_{2,3} = -2 \pm j2.45$ 。对于 s_1 点，处于 $[-4, 0]$ 区间的根轨迹上，表明该点是根轨迹的分离点或汇合点；

对于 $s_{2,3}$ 二点，以 s_2 来看，4 个开环极点到该点的矢量与正实轴的夹角之和为 3π ，满足根轨迹的相角条件，表明 s_2 是根轨迹的分离点或汇合点；同理， s_3 点也是系统根轨迹的分离点或汇合点，如题图 4.2 所示。

⑤与虚轴交点

由于闭环系统的特征方程式为

$$s^4 + 8s^3 + 36s^2 + 80s + K = 0$$

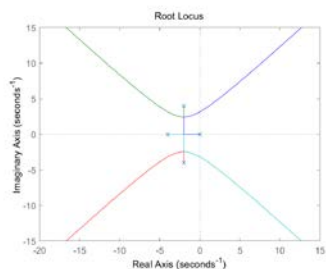
其劳斯阵列为

s^4	1	36	K
s^3	8	80	0
s^2	26	K	
s^1	$\frac{8(260-K)}{26}$	0	
s^0	$\frac{26}{K}$		

由劳斯判据可知，当 $K = 260$ 时， s^1 所在行的全部元素为零，此时由 s^2 所在行的元素组成的辅助方程，即

$$26s^2 + K = 0$$

此时的特征根 $s_{1,2} = \pm j\sqrt{10}$ 。表明闭环系统有 2 支根轨迹与虚轴分别相交于 $\pm j\sqrt{10}$ 点，根轨迹上的该点对应的增益 $K = 260$ ，如题图 4-2 所示。



题图 4-2 习题 4-2 的根轨迹

4-3 系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+10)}$ ，试绘制系统的根轨迹，并求出闭环系统

产生虚纯根的根轨迹增益 K 。

解：1、绘制根轨迹图。

① $n=3$ ， $m=0$ ，有 3 条根轨迹，分别起始于开环极点 $p_1=0$ ， $p_2=-1$ ， $p_3=-10$ ；3 条根轨迹均趋于无穷远处；

② 实轴上根轨迹段： $(-\infty, -10]$ ， $[-1, 0]$ ；

③ 根轨迹有 3 条渐近线，渐近线与实轴正方向的夹角为：

$$\theta_a = \frac{\pm(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{\pm(2k+1)180^\circ}{3} = -60^\circ, 60^\circ, 180^\circ, k=0,1,2$$

渐近线与实轴交点为：

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{-1-10}{3-0} = -\frac{11}{3}$$

④ 根轨迹的分离点、会合点：

$$K = -(s^3 + 11s^2 + 10s)$$

令 $\frac{dK}{ds} = 0$ ，得 $3s^2 + 22s + 10 = 0$

解得 $s_1 = -6.85$ （舍）， $s_2 = -0.49$ （分离点）

⑤ 与虚轴交点

由于闭环系统的特征方程式为

$$s^3 + 11s^2 + 10s + K = 0$$

其劳斯阵列为

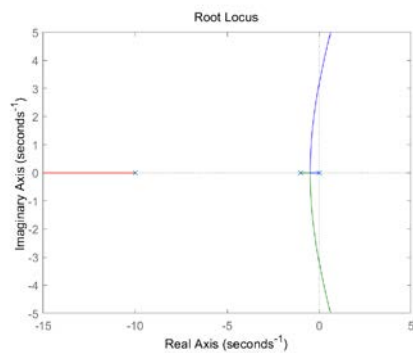
s^3	1	10
s^2	11	K
s^1	$10-K/11$	0
s^0	K	

当 $K=110$ 时， s^1 所在行的全部元素为零，此时由 s^2 所在行的元素组成的辅助方程，即

$$11s^2 + 110 = 0$$

此时的特征根 $s_{1,2} = \pm j\sqrt{10}$ 。表明闭环系统有 2 支根轨迹与虚轴分别相交于 $\pm j\sqrt{10}$ 点，根轨迹上的该点对应的增益 $K=110$ 。

