



武汉理工大学

WUHAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

控制工程基础

《控制工程基础（第2版）》，电子工业出版社，2022年





武汉理工大学
WUHAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

2. 控制系统的 数学模型

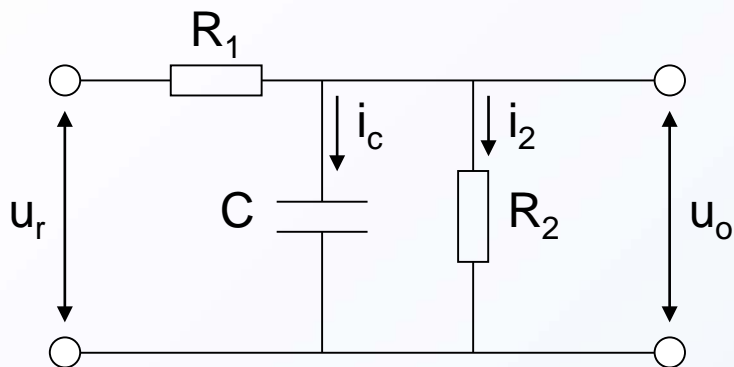


2.1 基本概念

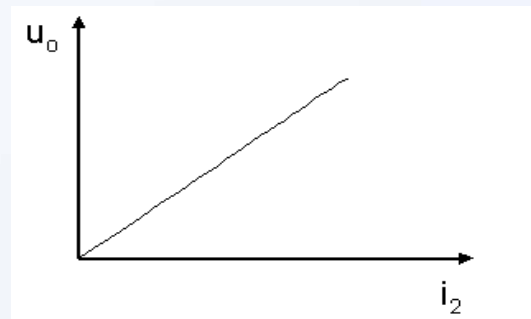
数学模型：描述系统变量之间的关系（表达式）

数学模型可以是数学方程（微分 / 积分方程、代数方程）、也可以是数据表、图形、曲线等。只要是表示系统变量之间关系的都可认为是数学模型。

例如：



电路系统



电路系统的数学模型



2.1 基本概念

系统变量：表示系统运行特征的参量，分为内部变量（状态变量）、外部变量

状态变量表示系统自身运行状态；**外部变量**表示系统与外界的相互作用，有输入变量和输出变量之分；系统内部变量与外部变量的划分依实际情况确定。

数学模型的描述方法：

(1) 外部变量描述（输入——输出描述），称为**外部描述**

- 如，微分方程、传递函数、频率特性函数等

(2) 状态变量描述，称为**内部描述**

- 如状态空间表达式、方框图等

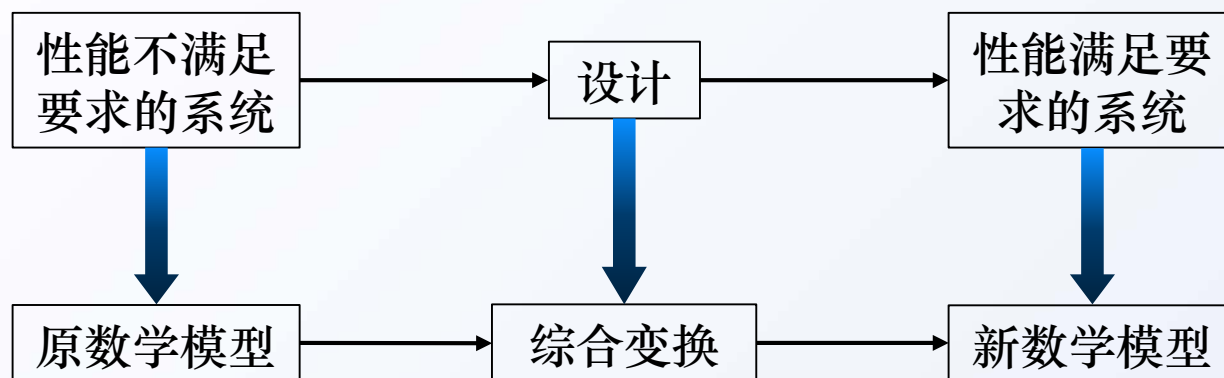


2.1 基本概念

建立数学模型的目的：

- 对系统性能进行计算分析，以掌握系统性能的优劣

设计控制系统的目的是使系统“运动”满足要求。系统性能的优劣反映在系统运行状态的变化规律上，系统状态的变化规律取决于系统数学模型。因此，**从某种意义上说：设计控制系统就是改进原有不满足性能要求的数学模型：**



确定的数学模型对应确定的系统性能

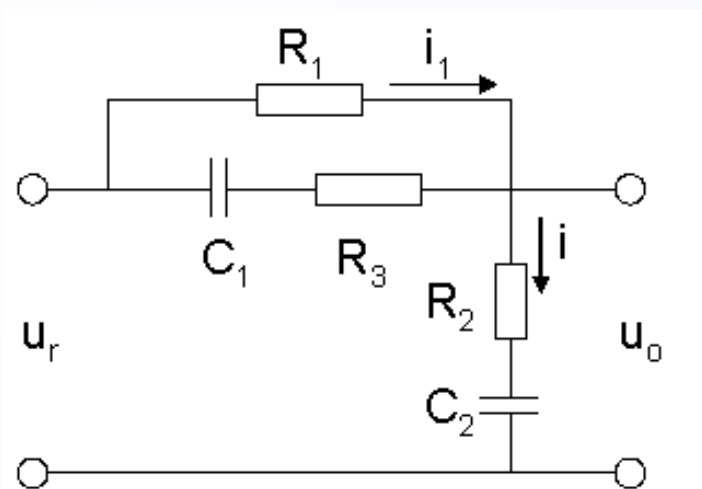


2.2 系统微分方程的建立与线性化

(1) 系统微分方程的建立

首先，依据基本的物理定律，列写出子系统（或系统部件）变量的微分方程；**然后**，确定系统的输入量/输出量，消去中间变量就得到系统输入/输出之间的微分方程

例题1：建立 u_r 和 u_o 之间的微分关系。



$$u_o = R_2 i + \frac{1}{C_2} \int i dt$$

$$u_r = R_1 i_1 + u_o$$

$$R_1 i_1 = R_3 (i - i_1) + \frac{1}{C_1} \int (i - i_1) dt$$

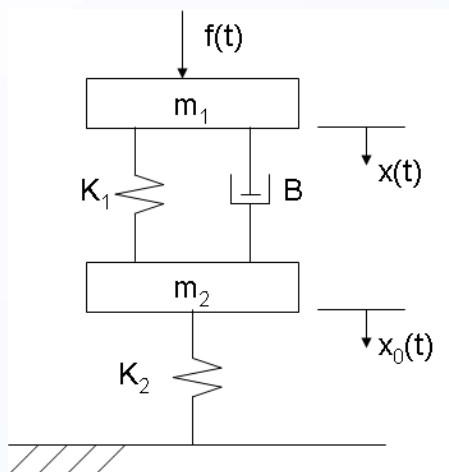


2.2 系统微分方程的建立与线性化

消去中间变量 i_1 和 i ，得 u_o 与 u_r 的微分关系

$$\begin{aligned} & C_1 C_2 (R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3) \frac{d^2 u_o}{dt^2} + (C_2 R_2 + C_1 (R_1 + R_3) + C_2 R_1) \frac{du_o}{dt} + u_o \\ &= C_1 C_2 R_2 (R_1 + R_3) \frac{d^2 u_r}{dt^2} + (C_2 R_2 + C_1 (R_1 + R_3) + C_2 R_1) \frac{du_r}{dt} + u_r \end{aligned}$$

例题2：在下图所示机械系统中，输入 $f(t)$ 为作用力， $x(t)$ 、 $x_0(t)$ 分别是质量块 m_1 、 m_2 相对于地面的位移量。求从 $f(t)$ 到 $x_0(t)$ 的微分关系。



$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} &= f - f_B - f_{K1} \\ f_B &= B(\dot{x} - \dot{x}_0) \\ f_{K1} &= K_1(x - x_0) \\ m_2 \ddot{x}_0 &= f_B + f_{K1} - f_{K2} \\ f_{K2} &= K_2 x_0 \end{aligned}$$

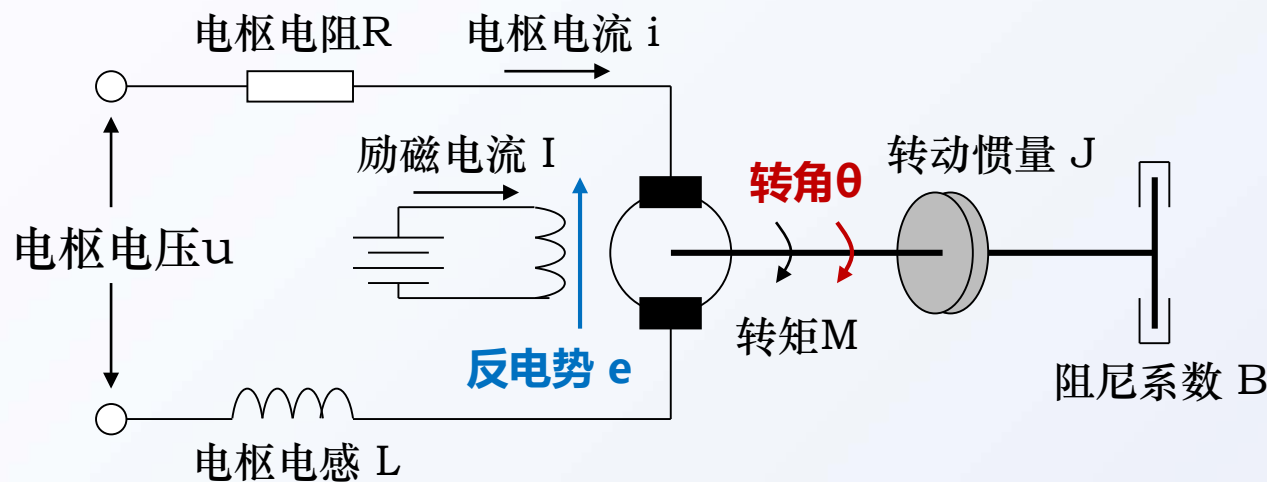


2.2 系统微分方程的建立与线性化

消去中间变量 f_B 、 f_{K1} 、 f_{K2} 后，得

$$m_1 m_2 \frac{d^4 x_o}{dt^4} + B(m_1 + m_2) \frac{d^3 x_o}{dt^3} + (K_1(m_1 + m_2) + m_1 K_2) \frac{d^2 x_o}{dt^2} + BK_2 \frac{dx_o}{dt} + K_1 K_2 x_o = B \frac{df}{dt} + K_1 f$$

例题3：电枢控制直流电机的原理如下图所示。求电枢电压 $u(t)$ 与电机转动角位移 $\theta(t)$ 之间的微分关系。





2.2 系统微分方程的建立与线性化

电枢回路方程: $L \frac{di}{dt} + Ri + e = u$

机械系统方程: $J \frac{d^2\theta}{dt^2} + B \frac{d\theta}{dt} = M = K_M i$ (K_M 和 K_e 是常数)

反电势方程: $e = K_e \frac{d\theta}{dt}$



消去中间变量后, 得
$$LJ \frac{d^3\theta}{dt^3} + (LB + RJ) \frac{d^2\theta}{dt^2} + (RB + K_M K_e) \frac{d\theta}{dt} = K_M u$$



2.2 系统微分方程的建立与线性化

(2) 系统微分方程的线性化

实际系统的微分方程是非线性的。由于非线性微分方程的分析和求解困难，一般情况下转化为线性方程来处理。

线性化的条件和思路

- 在系统平稳工作状态的邻域内，将非线性函数项按Taylor级数展开，并取线性项。

对于函数 $f(x)$ ，在其平稳工作点 x_0 邻域内展成 **Taylor** 级数为：

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x_0} (x - x_0) + R(x - x_0)$$

当 $(x - x_0) < 1$ 时， $R(x - x_0) \ll 1$ ，即在 x_0 邻域的线性化方程为：

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x_0} (x - x_0) \Rightarrow \Delta f(x) = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x_0} \Delta x \Rightarrow f(x) = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x_0} x$$



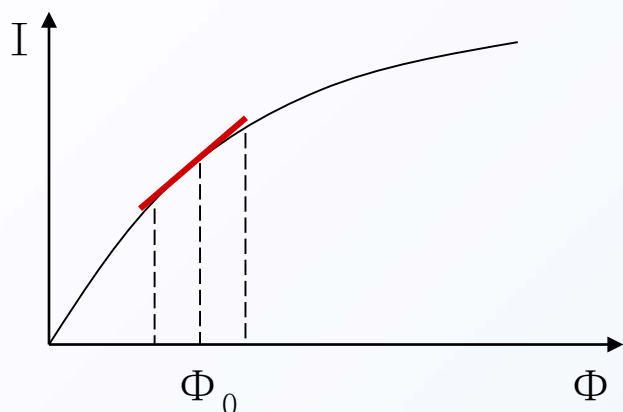
2.2 系统微分方程的建立与线性化

例题4：光敏电阻的光电特性一般为

$$I = AU\Phi^n$$

其中： I 是光敏电阻的输出电流， Φ 是入射光通量， U 是外加电源电压， A 是常数， n 是光电转换因子，一般 $n=0.5$ 。

光敏电阻的输入 Φ 与输出 I 是非线性关系,线性化为：



$$I(\Phi) = I(\Phi_0) + (AU n \Phi_0^{n-1})(\Delta\Phi) + R(\Delta\Phi)$$

$$\Delta I(\Phi) = (AU n \Phi_0^{n-1})(\Delta\Phi) + R(\Delta\Phi)$$

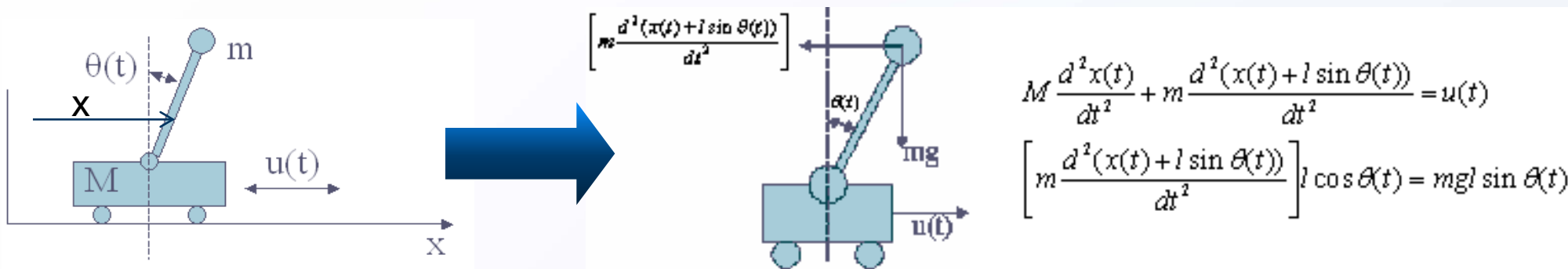
$$(\Delta\Phi \ll 1)$$

$$I = (AU n \Phi_0^{n-1})\Phi$$



2.2 系统微分方程的建立与线性化

例题5：建立下图所示倒立摆系统的线性微分方程， $u(t)$ 为驱动力。



$$(M + m) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + ml \cos \theta(t) \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} - ml \sin \theta(t) \left(\frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2 = u(t)$$
$$\cos \theta(t) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + l \cos^2 \theta(t) \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} - l \sin \theta(t) \cos \theta(t) \left(\frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2 = g \sin \theta(t)$$

在 $\theta \ll 1$ 时， $\cos \theta \approx 1$ ， $\sin \theta \approx 0$ ，对非线性函数项线性化后即为

$$(M + m) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + ml \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = u(t) \quad \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + l \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = 0$$



2.3 系统的状态方程

(1) 基本概念

状态变量：

- **完全描述系统运动状态所需独立变量的最少组合**。其中的每一个变量都表示系统运动状态的一种特征，这单个变量往往也称为状态变量。

状态向量：

- **描述系统运动状态的最少一组独立状态变量构成的向量**。若最少一组独立状态变量为 $x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_n(t)$

状态向量一般表示为列向量

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = [x_1(t) \ \cdots \ x_n(t)]^T$$



2.3 系统的状态方程

状态空间和状态轨迹：

- 以各状态变量为坐标轴所构成的空间称为状态空间。某时刻 t 的状态向量 $\mathbf{X}(t)$ 对应状态空间中的一点，称为状态点。随时间变化该状态点描绘的曲线就是系统的状态轨迹。

输入量和输出量：

- 系统外部施加给系统的（作用）量，称为系统的**输入量**；系统施加给外部的（作用）量，称为系统的**输出量**。一般地，系统的输入量和输出量都是多个，常表示成列向量，分别称为输入向量和输出向量。

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_r(t) \end{bmatrix} = [u_1(t) \quad u_2(t) \quad \dots \quad u_r(t)]^T$$

输入向量

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_m(t) \end{bmatrix} = [y_1(t) \quad y_2(t) \quad \dots \quad y_m(t)]^T$$

输出向量



2.3 系统的状态方程

状态变量的注释：

- (a) 系统运动状态是由一组独立（或数目最少）状态变量确定的，这组独立状态变量的数目是唯一的。**一个由 n 阶微分方程描述的系统就需 n 个独立的状态变量**，即这 n 个状态变量可完全能描述系统运动状态。若变量数目多于 n ，则必有变量不独立；若变量少于 n ，则不能完全描述系统的运动状态。
- (b) **系统状态变量的选取不是唯一的**，一般选取易于测量和控制的物理变量作为状态变量。但是，选取易于测量和控制的物理变量为状态变量时，有时会使系统的状态方程求解困难。

总之，系统的变量分为**输入量**、**输出量**、**状态变量**，这三种变量的关系十分紧密，人们关注的重点是输入量与输出量的关系。



2.3 系统的状态方程

状态方程：由系统**状态变量**和**输入量**构成的一阶微分方程组

一般表示为

$$\frac{dX(t)}{dt} = f(X(t), u(t), t)$$

状态（列）向量 $X(t) = [x_1(t) \quad \dots \quad x_n(t)]^T \in R^n$

输入（列）向量 $u(t) = [u_1(t) \quad \dots \quad u_r(t)]^T \in R^r$

输出方程：表示系统**输出量**与**状态变量**和输入变量的函数关系式

一般表示为

$$y(t) = g(X(t), u(t), t)$$

输出（列）向量 $y(t) = [y_1(t) \quad \dots \quad y_m(t)]^T \in R^m$

状态空间表达式：系统的**状态方程**与**输出方程**的组合，也称为系统的动态方程



2.3 系统的状态方程

对于**线性系统**，其状态方程和输出方程一般可以表示为

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= f(X(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(X(t), u(t), t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= AX(t) + Bu(t) \\ y(t) &= CX(t) + Du(t) \end{aligned}$$

式中：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \in R^{n \times n}$$

称为**系统矩阵**或**状态矩阵**

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \in R^{m \times n}$$

称为**输出矩阵**

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix}_{n \times r} \in R^{n \times r}$$

称为**输入矩阵**或**控制矩阵**

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix}_{m \times r} \in R^{m \times r}$$

称为**直接转移矩阵**

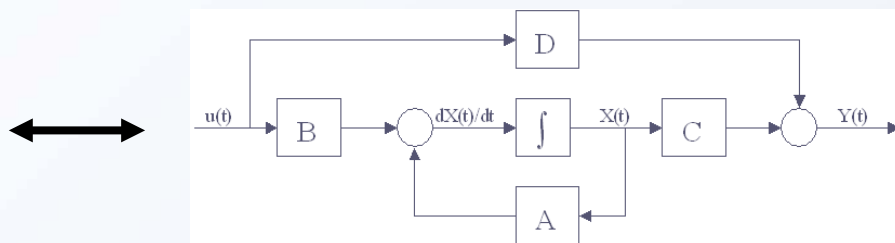


2.3 系统的状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1r}u_r \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nr}u_r \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + \dots + d_{1r}u_r \\ \dots \\ y_m = c_{m1}x_1 + \dots + c_{mn}x_n + d_{m1}u_1 + \dots + d_{mr}u_r \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= AX(t) + Bu(t) \\ y(t) &= CX(t) + Du(t) \end{aligned}$$

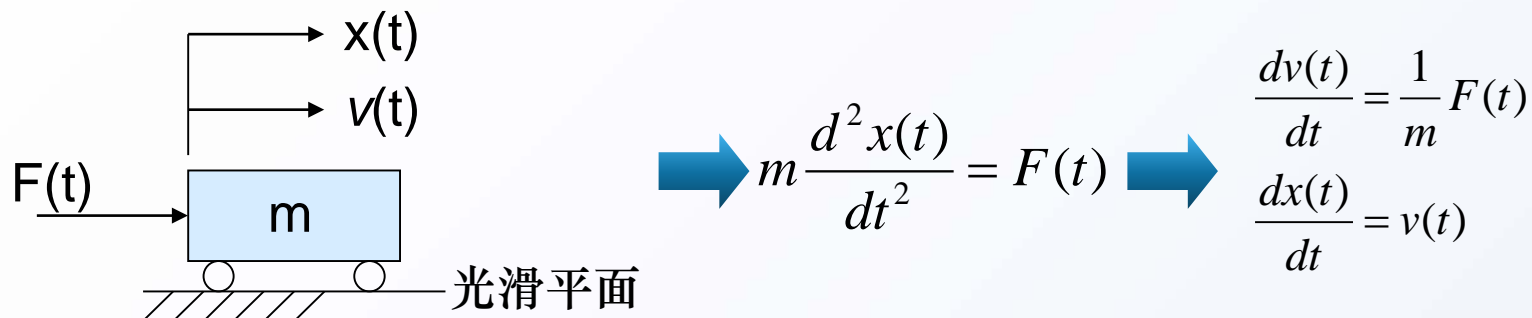


线性定常系统的状态空间表达式取决于矩阵**A**、**B**、**C**、**D**。因此，线性定常系统也常表示为**系统(A, B, C, D)**。



2.3 系统的状态方程

例题6：下图所示是一个机械系统，试建立其状态空间表达式



(1) 取状态变量 $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(\mathbf{t})$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{v}(\mathbf{t})$, 输出为 $\mathbf{x}(\mathbf{t})$, 输入为 $\mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{t})$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{dx}{dt} = v = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}u \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(2) 取状态变量 $\mathbf{x}_1 = 2\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{v}(\mathbf{t})$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{v}(\mathbf{t})$ [$\mathbf{v} = -\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2$] , 输出为 $\mathbf{x}(\mathbf{t})$, 输入为 $\mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{t})$

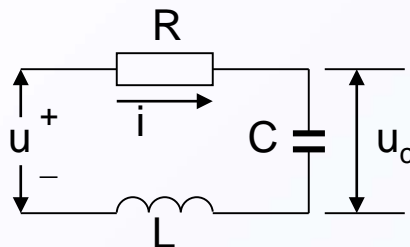
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2\frac{dx}{dt} + \frac{dv}{dt} = 2v + \frac{1}{m}u \\ \dot{x}_2 &= \frac{dx}{dt} + \frac{dv}{dt} = v + \frac{1}{m}u \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/m \\ 1/m \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

可见：状态变量的选取不同，同一系统的状态空间表达式也不同



2.3 系统的状态方程

例题7：下图所示是 **R-L-C** 线性网络电路，**u** 为输入，试建立其状态空间表达式



根据电路原理，很容易建立这个电路系统的微分方程

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_c = u$$

或

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = u$$

$$u_c = \int \frac{i}{C} dt$$

(1) 取状态变量 $\mathbf{x}_1 = u_c$, $\mathbf{x}_2 = i$, 输出为 u_c

$$\dot{x}_1 = \frac{du_c}{dt} = \frac{i}{C} = \frac{1}{C} x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{di}{dt} = -\frac{1}{L} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{L} u$$

$$u_c = x_1$$



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0]$$



2.3 系统的状态方程

(2) 取状态变量 $x_1 = u_c$, $x_2 = du_c/dt$, 输出为 u_c ($\dot{x}_2 = \frac{d^2 u_c}{dt^2} = \frac{1}{C} \frac{di}{dt}$)

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_c = u$$
$$u_c = \int \frac{i}{C} dt$$



$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{LC} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{LC} u$$

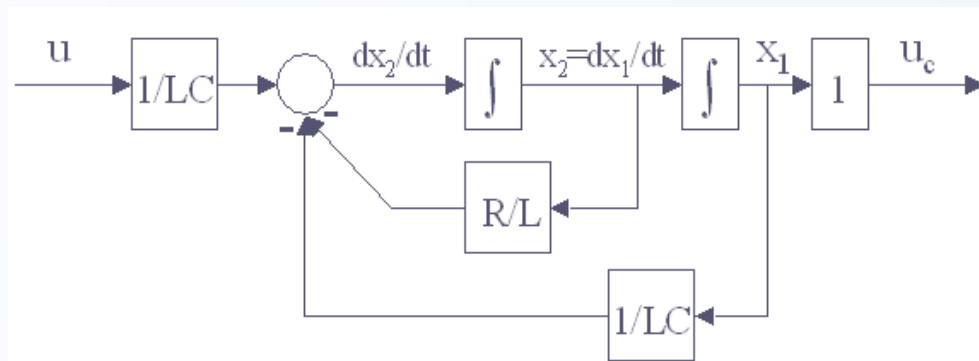
$$u_c = x_1$$



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/LC & -R/L \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/LC \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0]$$



结构图

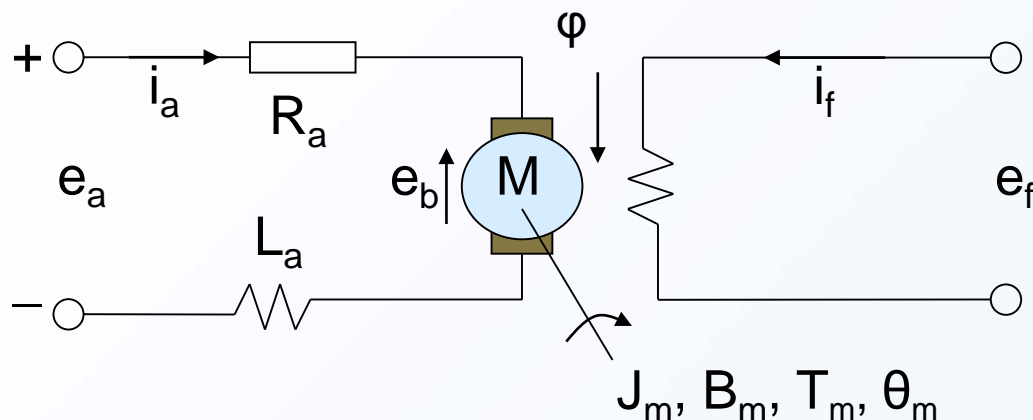


再次看到：同一个系统的状态空间表达式的表现形式与状态变量的选取有关



2.3 系统的状态方程

例题8：下图所示是枢控式控制直流电机原理图，试建立其状态空间表达式



主要参数： e_a —电枢控制电压（系统输入）， R_a —电枢电阻， ϕ —气隙磁通， e_b —反电势， K_b —反电势常数， K_t —转矩常数， i_a —电枢电流， e_f —磁场电压（常数）， i_f —磁场电流(常数)， L_a —电枢绕组电感， T_m —电机产生的转矩， J_m —电机的转子惯量， B_m —粘性系数， θ_m —转子角位移

为了获得线性运行特性，磁场电流必须恒定。若是永磁式，则气隙磁通也是常数。对于电枢控制直流电机可以认为：

(1)