闭环系统概略根轨迹如题图 4-3 所示。



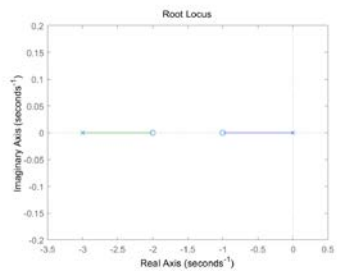
题图 4-3 习题 4-3 的根轨迹

2、由上分析可知，产生纯虚根的根轨迹增益 $K = 110$

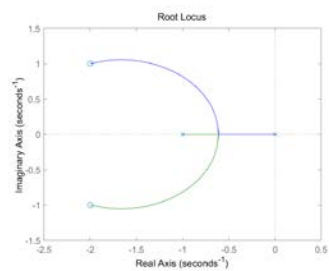
4-4 已知开环零点 z 和开环极点 p ，试概略画出相应的闭环根轨迹图。

- (1) $z = -1, -2, p = 0, -3$;
- (2) $p = 0, -1, z_{1,2} = -2 \pm j$;
- (3) $p_1 = -2, p_{2,3} = -1 \pm j1, z = -3$;

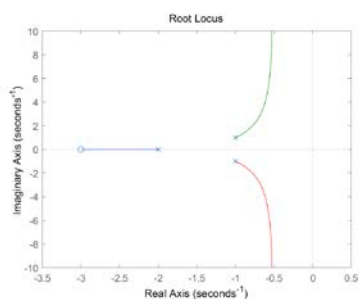
解：根据常规根轨迹基本法则 1、2、3，绘制 4-4 相应的闭环根轨迹如题图 4.4 所示。



(a)



(b)



(c)

题图 4-4 习题 4-4 的根轨迹

4-5 设单位反馈控制系统的开环传递函数为

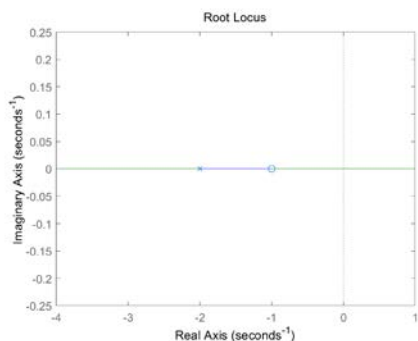
$$G(s) = \frac{K(s+1)^2}{(s+2)^2}$$

若该控制系统为正反馈，试绘制其根轨迹。

解：由于系统为正反馈，故为非最小相位系统，其零度根轨迹绘制步骤如下：

- ① 有 2 条根轨迹，根轨迹起始于开环极点 $p_{1,2} = -2$ ，终止于开环零点 $z_{1,2} = -1$ ；
- ② 实轴上的根轨迹区间 $(-\infty, +\infty)$ ；
- ③ 根轨迹的起始角和终止角均为 0 度。

由上画出零度根轨迹如题图 4-5 所示。



题图 4-5 习题 4-5 的根轨迹

4-6 已知单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(1+\tau_1 s)}{s(1+5s)}$$

若 $K=5$ ，试作出以 τ_1 为参量的根轨迹图。

解：系统的闭环特征方程为 $D(s) = 5s^2 + s + 5\tau_1 s + 5 = 0$

$$G'(s) = \frac{\tau_1 s}{s^2 + 0.2s + 1}$$

按照常规根轨迹绘制法则，绘制 τ_1 为参量的广义根轨迹。

① $n=2, m=1$, 有 2 条根轨迹, 分别起始于开环极点 $p_1=-0.1+j0.995$, $p_2=-0.1-j0.995$; 1 条根轨迹趋向于开环零点 $z_1=0$, 另一条趋于无穷远处;

② 实轴上根轨迹段: $(-\infty, 0]$;

③ 根轨迹有 1 条渐近线, 渐近线与实轴正方向的夹角为:

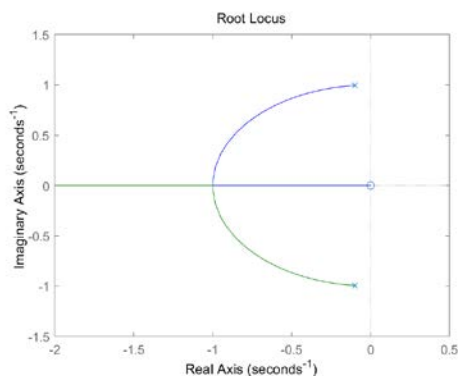
$$\theta_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)180^\circ}{2-1} = 180^\circ$$

③ 根轨迹的分离点、汇合点:

$$\tau_1 = -\frac{(s^2 + 0.2s + 1)}{s}$$

令 $\frac{d\tau_1}{ds} = 0$, 得 $s^2 - 1 = 0$, 解得 $s_1=1$ (舍), $s_2=-1$ (分离点)

该根轨迹在复平面上部分是以零点为圆心, 以零点到分离点之间的距离为半径的圆弧, 根轨迹如题图 4-6 所示。



题图 4-6 习题 4-6 的根轨迹

4-7 单位负反馈系统的开环传递函数为:

$$G(s) = \frac{K(2s+1)}{s^2(0.2s+1)^2}$$

试绘制 K 从 $0 \sim \infty$ 变化时闭环系统的根轨迹, 并确定使闭环系统稳定的 K 值范围。

解: (1) 系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*(s+0.5)}{s^2(s+5)^2} \quad (K^* = 50K)$$

① $n=4, m=1$, 有 4 条根轨迹, 分别起始于开环极点 $p_1, 2=0$, $p_3, 4=-5$; 1 条根轨迹趋向于零点 $z_1=-0.5$, 其余 3 条均趋于无穷远处;

④ 实轴上根轨迹段: $(-\infty, -0.5]$;

③ 根轨迹有 3 条渐近线, 渐近线与实轴正方向的夹角为:

$$\theta_a = \frac{\pm(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{\pm(2k+1)180^\circ}{3} = -60^\circ, 60^\circ, 180^\circ, k=0,1,2$$

渐近线与实轴交点为:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{-5-5-(-0.5)}{4-1} = -3.167$$

④与虚轴交点

由于闭环系统的特征方程式为

$$s^4 + 10s^3 + 25s^2 + K^*s + 0.5K^* = 0$$

其劳斯阵列为

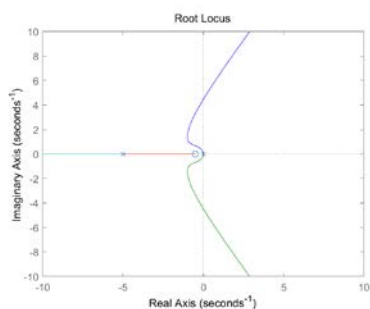
s^4	1	25	$0.5K^*$
s^3	10	K^*	
s^2	$25-K^*/10$	$0.5K^*$	
s^1	$200K^*-K^{*2}/(250-K^*)$	0	
s^0	$0.5K^*$		

当 $K^* = 200$ ，即 $K = 4$ 时， s^1 所在行的全部元素为零，此时由 s^2 所在行的元素组成的辅助方程，即

$$5s^2 + 100 = 0$$

此时的特征根 $s_{1,2} = \pm j2\sqrt{5}$ 。表明闭环系统有 2 支根轨迹与虚轴分别相交于 $\pm j2\sqrt{5}$ 点，根轨迹上的该点对应的增益 $K^* = 200$ 。

闭环系统概略根轨迹如题图 4-7 所示。



题图 4-7 习题 4-7 的根轨迹

(2) 闭环系统稳定时 K 的取值范围为 $0 < K < 4$ 。

4-8 给定开环传递函数

$$G_1(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)}, \quad G_2(s) = \frac{K(s+4)}{(s+1)(s+3)}$$