• 转矩与电枢电流成正比，即 $T_m = K_t i_a$

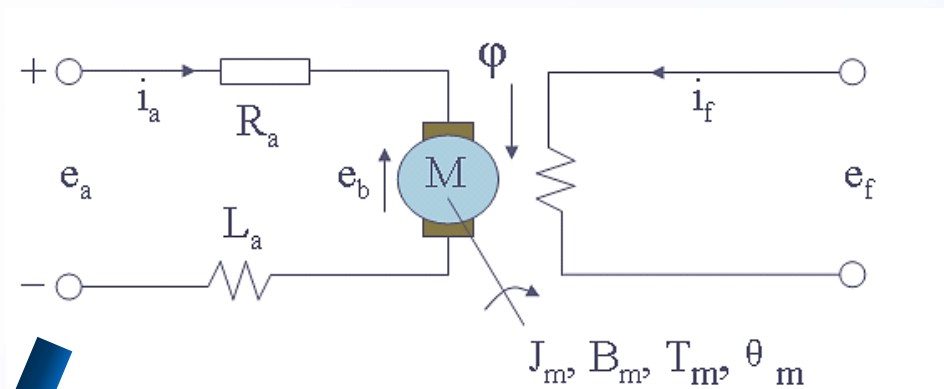
(2)

• 反电势与转速成正比，即 $e_b = K_b \omega_m$



2.3 系统的状态方程

于是, 选取 $\mathbf{x}_1 = i_a$ 、 $\mathbf{x}_2 = \omega_m$ 、 $\mathbf{x}_3 = \theta_m$ 为系统的状态变量, θ_m 为输出时, 有



$$T_m = K_i \cdot i_a \quad e_b = K_b \cdot \omega_m$$

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = e_a - e_b$$

$$J_m \frac{d\omega_m}{dt} + B_m \omega_m = T_m$$

$$\frac{d\theta_m}{dt} = \omega_m$$



$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega}_m \\ \dot{\theta}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & 0 \\ \frac{K_i}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_a$$

$$\theta_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_m \end{bmatrix}$$



2.3 系统的状态方程

(2) 状态空间表达式的一般建立方法

状态空间表达式的表现形式与状态变量的选取有关，由于系统状态变量的选取不是唯一的，那么建立系统的状态空间表达式的方法就有多种，常用的方法就是根据系统的高阶微分方程导出。

设线性系统的高阶微分方程一般表示为：

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = b_mu^{(m)} + \dots + b_1u^{(1)} + b_0u$$

其中的 $y(t)$ 是系统的输出， $u(t)$ 是系统的输入， a_i 和 b_j 是由系统结构确定的系数。

$$y^{(i)} = \frac{d^i y}{dt^i} \quad u^{(j)} = \frac{d^j u}{dt^j}$$

应当指出：

- 系统高阶微分方程必须满足 $n \geq m$ 。这里的 n 就是微分方程的阶数，也就是系统的维数，它表明系统应有 n 个状态变量。



2.3 系统的状态方程

对于 $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = b_mu^{(m)} + \dots + b_1u^{(1)} + b_0u$

选取系统的状态变量为

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = y - \beta_0 u \\ \dot{x}_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\ \dot{x}_3 = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = \dot{x}_{n-2} - \beta_{n-2} u \\ \dot{x}_n = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = y - \beta_0 u \\ \dot{x}_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u = (\dot{y} - \beta_0 \dot{u}) - \beta_1 u \\ \dot{x}_3 = \dot{x}_2 - \beta_2 u = (\ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u}) - \beta_2 u \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = \dot{x}_{n-2} - \beta_{n-2} u = (y^{(n-2)} - \beta_0 u^{(n-2)} - \beta_1 u^{(n-3)} - \dots - \beta_{n-3} u^{(1)}) - \beta_{n-2} u \\ \dot{x}_n = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u = (y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \dots - \beta_{n-2} u^{(1)}) - \beta_{n-1} u \\ \dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n - \beta_n u = (y^{(n)} - \beta_0 u^{(n)} - \beta_1 u^{(n-1)} - \dots - \beta_{n-1} u^{(1)}) - \beta_n u \end{array} \right.$$

和 $\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n - \beta_n u$

其中的 $\beta_i (i=1,2,\dots,n)$ 是待定系数。将各个 $y^{(i)} (i=0,1,2,\dots,n)$ 代入原微分方程，有

$$\begin{aligned} (x_{n+1} + a_{n-1}x_n + \dots + a_0x_1) + \beta_0 u^{(n)} + (a_{n-1}\beta_0 + \beta_1)u^{(n-1)} + \dots + (a_0\beta_0 + a_1\beta_1 + \dots + a_{n-1}\beta_{n-1} + \beta_n)u \\ = b_n u^{(n)} + \dots + b_m u^{(m)} + \dots + b_1 u^{(1)} + b_0 u \end{aligned}$$



2.3 系统的状态方程

待定系数法可求得

$$\beta_0 = b_n$$

$$\beta_1 = b_{n-1} - a_{n-1}\beta_0$$

...

$$\beta_i = b_{n-i} - a_{n-1}\beta_{n-1} - \dots - a_1\beta_1 - a_0\beta_0$$

...

$$\beta_n = b_0 - a_{n-1}\beta_{n-1} - \dots - a_0\beta_0$$

和

$$x_{n+1} = -a_{n-1}x_n - \dots - a_1x_2 - a_0x_1$$

$$x_1 = y - \beta_0 u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - \beta_1 u$$

...

$$\dot{x}_{n-1} = x_{n-2} - \beta_{n-2} u$$

$$\dot{x}_n = x_{n-1} - \beta_{n-1} u$$



$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u$$

...

$$\dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_{n-1} x_n + \beta_n u$$

$$y = x_1 + \beta_0 u$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad D = \beta_0$$

显然, $m=n$ 时, $D \neq 0$

$m < n$ 时, $D = 0$



2.3 系统的状态方程

例题9：已知系统的微分方程为 $y^{(3)} + 5y^{(2)} + 3y^{(1)} + y = 4u^{(1)} + 2u$ ，求此系统的状态空间表达式。

解：对照一般高阶常微分方程，有

$$n=3,$$

$$a_0=1, a_1=3, a_2=5$$

$$b_0=2, b_1=4, b_2=0, b_3=0$$

则有 $\beta_0 = b_3 = 0, \beta_1 = b_2 - a_2\beta_0 = 0, \beta_2 = b_1 - a_2\beta_1 - a_1\beta_0 = 4,$

$$\beta_3 = b_0 - a_2\beta_2 - a_1\beta_1 - a_0\beta_0 = -18$$

所以，系统的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -18 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



2.3 系统的状态方程

应当指出：

微分方程和状态空间表达式都是系统在时域上的数学模型，尽管表现形式有些不同，但它们都反映了系统中变量之间的关系。

- **微分方程**直接反映系统输入量与输出量之间的关系
- **状态空间表达式**通过系统内部状态量将系统输入量与输出量联系起来

可认为，**输入量是系统外部对系统的作用，输出量是系统对外部的作用**。因此，输入量和输出量也称为系统的外部量。系统的状态变量只取决于系统自身的特性，称为系统的内部量。因此，**微分方程是对系统的一种外部描述，状态空间表达式是对系统内部的一种描述**。



2.4 传递函数

(1) 问题的提出

- 微分方程（包括状态方程）的求解在实际应用中不方便或复杂
- 系统性能分析在工程应用上要求分析要简单有效

传递函数是适于简便分析的一种数学模型

建立传递函数的数学基础是拉氏变换，相关的变换查阅教材的附件。对于函数 $\mathbf{f(t)}$ ，

拉氏变换定义

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad \left(s = \sigma + j\omega \quad j = \sqrt{-1} \right)$$

拉氏变换是将时域信号 $\mathbf{f(t)}$ 转换为复域信号 $\mathbf{F(s)}$ 。



2.4 传递函数

例题10：计算指数函数 $f(t)=e^{-at}$ 的拉氏变换， a 为实常数。

解：按照拉氏变换的定义

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt \quad (s = \sigma + j\omega)$$

令 $q = s + a$

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = -\frac{e^{-qt}}{q} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{q} = \frac{1}{s+a}$$

对于复杂的时域函数，一般不依据拉氏变换的定义来直接计算其结果，而是将复杂函数分解为一些基本函数的组合，然后依据基本函数的拉氏变换及拉氏变换性质，就可计算获得复杂函数的拉氏变换结果。**基本函数的拉氏变换结果如教科书中附表2。**



2.4 传递函数

拉氏变换的主要性质见教科书中附表1 ($F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$)

微分性质
$$L\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = s^n F(s) - \underbrace{s^{n-1}f(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)}_{f^{(j)}(0) = \frac{d^j f(t)}{dt^j} \Big|_{t=0}}$$

积分性质
$$L\left(\int_n f(t)dt\right) = \frac{1}{s^n} F(s) + \underbrace{\frac{f^{(-1)}(0)}{s^n} + \frac{f^{(-2)}(0)}{s_{n-1}} + \dots + \frac{f^{(-n)}(0)}{s}}_{f^{(-j)}(0) = \int_j f(t)dt \Big|_{t=0}}$$

延迟性质
$$L(f(t-\tau)) = \int_0^{\infty} f(t-\tau)e^{-st} dt = e^{-\tau s} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = e^{-\tau s} F(s)$$

终值性质
$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

初值性质
$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \\ \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \end{array} \right\} F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$



2.4 传递函数

(2) 传递函数的定义

系统在初始条件为零时，输出的拉氏变换与输入的拉氏变换之比

系统的微分方程一般为 ($y(t)$ 是输出， $u(t)$ 是输入)：

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \end{aligned} \quad \begin{aligned} (m \leq n) \\ \mathbf{n} \text{ 是系统的维数} \end{aligned}$$

在零初始条件下，拉氏变换为 ($s = \sigma + j\omega$)：

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) y(s) = (b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0) u(s)$$

$$\text{传递函数: } G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$



2.4 传递函数

对于多输入多输出线性系统的状态空间表达式

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = CX(t) + Du(t)$$

$$u(t) \in R^r, y(t) \in R^m, X(t) \in R^n$$

拉氏变换



$$sX(s) - X(0) = AX(s) + Bu(s)$$

$$y(s) = CX(s) + Du(s)$$

当系统的初始条件为零时 ($X(0)=0$)，传递函数为

传递函数矩阵: $G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & \dots & g_{1r}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{m1}(s) & \dots & g_{mr}(s) \end{bmatrix}$

传递函数矩阵 $G(s)$ 表示输出向量 $y(s)$ 与输入向量 $u(s)$ 之间的关系，它的每一个元素 $g_{ij}(s)$ 表示第 j 个输入 $u_j(s)$ 对第 i 个输出 $y_i(s)$ 的传递关系。

在一般情况下，多输入多输出系统的每一个输出 $y_i(s)$ 是对所有（或多个）输入响应的叠加，即系统的每一个输出均受到多个（或全部）输入量的控制，这种系统常称为**耦合系统**。



2.4 传递函数

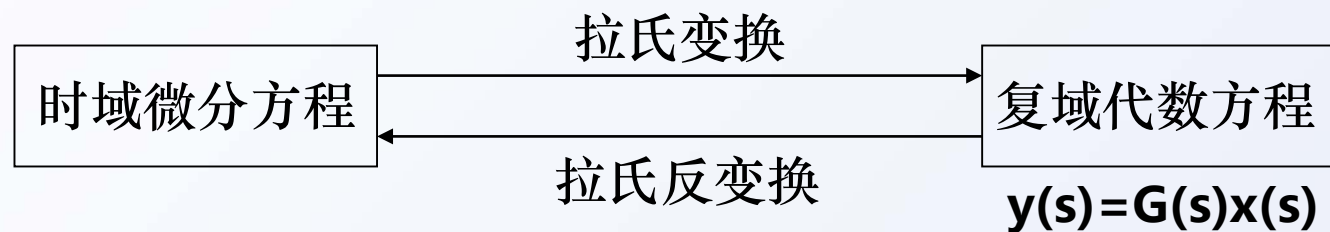
总结: $G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_ms^m + \dots + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$ or $g_{ij}(s) = \frac{y_i(s)}{u_j(s)}$

- 传递函数 $G(s)$ 表示系统的输入/输出关系

系统输入 $u(s)$ 经过 $G(s)$ 的传递产生输出 $y(s)$, 即

$$y(s) = G(s)u(s) \quad \text{或} \quad y_i(s) = g_{ij}(s)u_j(s)$$

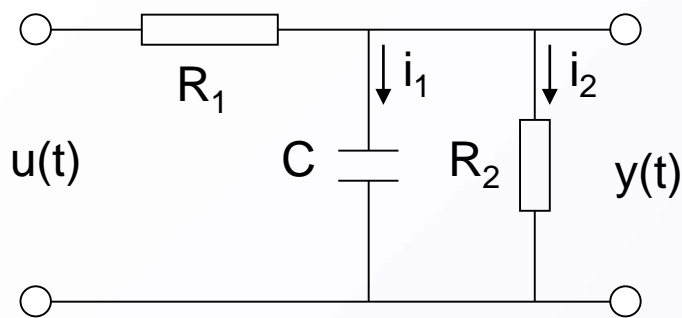
- 传递函数属于系统外部描述, 不反映系统内部变量
- 传递函数 $G(s)$ 是系统性能的复数域表示





2.4 传递函数

例题11：建立下图所示系统的传递函数， $y(t)$ 和 $u(t)$ 分别是系统的输出和输入。



微分
方程

$$u(t) = R_1(i_1(t) + i_2(t)) + R_2 i_2(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{C} \int i_1(t) dt = R_2 i_2(t)$$

拉氏
变换

$$\begin{aligned} u(s) &= R_1(i_1(s) + i_2(s)) + R_2 i_2(s) \\ &= (R_1 + R_2)i_2(s) + R_1 i_1(s) \end{aligned}$$

$$y(s) = \frac{i_1(s)}{Cs} = R_2 i_2(s)$$

消去
中间量

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{R_2}{R_1 R_2 C s + (R_1 + R_2)} = \frac{K}{Ts + 1}$$

$$\left(T = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} \quad K = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$$