试绘制它们的根轨迹图，并说明增加一个零点对系统根轨迹的影响。

解：(1) $G_1(s)$ 有两个开环实数极点 -1 、 -3 ；实轴上的根轨迹在 $[-3, -1]$ 区间，根轨迹具有与实轴垂直的渐近线，渐近线与实轴的交点坐标为 -2 ，实轴上的汇合点坐标为 -2 ，根轨迹如题图 4-8(a) 所示；

(2) $G_2(s)$ 有两个开环实数极点 -1 、 -3 ，一个开环零点 -4 ；实轴上的根轨迹在 $(-\infty, -4]$ 、 $[-3, -1]$ 区间，实轴上的分离点、汇合点坐标为 -5.732 和 -2.268 ，根轨迹如题图 4-8(b) 所示

(3) 对照二者根轨迹可以看出，在根轨迹左方增加一个零点后，根轨迹向左方移动。

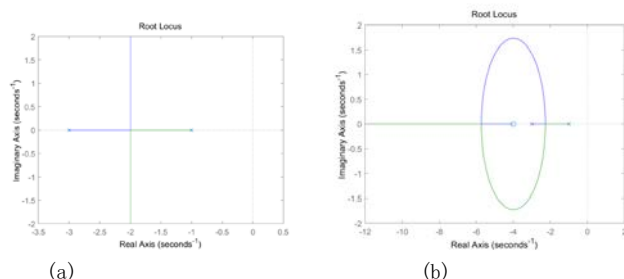


图 4-8 题 4-8 根轨迹图

4-9 给定开环传递函数

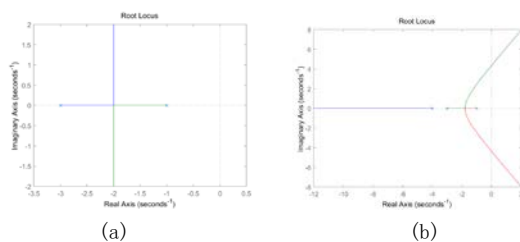
$$G_1(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)}, \quad G_2(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

试绘制它们的根轨迹图，并说明增加一个极点对系统根轨迹的影响。

解：（1） $G_1(s)$ 有两个开环实数极点-1、-3；实轴上的根轨迹在 $[-3, -1]$ 区间，根轨迹具有与实轴垂直的渐近线，渐近线与实轴的交点坐标为-2，实轴上的会合点坐标为-2，根轨迹如题图 4-9(a)所示；

（2） $G_2(s)$ 有 3 个开环实数极点-1、-3、-4；实轴上的根轨迹在 $(-\infty, -4]$ 、 $[-3, -1]$ 区间，3 条根轨迹均趋于无穷远处，根轨迹渐近线方向为-60 度、60 度、180 度，渐近线与实轴交点坐标为-2.667，实轴上，汇合点坐标为-1.785，根轨迹如题图 4-9(b)所示

（3）对照二者根轨迹可以看出，在根轨迹左方增加一个极点后，根轨迹向右方移动。



题图 4-9 题 4-9 根轨迹图

4-10 设单位负反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+10)}$$

（1）绘制系统的根轨迹图；

（2）当 $K=100$ 时，求出系统的超调量和过渡过程时间。

解：1、绘制根轨迹图。

② $n=2, m=0$ ，有 2 条根轨迹，分别起始于开环极点 $p_1=0, p_2=-10$ ；2 条根轨迹均趋于无穷远处；

② 实轴上根轨迹段： $[-10, 0]$ ；

③ 根轨迹有 2 条渐近线，渐近线与实轴正方向的夹角为：

$$\theta_a = \frac{\pm(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{\pm(2k+1)180^\circ}{2} = -90^\circ, 90^\circ, k=0,1$$

渐近线与实轴交点为：

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{0-10}{2-0} = -5$$

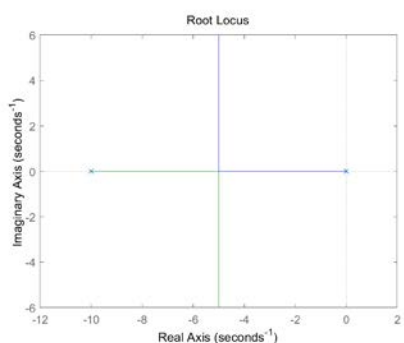
④根轨迹的分离点、会合点：

$$K = -(s^2 + 10s)$$

令 $\frac{dK}{ds} = 0$ ，得 $2s + 10 = 0$

解得 $s = -5$ ，此时 $K = 25$

闭环系统概略根轨迹如题图 4.10 所示。



题图 4-10 习题 4-10 的根轨迹

(2) 当 $K=100$ ，开环传递函数为

$$G_K(s) = \frac{100}{s(s+10)}$$

则 $\omega_n = 10$ (rad/s)， $\xi = 0.5$ ，因此

$$\sigma\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\% = 16.3\%$$

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = 0.6(s)(\pm 5\%), t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 0.8(s)(\pm 2\%)$$

4-11 设单位负反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+4)}$$

(1) 绘制系统的根轨迹图；

(2) 求系统具有欠阻尼振荡响应时 K 值范围；

(3) K 取何值时，系统处于临界稳定状态，其等幅振荡的频率是多少？

解：(1) 绘制根轨迹图。

① $n=3$ ， $m=0$ ，有 3 条根轨迹，分别起始于开环极点 $p_1=0$ ， $p_2=-2$ ， $p_3=-4$ ；3 条根轨迹均趋于无穷远处；

② 实轴上根轨迹段： $(-\infty, -4]$ ， $[-2, 0]$ ；

③ 根轨迹有 3 条渐近线，渐近线与实轴正方向的夹角为：

$$\theta_a = \frac{\pm(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{\pm(2k+1)180^\circ}{3} = -60^\circ, 60^\circ, 180^\circ, k=0,1,2$$

渐近线与实轴交点为:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = -2$$

④根轨迹的分离点、会合点:

$$K = -(s^3 + 6s^2 + 8s)$$

$$\text{令 } \frac{dK}{ds} = 0, \text{ 得 } 3s^2 + 12s + 8 = 0$$

解得 $s_1 = -0.85$ (分离点), 此时 **K=3.08**; $s_2 = -3.15$ (舍)

⑤与虚轴交点

由于闭环系统的特征方程式为

$$s^3 + 6s^2 + 8s + K = 0$$

其劳斯阵列为

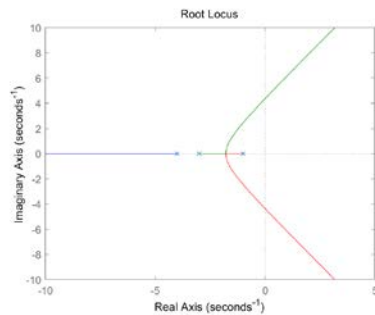
s^3	1	8	
s^2	6	K	
s^1	$8-K/6$	0	
s^0	K		

当 $K = 48$ 时, s^1 所在行的全部元素为零, 此时由 s^2 所在行的元素组成的辅助方程, 即

$$8s^2 - 8 = 0$$

此时的特征根 $s_{1,2} = \pm j2\sqrt{2}$ 。表明闭环系统有 2 支根轨迹与虚轴分别相交于 $\pm j2\sqrt{2}$ 点, 根轨迹上的该点对应的增益 $K = 48$ 。

闭环系统概略根轨迹如题图 4.14 所示。



题图 4-11 习题 4-11 的根轨迹

(2) 分析系统性能

① $0 < K < 48$ 时, 闭环系统的根轨迹都位于 s 平面左半平面, 系统是稳定的;

② $0 < K < 3.08$ 时, 闭环系统的特征根均位于实轴上, 系统的性能主要由位于实轴上的两个主导极点确定, 系统处于过阻尼状态;