2.4 传递函数

(3) 传递函数的特性

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

- 传递函数取决于系统结构及参数，与输入信号的大小和变化形式无关
- 传递函数是关于复变量 s 的有理函数，且分子多项式阶数小于或等于分母多项式阶数，即 $m \leq n$
- 传递函数不能描述非零初始条件的系统。但通过坐标变换可用于初始条件不为零的系统描述



2.4 传递函数

- 传递函数是系统在单位脉冲输入下的复域输出

$$\begin{array}{c} \text{单位脉} \\ \text{冲信号} \end{array} \delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{拉氏变换}} L(\delta(t)) = 1$$

系统输入信号 $u(t)=\delta(t)$ 时,

$$y(s) = G(s)u(s) = G(s)$$

因此，传递函数的逆拉氏变换是系统的单位脉冲输出（响应）

$$L^{-1}(G(s)) = g(t)$$

- 传递函数是单输入/单输出线性定常系统在复域上的数学描述；传递函数矩阵是对多输入/多输出系统在复数域上的数学描述



2.4 传递函数

例题12：系统在零初始条件下，其单位阶跃响应为

$$y(t) = 1(t) - 2e^{-2t} + e^{-t}$$

求系统的传递函数？

单位
信号

$$1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

拉氏变换

$$L[1(t)] = \frac{1}{s} = 1(s)$$

$$y(t) = 1(t) - 2e^{-2t} + e^{-t}$$

拉氏变换

$$y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+1}$$



$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{s^2 + 4s + 2}{s^2 + 3s + 2} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{s^2 + 4s + 2}{s^2 + 3s + 2} \cdot 1(s) \end{aligned}$$

传递函数

$$\frac{y(s)}{1(s)} = \frac{s^2 + 4s + 2}{s^2 + 3s + 2}$$



2.4 传递函数

(4) 传递函数的零极点及其表达形式

$$G(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

分子多项式等于零时的根，即方程

$$b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0 = (s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m) = \prod_{i=1}^m (s + z_i) = 0$$

的根 z_i ($i=1,2,\dots,m$)，称为传递函数的**零点 (或系统零点)**。在零点处，传递函数等于零，或者说**使传递函数为零的 s** ，称为传递函数的**零点 (系统零点)**。

例，若系统的传递函数为 $G(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 2s^2 + s + 2}$ ，使 **$G(s)=0$** ，须

$$s^2 + 3s + 2 = 0 \longrightarrow (s + 1)(s + 2) = 0 \longrightarrow \begin{matrix} z_1 = -1 \\ z_2 = -2 \end{matrix}$$

也就是当 **$s=z_1$ 、 z_2** 时，有 **$G(s)=0$** 。所以， **$z_1=-1$ 、 $z_2=-2$** 是系统的零点。



2.4 传递函数

$$G(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

分母多项式等于零时的根，即方程

$$a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = (s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n) = \prod_{j=1}^n (s + p_j) = 0$$

的根 p_i ($i=1,2,\dots,n$) 称为传递函数的**极点 (或系统极点)**。在极点处，传递函数等于无穷，或者说**使传递函数为无穷的s，称为传递函数的极点 (系统极点)**。

例，若系统的传递函数为 $G(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 2s^2 + s + 2}$ ，使 $G(s) = \infty$ ，须

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0 \longrightarrow (s^2 + 1)(s + 2) = 0 \longrightarrow \begin{matrix} p_1 = -2 \\ p_{2,3} = \pm\sqrt{-1} = \pm j \end{matrix}$$

即当 $s=p_1$ 、 p_2 、 p_3 时有 $G(s) = \infty$ 。所以， $p_1=-1$ 、 $p_{2,3}=\pm j$ 是系统极点。

注意：传递函数的分母多项式也称为系统的**特征多项式**，特征多项式等于零的方程称为系统的**特征方程**，系统特征方程的根 (**特征根**) 就是其极点。



2.4 传递函数

传递函数的一般表达式为

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

因此，若传递函数的所有零点 \mathbf{z}_i 、所有极点 \mathbf{p}_k 都已知，则有

传递函数的零极点表达形式

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{K^* \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{k=1}^n (s + p_k)} \quad \left(K^* = \frac{b_m}{a_n} \right)$$

式中的 \mathbf{z}_i 、 \mathbf{p}_k 是传递函数的零点和极点。一般地，有（ $j = \sqrt{-1}$ ）

$$z_i = \sigma_{zi} + j\omega_{zi} \quad p_k = \sigma_{pk} + j\omega_{pk}$$



2.4 传递函数

- 当 z_i 、 p_k 都为实数时（ $z_i = \sigma_{z_i}$ ， $p_k = \sigma_{p_k}$ ），还可表示为

$$G(s) = \frac{K^* \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{k=1}^n (s + p_k)} = \frac{K^* \prod_{i=1}^m z_i \left(\frac{1}{z_i} s + 1\right)}{\prod_{k=1}^n p_k \left(\frac{1}{p_k} s + 1\right)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{\prod_{k=1}^n (T_k s + 1)}$$

$$K = \frac{K^* \prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{k=1}^n p_k} \quad \tau_i = \frac{1}{z_i} \quad T_k = \frac{1}{p_k}$$

τ_i 、 T_k 是时间常数

- 当 z_i 、 p_k 为零时（ $z_i = p_k = 0$ ， $n > m$ ），可表示为

$$G(s) = \frac{K^* \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{k=1}^n (s + p_k)} = \frac{K^*}{s^{n-m}}$$



2.4 传递函数

- 当 z_i 、 p_k 为复数时，一般呈共轭出现，即

$$z_{i,(i+1)} = \sigma_{zi} \pm j\omega_{zi} \quad p_{k,(k+1)} = \sigma_{pk} \pm j\omega_{pk}$$

此时，传递函数中，呈共轭复数的项可表示为

$$\begin{aligned} \frac{(s + \sigma_z + j\omega_z)(s + \sigma_z - j\omega_z)}{(s + \sigma_p + j\omega_p)(s + \sigma_p - j\omega_p)} &= \frac{s^2 + 2\sigma_z s + \sigma_z^2 + \omega_z^2}{s^2 + 2\sigma_p s + \sigma_p^2 + \omega_p^2} \\ &= \frac{\sigma_z^2 + \omega_z^2}{\sigma_p^2 + \omega_p^2} \frac{\frac{1}{\sigma_z^2 + \omega_z^2} s^2 + 2\frac{\sigma_z}{\sigma_z^2 + \omega_z^2} s + 1}{\frac{1}{\sigma_p^2 + \omega_p^2} s^2 + 2\frac{\sigma_p}{\sigma_p^2 + \omega_p^2} s + 1} = \left(\frac{\sigma_z^2 + \omega_z^2}{\sigma_p^2 + \omega_p^2} \right) \frac{\tau^2 s^2 + 2\zeta_z \tau s + 1}{T^2 s^2 + 2\zeta_p T s + 1} \\ \tau &= \frac{1}{\sqrt{\sigma_z^2 + \omega_z^2}} \quad T = \frac{1}{\sqrt{\sigma_p^2 + \omega_p^2}} \quad \zeta_{z,p} = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} < 1 \end{aligned}$$

τ_i 、 T_k 是时间常数， $\zeta_{z,p}$ 是阻尼系数



2.4 传递函数

传递函数的时间常数表达形式 ($m_1 + 2m_2 = m$, $v + n_1 + 2n_2 = n$)

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{K \prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{l=1}^{m_2} (\tau_l^2 s^2 + 2\zeta_l \tau_l s + 1)}{s^v \prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{k=1}^{n_2} (T_k^2 s^2 + 2\zeta_k T_k s + 1)}$$

τ 、 T 是时间常数， ζ 是阻尼系数

以上对传递函数零极点的分析看到：

- 任何线性定常系统的传递函数都可以分解成零极点表示式或时间常数表示式。这为系统分类及其分析提供了便利！



2.4 传递函数

(5) 系统的典型环节及其传递函数

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{K_0 \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{k=1}^n (s + p_k)} = \frac{K \prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{l=1}^{m_2} (\tau_l^2 s^2 + 2\zeta_l \tau_l s + 1)}{s^v \prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{k=1}^{n_2} (T_k^2 s^2 + 2\zeta_k T_k s + 1)}$$

传递函数的零点、极点不外乎处于复平面的**实轴上（实根）**、**原点（零根）**、**复平面上（共轭复根）**。因此，n阶系统传递函数的时间常数形式又可表示为

$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{l=1}^{m_2} (\tau_l^2 s^2 + 2\zeta_l \tau_l s + 1)}{s^v \prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{k=1}^{n_2} (T_k^2 s^2 + 2\zeta_k T_k s + 1)} \quad \begin{pmatrix} m_1 + 2m_2 = m \\ v + n_1 + 2n_2 = n \end{pmatrix}$$

可认为系统是由一些典型形式（环节）组成



2.4 传递函数

系统典型环节及其传递函数是：（**环节：其输入与输出之间存在特定运算关系的部分**）

比例环节	$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = K$	$y(t) = Ku(t)$
积分环节	$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s}$	$y(t) = \int u(t)dt$
惯性环节	$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$	$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$
振荡环节	$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$	$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$
一阶微分环节	$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \tau s + 1$	$y(t) = \tau \frac{du(t)}{dt} + u(t)$
二阶微分环节	$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1$	$y(t) = \tau^2 \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + 2\zeta \tau \frac{du(t)}{dt} + u(t)$



2.4 传递函数

应当指出：

(a) 实际传递函数的分子多项式阶数不大于分母多项式的阶数。

因此，一阶和二阶微分环节的传递函数是理想形式。实际一阶微分环节的传递函数一般为

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} \quad (T_1 > T_2, \quad T_2 \ll 1)$$

(b) 实际传递函数一般还包含滞后环节，其形式为 (τ 为滞后时间)

$$\frac{y(s)}{u(s)} = e^{-\tau s} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{aligned} y(t) &= u(t - \tau) \\ y(t + \tau) &= u(t) \end{aligned}$$

(c) 典型环节是按传递函数中的运算特征划分的，与系统中的实际部件未必对应



2.4 传递函数

例题13：系统传递函数为

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{10(s+1)^2 e^{-s}}{s(s^2 + 3s + 1)}$$

分析该系统的典型环节。

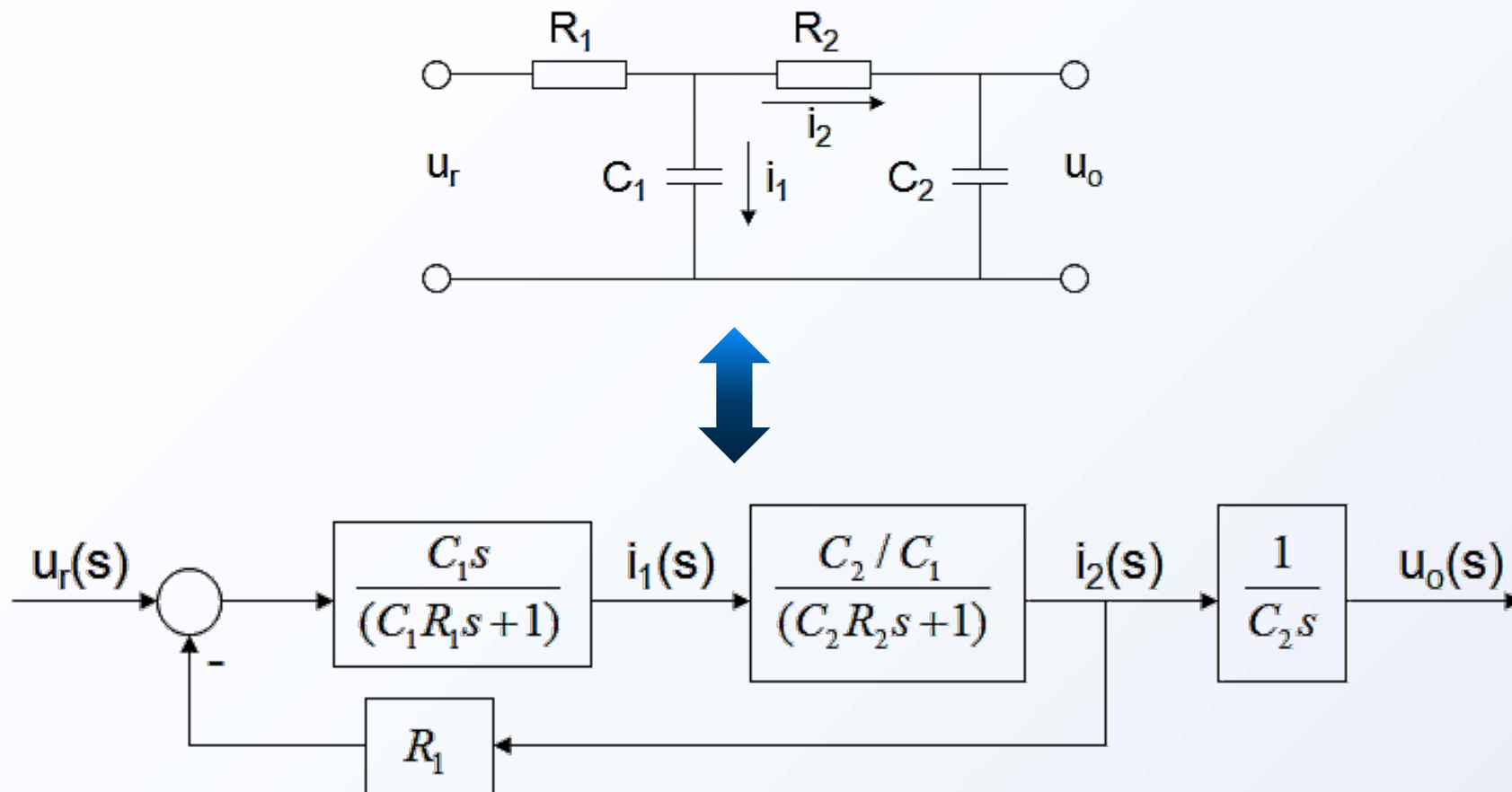
$$\begin{aligned} \frac{y(s)}{u(s)} &= \frac{y(s)}{y_1(s)} \frac{y_1(s)}{y_2(s)} \frac{y_2(s)}{y_3(s)} \frac{y_3(s)}{y_4(s)} \frac{y_4(s)}{y_5(s)} \frac{y_5(s)}{u(s)} \\ &= 10 \cdot \frac{1}{s} \cdot (s+1) \cdot (s+1) \cdot \frac{1}{s^2 + 3s + 1} \cdot e^{-s} \end{aligned}$$

$$\frac{y(s)}{y_1(s)} = 10 \quad \frac{y_1(s)}{y_2(s)} = \frac{1}{s} \quad \frac{y_2(s)}{y_3(s)} = (s+1) \quad \frac{y_3(s)}{y_4(s)} = (s+1) \quad \frac{y_4(s)}{y_5(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 1} \quad \frac{y_5(s)}{u(s)} = e^{-s}$$