③ $K = 3.08$ 时, 闭环系统的特征根有位于实轴上的二重根, 系统的性能主要由重极点确定, 系统处

于临界阻尼状态;

④3.08 < K < 48 时, 闭环系统的特征根为共轭复根和实轴上的根, 系统的性能主要由共轭复根确定, 系统处于欠阻尼状态;

(3) 稳定情况下的最大 K 值为 K=48; 系统处于等幅振荡时的频率 $\omega_n = 2\sqrt{2}(\text{rad/s})$

4-12 已知负反馈系统的传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s^2(s+1)}$, $H(s) = s+a$

(1) 利用 Matlab 有关函数作出 $0 \leq a < 1$ 时系统的根轨迹和单位阶跃响应曲线;

(2) 讨论 a 值变化对系统动态性能及稳定性的影响 ($0 \leq a < 1$)。

解 (1) (a) 取 $a = 0.1, K = 1$

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+a)}{s^2(s+1)} = \frac{K(s+0.1)}{s^3+s^2}$$
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{1}{s^3+s^2+s+0.1}$$

Matlab 文本 A4.3

```
p=[1 0.1];  
q=[1 1 0 0];  
rlocus(p,q)  
num=[1];  
den=[1 1 1 0.1];  
step(num,den)
```

系统的根轨迹如题图 4-12(a)所示和单位阶跃响应曲线如题图 4-12(b)所示。

(b) 取 $a = 0.5, K = 1$

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+0.5)}{s^3+s^2}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3+s^2+s+0.5}$$

Matlab 文本 A4.4

```
p=[1 0.5];  
q=[1 1 0 0];  
rlocus(p,q)  
num=[1];  
den=[1 1 1 0.5];  
step(num,den)
```

系统的根轨迹如题图 4-12(c)所示和单位阶跃响应曲线如题图 4-12(d)所示。

(c) 取 $a = 0.9, K = 1$

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+0.9)}{s^3+s^2}$$

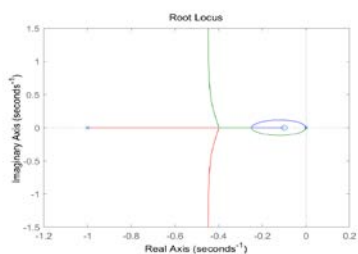
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3 + s^2 + s + 0.9}$$

Matlab 文本 A4.5

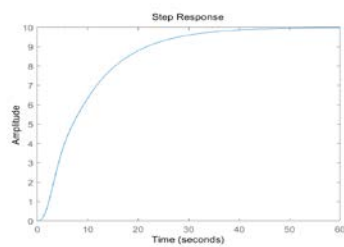
```
p=[1 0.9];
q=[1 1 0 0];
rlocus(p,q)
num=[1];
den=[1 1 1 0.9];
step(num,den)
```

系统的根轨迹如题图 4-12(e)所示和单位阶跃响应曲线如题图 4-12(f)所示。

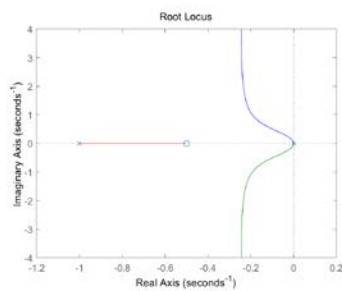
(2) 随 a 值减少, 主导极点由一对共轭复数的二阶衰减振荡系统变成由一个负实数的一阶系统, 对系统动态性能和稳定性都有利。



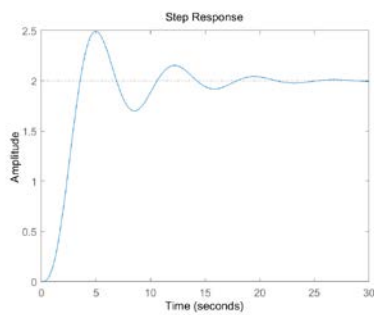
(a)



(b)



(c)



(d)