2.5 系统的方框图及其变换

方框图：表示系统内各环节的信号传递关系，也是系统数学模型

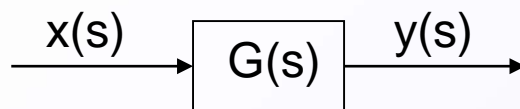




2.5 系统的方框图及其变换

(1) 方框图的基本构成要素

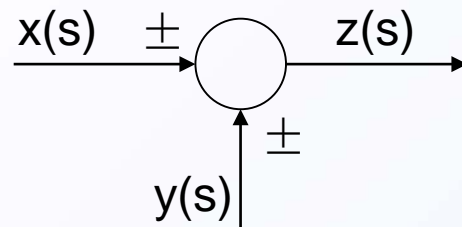
环节方框



传递
关系

$$y(s) = G(s)x(s)$$

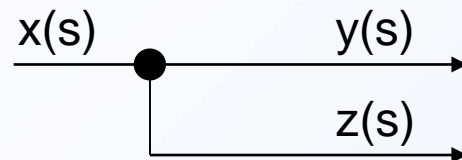
比较点



传递
关系

$$z(s) = \pm x(s) \pm y(s)$$

引出点



传递
关系

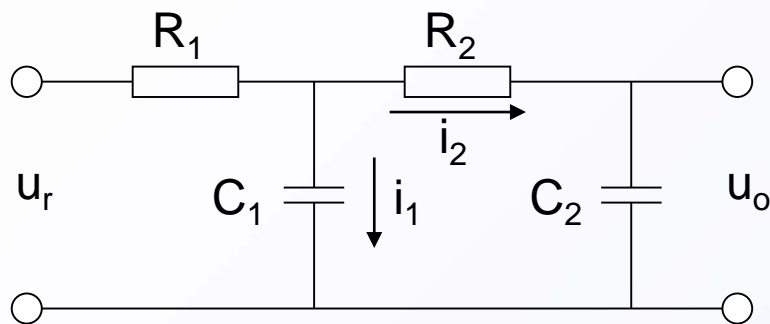
$$y(s) = z(s) = x(s)$$



2.5 系统的方框图及其变换

(2) 方框图的建立

例题14：绘制下图所示电路系统的方框图。



(1) 列出系统中的运动微分方程

$$\frac{1}{C_1} \int i_1 dt + (i_1 + i_2) R_1 = u_r$$

$$\frac{1}{C_2} \int i_2 dt + i_2 R_2 = \frac{1}{C_1} \int i_1 dt$$

$$u_o = \frac{1}{C_2} \int i_2 dt$$





2.5 系统的方框图及其变换

(2) 对各运动微分方程进行拉氏变换

$$\frac{1}{C_1} \int i_1 dt + (i_1 + i_2)R_1 = u_r$$

$$\frac{1}{C_2} \int i_2 dt + i_2 R_2 = \frac{1}{C_1} \int i_1 dt$$

$$u_o = \frac{1}{C_2} \int i_2 dt$$

拉氏变换

$$i_1(s) = \frac{C_1 s}{(C_1 R_1 s + 1)} (u_r(s) - R_1 i_2(s))$$

$$i_2(s) = \frac{C_2 / C_1}{(C_2 R_2 s + 1)} i_1(s)$$

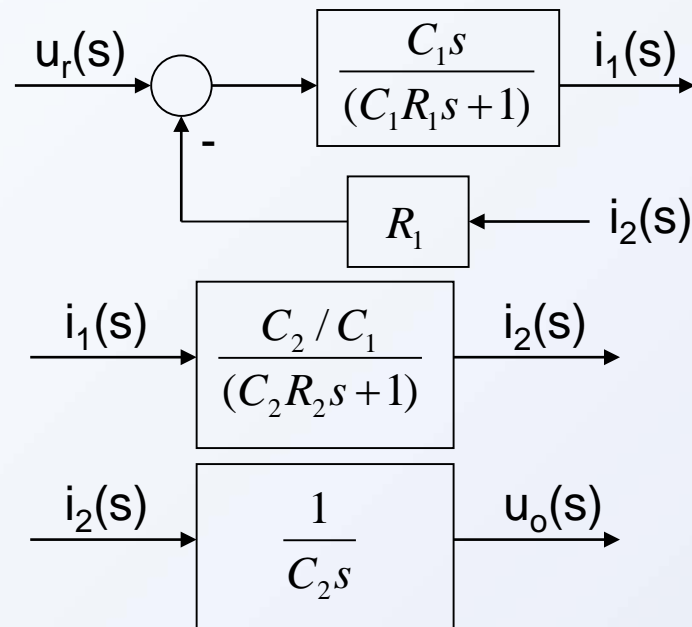
$$u_o = \frac{1}{C_2 s} i_2(s)$$

(3) 绘制每个代数方程的方框图

$$i_1(s) = \frac{C_1 s}{(C_1 R_1 s + 1)} (u_r(s) - R_1 i_2(s))$$

$$i_2(s) = \frac{C_2 / C_1}{(C_2 R_2 s + 1)} i_1(s)$$

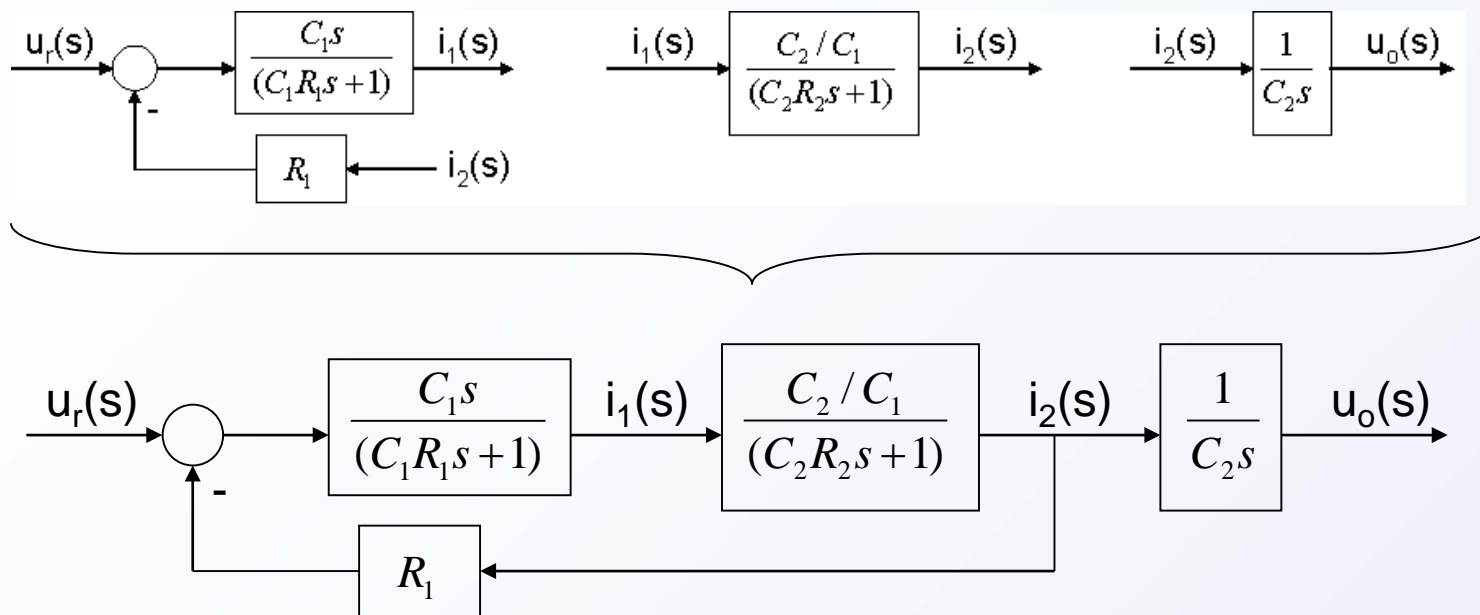
$$u_o = \frac{1}{C_2 s} i_2(s)$$





2.5 系统的方框图及其变换

- (4) 根据信号流向，将各个方框图连接起来，并将系统输入量置于系统方框图的最左边，输出量置于最右边

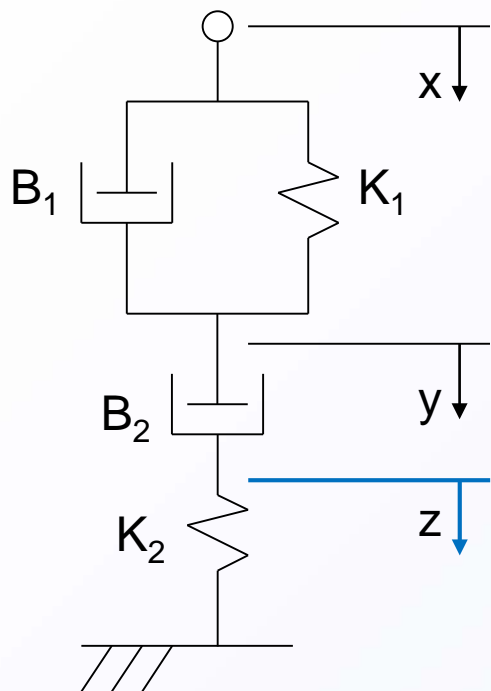


显然，系统的方框图反映了系统中信号的传递关系。根据这种关系，按照方框图的运算规则就可获得系统（方框图）中（任意）两个信号之间的传递函数。



2.5 系统的方框图及其变换

例题15：绘制下图所示机械系统的方框图。



(1) 列出系统中的运动微分方程

$$B_1 \frac{d(x-y)}{dt} + K_1(x-y) = B_2 \frac{d(y-z)}{dt}$$

$$B_2 \frac{d(y-z)}{dt} = K_2 z$$

(2) 对各运动微分方程进行拉氏变换

$$z(s) = \frac{(B_1 s + K_1)x(s) - [(B_1 + B_2)s + K_1]y(s)}{B_2 s}$$

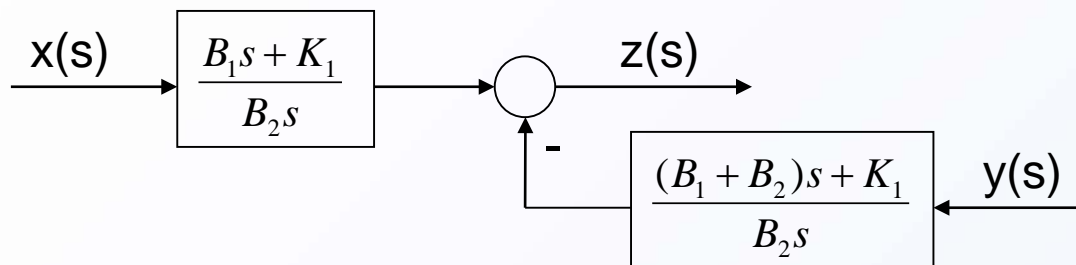
$$y(s) = \frac{B_2 s + K_2}{B_2 s} z(s)$$



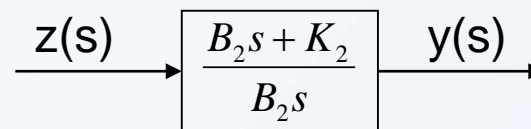
2.5 系统的方框图及其变换

(3) 绘制每个代数方程的方框图

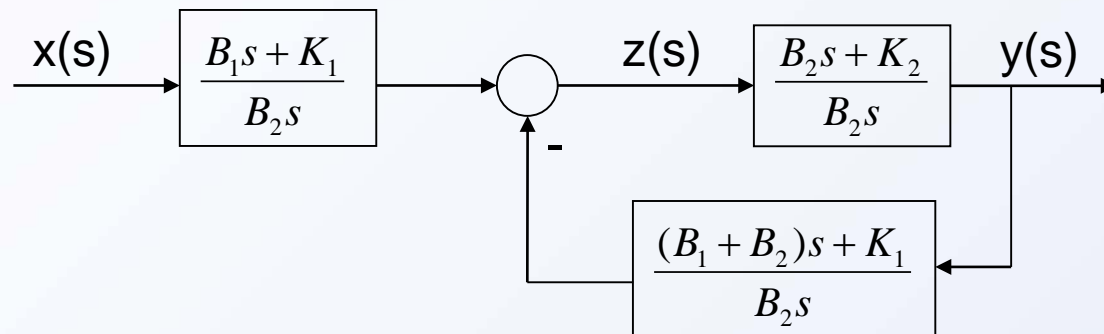
$$z(s) = \frac{(B_1s + K_1)x(s) - [(B_1 + B_2)s + K_1]y(s)}{B_2s}$$



$$y(s) = \frac{B_2s + K_2}{B_2s} z(s)$$



(4) 根据信号流向，将各个方框图连接起来，并将系统输入量置于系统方框图的最左边，输出量置于最右边

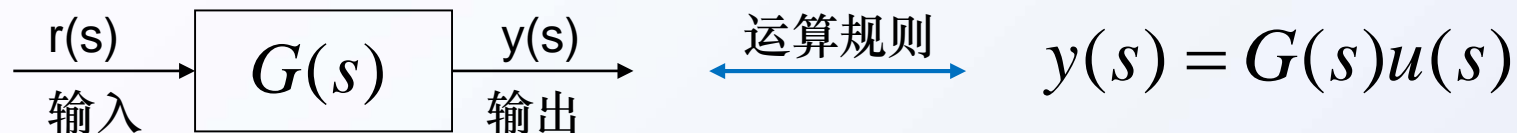
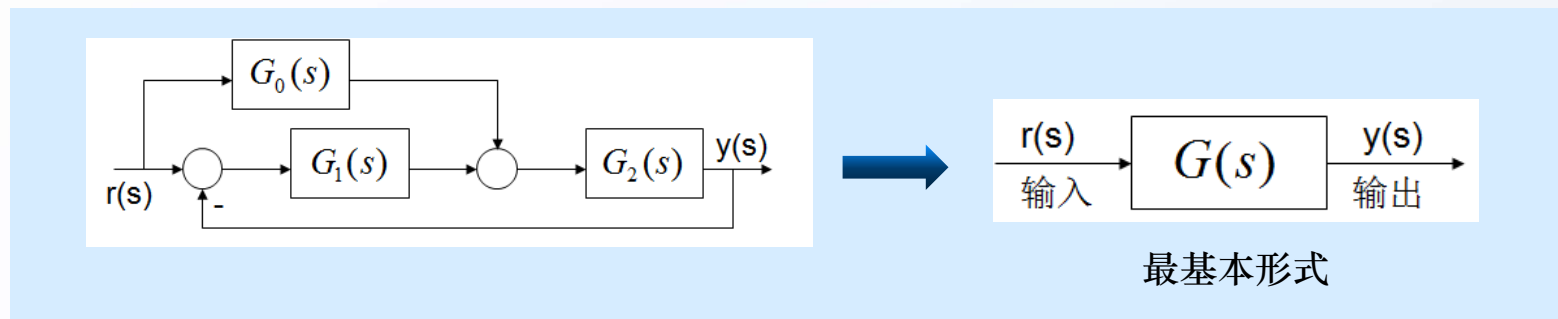




2.5 系统的方框图及其变换

(3) 系统方框图的等效变换

为了计算系统（方框图）中某两个信号之间的传递关系，有时需将这两个信号作为系统的输入和输出，重新整合和调整方框图，并使系统在这种输入和输出下的方框图变换为最基本的形式。



等效变换的原则

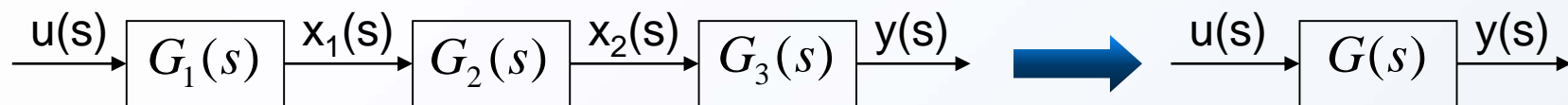
- 变换前后信号之间的传递关系不变



2.5 系统的方框图及其变换

按照等效变换的原则，**方框图的基本运算规则**是：

- 串联连接的运算规则**



$$x_1(s) = G_1(s)u(s)$$

$$x_2(s) = G_2(s)x_1(s) \quad \longrightarrow \quad \frac{y(s)}{u(s)} = G_3(s)G_2(s)G_1(s) \quad \longrightarrow \quad G(s) = G_3(s)G_2(s)G_1(s)$$

$$y(s) = G_3(s)x_2(s)$$

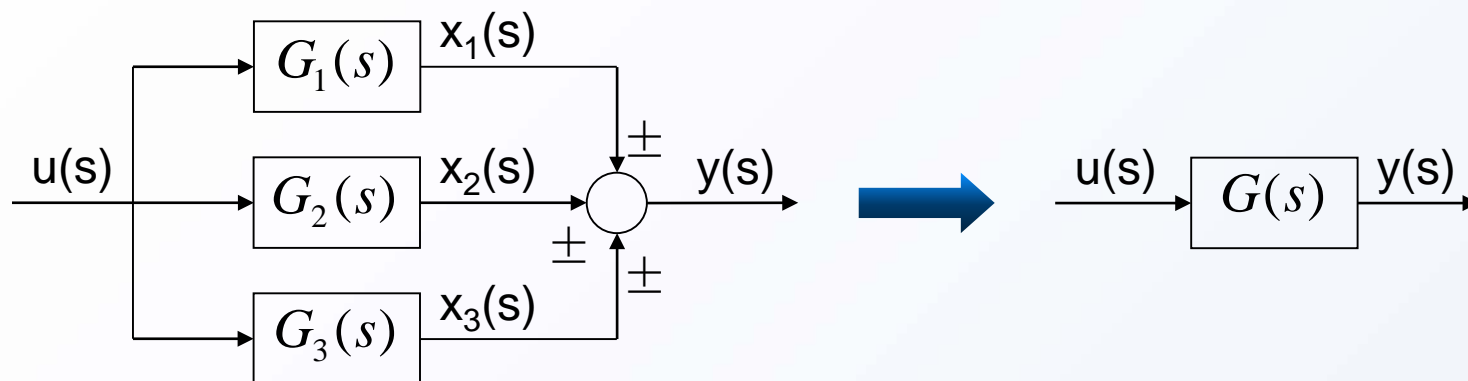
串联连接的等效传递函数等于各串联环节传递函数的乘积

$$G(s) = G_3(s)G_2(s)G_1(s)$$



2.5 系统的方框图及其变换

• 并联连接的运算规则



$$x_1(s) = G_1(s)u(s)$$

$$x_2(s) = G_2(s)u(s)$$

$$x_3(s) = G_3(s)u(s)$$

$$y(s) = \pm x_1(s) \pm x_2(s) \pm x_3(s)$$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s)$$

$$= \pm G_1(s) \pm G_2(s) \pm G_3(s)$$

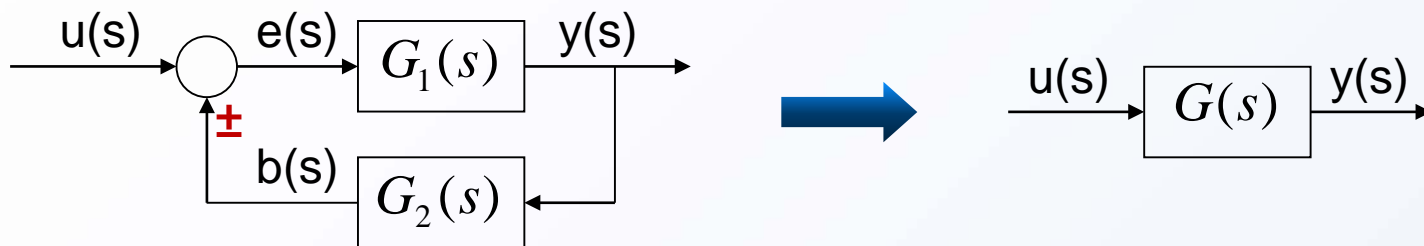
并联连接的等效传递函数等于各并联环节传递函数的代数和

$$G(s) = \pm G_1(s) \pm G_2(s) \pm G_3(s)$$



2.5 系统的方框图及其变换

• 反馈连接的运算规则



$$y(s) = G_1(s)e(s)$$

$$e(s) = u(s) \pm b(s)$$

$$b(s) = G_2(s)y(s)$$



$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s)G_2(s)}$$

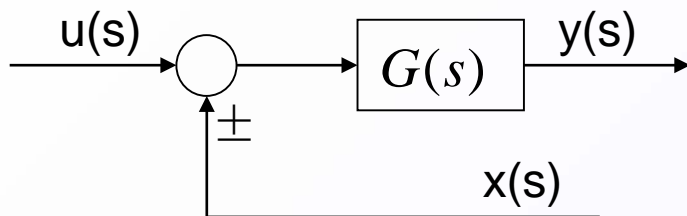
反馈连接的等效传递函数为

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s)G_2(s)}$$

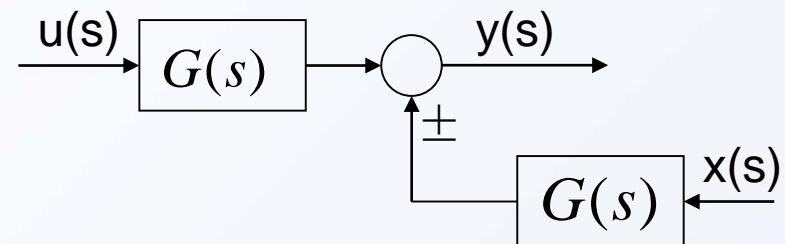


2.5 系统的方框图及其变换

比较点移动的运算规则

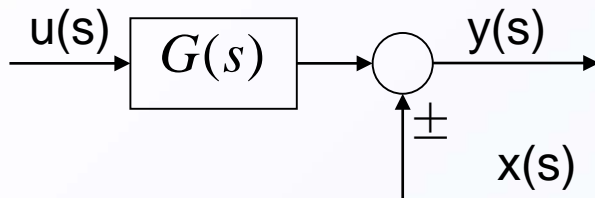


后移

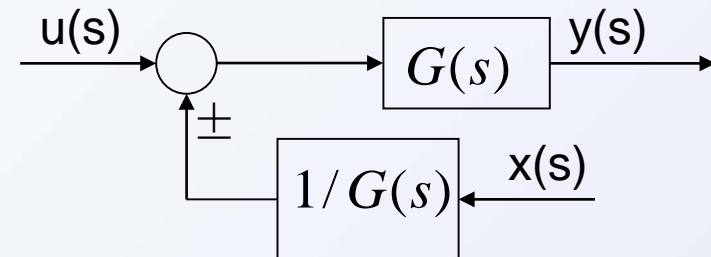


$$y(s) = G(s)[u(s) \pm x(s)]$$

$$y(s) = G(s)u(s) \pm G(s)x(s)$$



前移



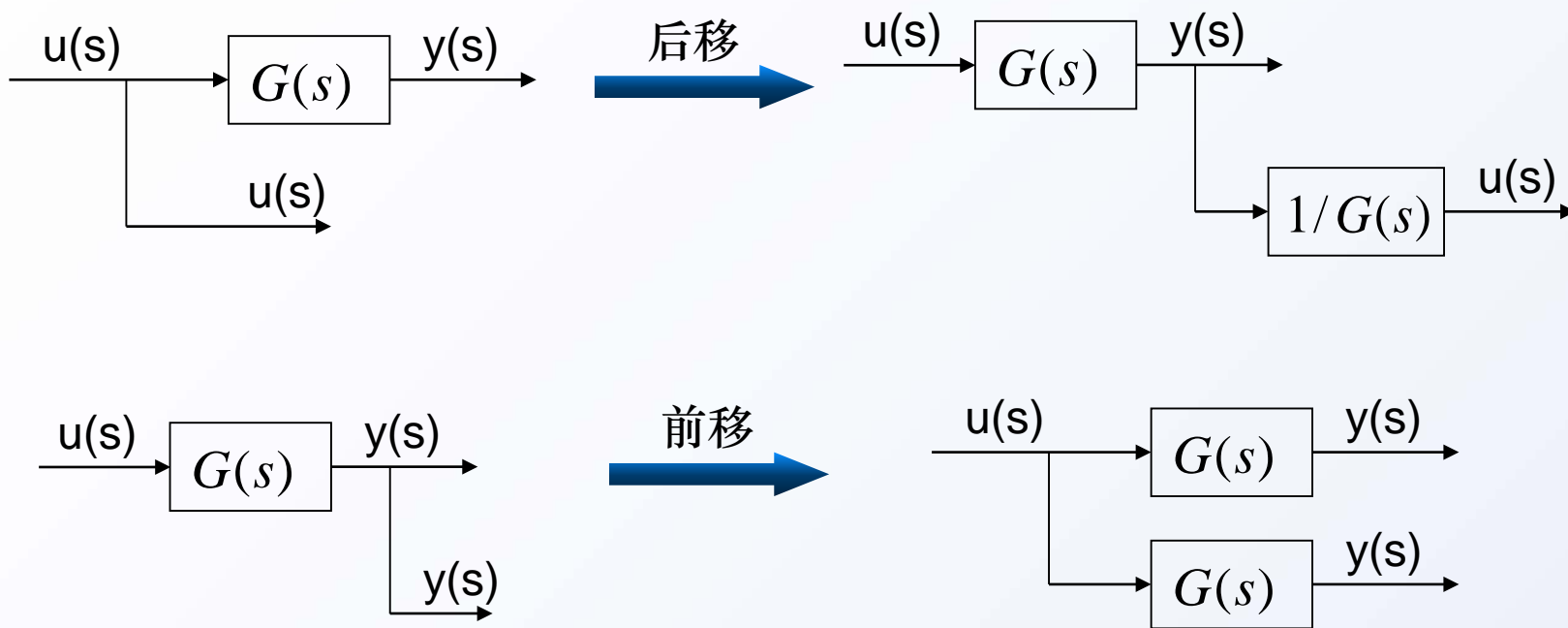
$$y(s) = G(s)u(s) \pm x(s)$$

$$y(s) = G(s)[u(s) \pm \frac{1}{G(s)}x(s)]$$



2.5 系统的方框图及其变换

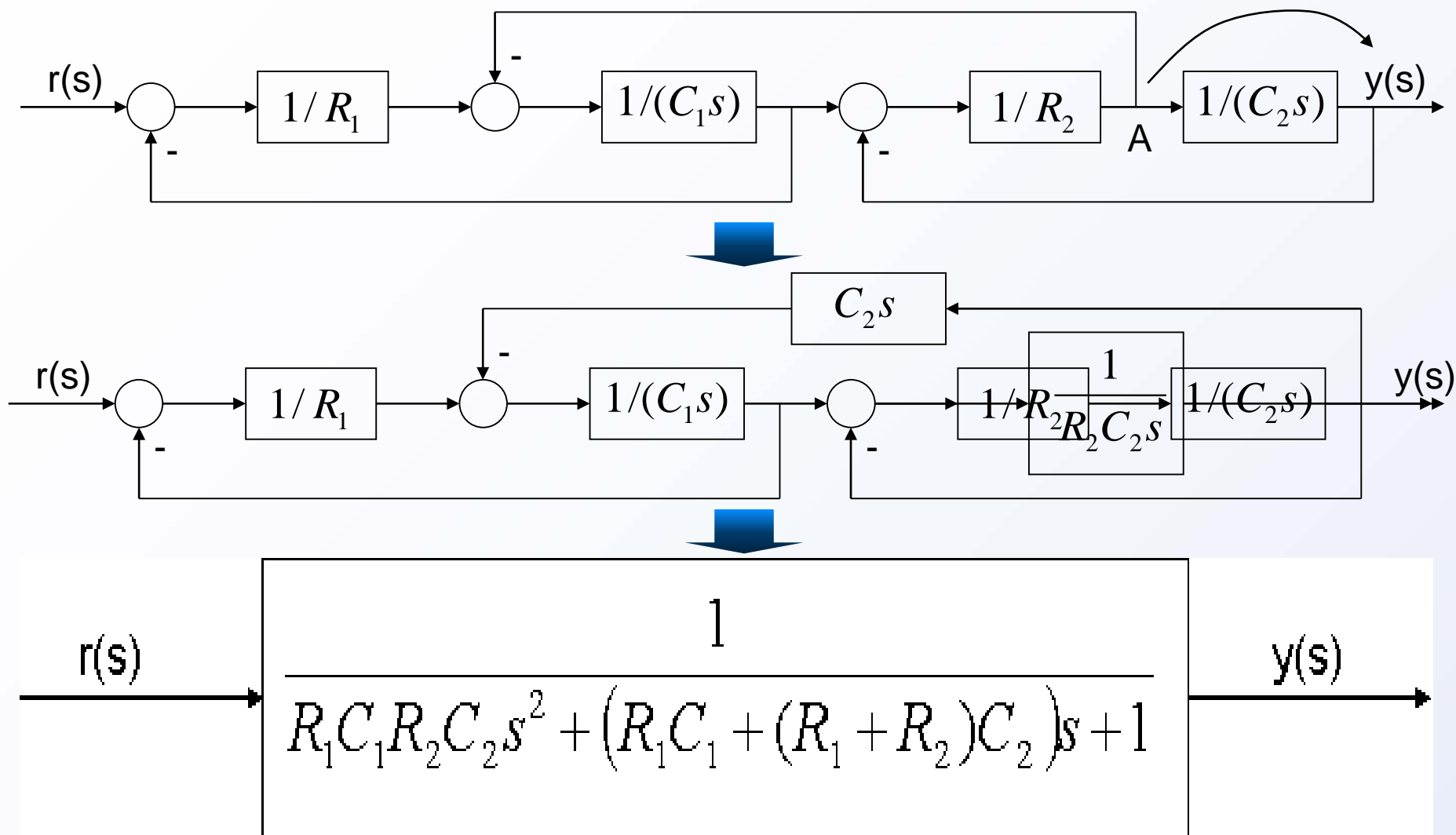
- 引出点移动的运算规则



引出点移动前后，各个信号线上的信号保持不变



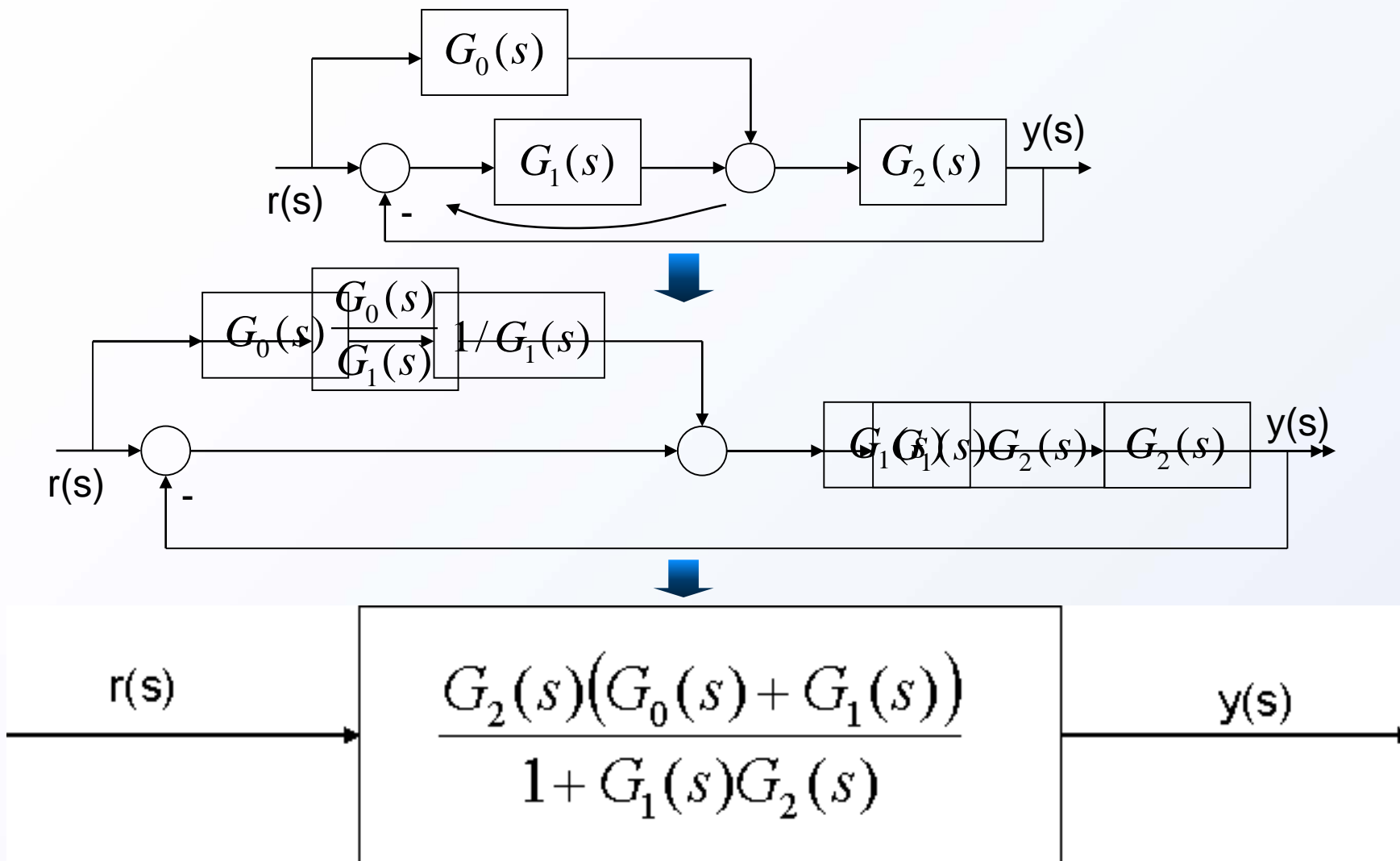
2.5 系统的方框图及其变换





2.5 系统的方框图及其变换

例题17：应用方框图等效变换，求下图所示系统的传递函数。





2.5 系统的方框图及其变换

(4) 基于系统方框图的梅逊公式

在系统方框图很复杂时，通过系统方框图变换的方法来求取传递函数的工作量很大。梅逊（**Mason**）基于系统的信号流图提出了直接计算系统传递函数的方法，称为梅逊公式。

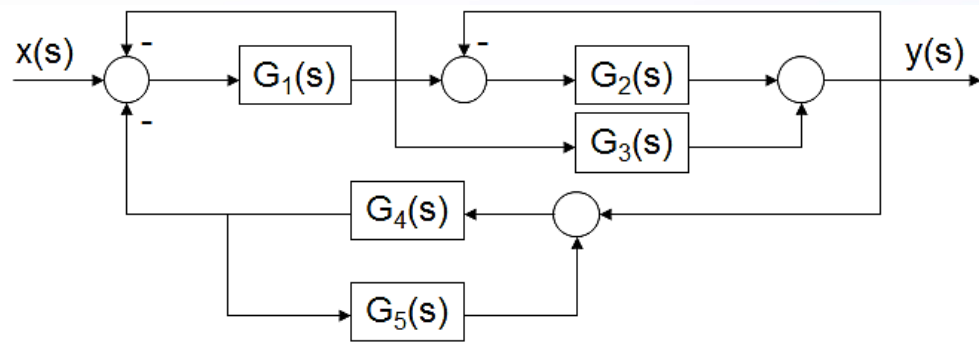
由于系统的信号流图与方框图存在完全对应的关系。因此，梅逊公式可直接用于系统方框图中任意两变量之间的传递函数计算。





2.5 系统的方框图及其变换

基本概念



前向通道：从 $x(s)$ 到 $y(s)$ 沿箭头方向行走，且在比较点只通过一次的一条通路

$$G_1(s) \rightarrow G_2(s), \quad G_1(s) \rightarrow G_3(s)$$

回路：沿箭头方向行走，且在比较点只通过一次的一条闭合通路

回路传递函数：回路上所有传递函数的乘积，且回路中比较点上的反馈是负反馈，否则每有一个正反馈，就乘以一个 (-1)

$$G_1(s), \quad G_2(s), \quad G_4(s) \rightarrow G_5(s), \quad G_1(s) \rightarrow G_2(s) \rightarrow G_4(s) \quad G_1(s) \rightarrow G_3(s) \rightarrow G_4(s)$$

$$G_1(s), \quad G_2(s), \quad -G_4(s)G_5(s), \quad G_1(s)G_2(s)G_4(s) \quad G_1(s)G_3(s)G_4(s)$$

互不接触回路：指回路不经过相同的方框和比较点。 $G_1(s), \quad G_2(s), \quad G_4(s) \rightarrow G_5(s)$



2.5 系统的方框图及其变换

梅逊公式:
$$\Phi(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{1}{\Delta(s)} \sum_{k=1}^N (Q_k(s) \cdot \Delta_k(s))$$

$\Phi(s)$ ——系统方框图中从 $x(s)$ 到 $y(s)$ 之间的传递函数

N ——系统方框图中从 $x(s)$ 到 $y(s)$ 的前向通道的个数

$Q_k(s)$ ——系统方框图中从 $x(s)$ 到 $y(s)$ 的第 k 各前向通道上的传递函数

$$\Delta(s) = 1 + N_1(s) + N_2(s) + N_3(s) + \dots$$

$N_1(s)$: 所有不同回路传递函数之和

$N_2(s)$: 所有每二个互不接触回路传递函数之和

$N_3(s)$: 所有每三个互不接触回路传递函数之和

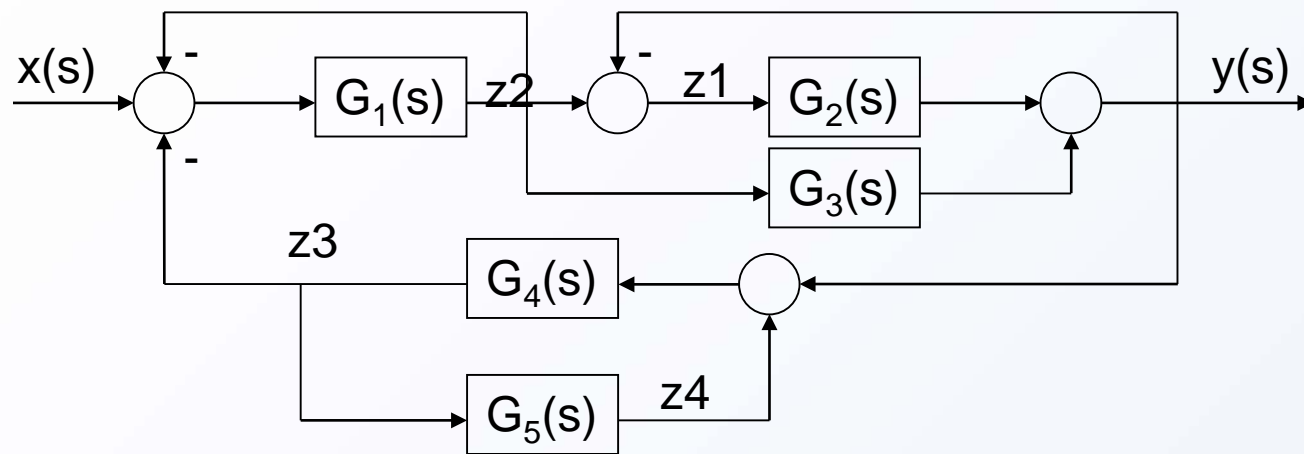
$\Delta_k(s)$ —— $\Delta(s)$ 中将所有与前向通道 $Q_k(s)$ 相接触的诸回路的传递函数置零后所得的关于 s 的表达式





2.5 系统的方框图及其变换

例题18：已知系统方框图如下，计算其 $x(s)$ 到 $y(s)$ 的传递函数。



解: (1) 有**2**条前向通道 (**N=2**) : $Q_1(s) = G_1G_2$ $Q_2(s) = G_1G_3$

(2) 有**5**条回路，各回路传递函数:

$$L_1 = G_1 \quad L_2 = G_2 \quad L_3 = -G_4G_5 \quad L_4 = G_1G_2G_4 \quad L_5 = G_1G_3G_4$$

(3) **L₁、L₂、L₃**是互不接触回路，则有:

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= 1 + N_1 + N_2 + N_3 = 1 + (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5) + (L_1L_2 + L_2L_3 + L_1L_3) + L_1L_2L_3 \\ &= 1 + G_1 + G_3 - G_4G_5 + G_1G_2G_4 + G_1G_3G_4 + G_1G_2 - G_2G_4G_5 - G_1G_4G_5 - G_1G_2G_4G_5 \end{aligned}$$



2.5 系统的方框图及其变换

(4) 二条前向通道只与回路 L_3 是互不接触，则有：

$$\Delta_1(s) = \Delta_2(s) = 1 + L_3 = 1 - G_4 G_5$$

所以，从 $x(s)$ 到 $y(s)$ 的传递函数为

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{1}{\Delta(s)} [Q_1 \Delta_1 + Q_2 \Delta_2] \\ &= \frac{G_1 G_2 (1 - G_4 G_5) + G_1 G_3 (1 - G_4 G_5)}{1 + G_1 + G_2 - G_4 G_5 + G_1 G_2 G_4 + G_1 G_3 G_4 + G_1 G_2 - G_2 G_4 G_5 - G_1 G_4 G_5 - G_1 G_2 G_3 G_5}\end{aligned}$$

应当指出：



①

• 梅逊公式的应用需要准确判断前向通道、回路和互不接触回路，这是一项仔细的工作，稍有疏忽就易出错

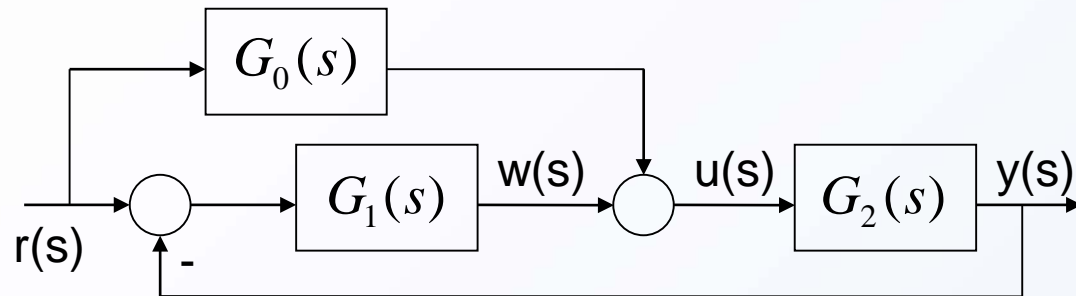
②

• 所判断的前向通道数、回路数和互不接触回路，既不能多也不能少



2.5 系统的方框图及其变换

例题19：应用方框图的计算关系，求 $y(s)/r(s)$ 、 $u(s)/r(s)$ 、 $w(s)/r(s)$ 。



解：按照方框图的运算关系，有

$$y(s) = G_2 u(s) \quad (a)$$

$$u(s) = w(s) + G_0 r(s) \quad (b)$$

$$w(s) = G_1 (r(s) - y(s)) \quad (c)$$

(b) 中的 $u(s)$ 代入 (a) 中，计算出的 $w(s)$ 代入 (c) 中，得到

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G_2 (G_1 + G_0)}{1 + G_1 G_2}$$

(a) 中的 $y(s)$ 代入 (c) 中，计算出的 $w(s)$ 代入 (b) 中，得到

$$\frac{u(s)}{r(s)} = \frac{G_1 + G_0}{1 + G_1 G_2}$$

(b) 中的 $u(s)$ 代入 (a) 中，计算出的 $y(s)$ 代入 (c) 中，得到

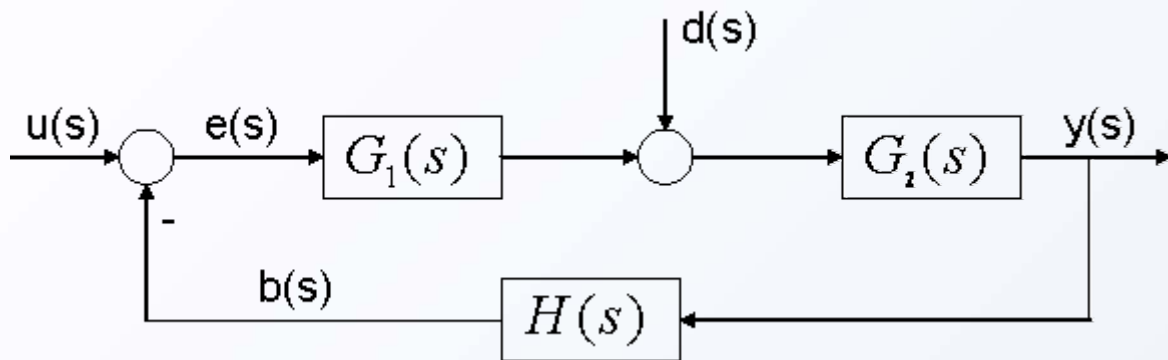
$$\frac{w(s)}{r(s)} = \frac{G_1 (1 - G_2 G_0)}{1 + G_1 G_2}$$



2.6 控制系统的传递函数

方框图是系统数学模型的一种形式，应用方框图可以方便的计算系统中两个量之间的传递关系——传递函数。

控制系统的典型方框图是



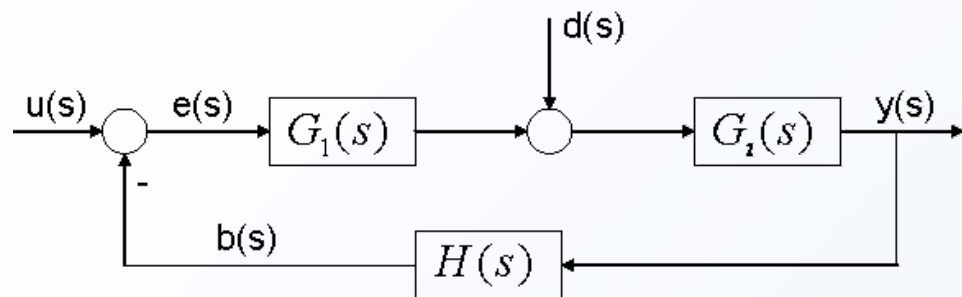
$u(s)$ 是参考输入； $d(s)$ 是干扰输入； $e(s)$ 是偏差信号； $y(s)$ 是系统输出

系统的**偏差信号**定义为参考输入信号与反馈信号之差，即

$$e(s) = u(s) - b(s)$$



2.6 控制系统的传递函数



对于典型方框图，定义：

控制系统的前向通道

• 从输入到输出的信号通路

控制系统的反馈通道

• 从输出到输入比较点处的信号通道

$G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 是从输入 $u(s)$ 到输出 $y(s)$ 前向通道上的传递函数；

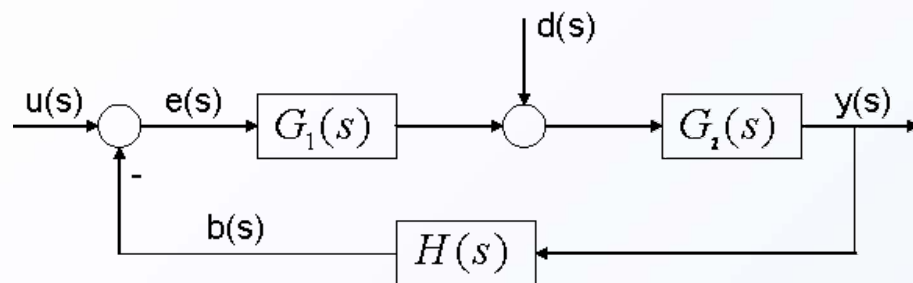
$G_2(s)$ 是从输入 $d(s)$ 到输出 $y(s)$ 前向通道上的传递函数

$H(s)$ 是以 $u(s)$ 为输入、 $y(s)$ 为输出的反馈通道上的传递函数。若 $H(s)=1$ ，就称为**单位反馈**。

$G_1(s)$ 和 $H(s)$ 是以 $d(s)$ 为输入、 $y(s)$ 为输出的反馈通道上的传递函数



2.6 控制系统的传递函数



按照方框图的计算规则，有

$$y(s) = G_2(s)[d(s) + G_1(s)e(s)] \quad e(s) = u(s) - b(s) \quad b(s) = H(s)y(s)$$

即

$$y(s) = G_2(s)[d(s) + G_1(s)(u(s) - H(s)y(s))]$$

$$e(s) = u(s) - H(s)[G_2(s)(d(s) + G_1(s)e(s))]$$

$$y(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}u(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}d(s)$$

$$e(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}u(s) - \frac{H(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}d(s)$$



2.6 控制系统的传递函数

对于控制系统的典型方框图，几种常用传递函数定义为：

闭环传递函数——反馈控制系统的输出与输入之间的传递函数

参考输入下的闭环传递函数
($d(s)=0$)

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

干扰输入下的闭环传递函数
($u(s)=0$)

$$\frac{y(s)}{d(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

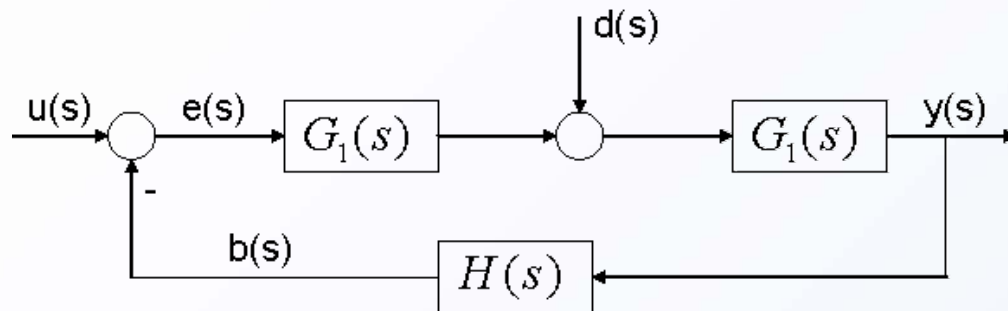
注意：

- 这两种传递函数的分母多项式一样！





2.6 控制系统的传递函数



偏差（误差）闭环传递函数——反馈控制系统的偏差与输入之间的传递函数

参考输入下的偏差闭环传递函数
($d(s)=0$)

$$\frac{e(s)}{u(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

干扰输入下的偏差闭环传递函数
($u(s)=0$)

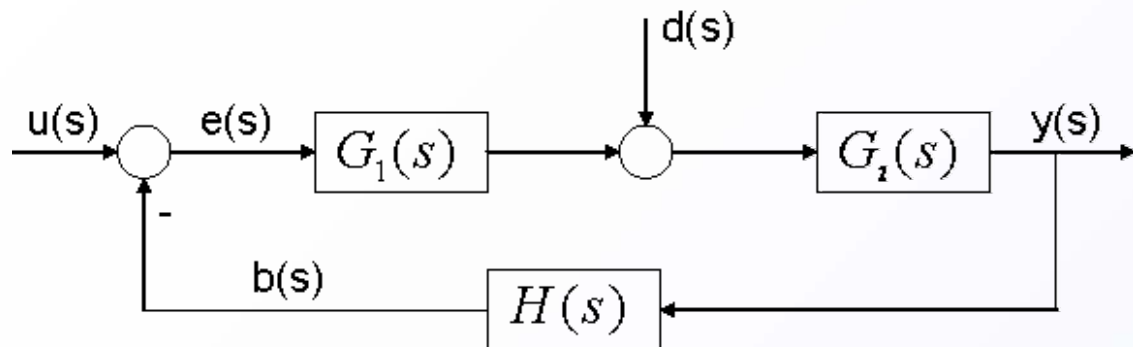
$$\frac{e(s)}{d(s)} = \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

注意：

- 这两种传递函数与前两种传递函数的分母多项式一样！



2.6 控制系统的传递函数



开环传递函数——不考虑系统的外界输入信号时，系统的反馈信号与偏差信号之比的传递函数，即（此时从 $\mathbf{e(s)}$ 到 $\mathbf{b(s)}$ 是开环关系）

$$\frac{b(s)}{e(s)} = G(s)_1 G_2(s) H(s)$$

注意：

- 闭环传递函数的分母多项式均为：**1+开环传递函数**。这个分母多项式也称为闭环系统的**特征多项式**。

线性系统在参考输入和干扰输入共同作用下的输出和偏差为：

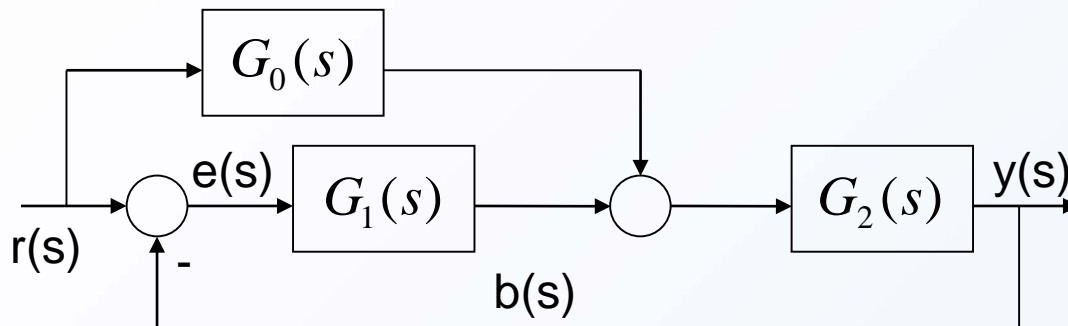
$$y(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}u(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}d(s)$$

$$e(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}u(s) - \frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}d(s)$$



2.6 控制系统的传递函数

例题20：系统方框图如下，计算系统的开环传递函数、误差传递函数。



解：按照方框图的运算关系，有

$$b(s) = y(s) \quad e(s) = r(s) - b(s) \quad y(s) = G_2(G_0 r(s) + G_1 e(s))$$

当 $e(s)$ 、 $b(s)$ 分别是系统的输入、输出（此时认为 $r(s)=0$ ）时，系统开环传递函数为： $\frac{b(s)}{e(s)} = G_1 G_2$

系统的闭环传递函数有：

$$\frac{e(s)}{r(s)} = \frac{1 - G_0 G_2}{1 + G_1 G_2} \quad \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G_2 (G_0 + G_1)}{1 + G_1 G_2}$$



总 结

(1)

- 数学模型是表示系统中变量之间的关系，微分方程（状态空间表达式）、传递函数、方框图是系统数学模型的不同表达形式。

(2)

- 传递函数及方框图是后续学习要应用的重要内容，相关的系统传递函数概念和计算方法必须掌握。

(3)

- 状态变量、输入/输出量、开环传递函数，闭环传递函数、特征方程（特征根）、零极点等概念必须掌握。



武汉理工大学

WUHAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

谢谢观看

THANKS FOR WATCHING

